

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**KHAI THÁC BIỂU DIỄN HÌNH HỌC VÀ TÍNH
CHẤT CỦA SỐ PHỨC ĐỂ LÀM ĐƠN GIẢN HÓA
CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ PHỨC**

Môn: Toán.

Cấp học: Trung học phổ thông.

Tên tác giả: Nguyễn Như Tùng.

Đơn vị công tác: THPT Phan Đình Phùng.

Chức vụ: Tổ trưởng chuyên môn.

NĂM HỌC: 2019 – 2020

MỤC LỤC

	Trang
PHẦN I. ĐẶT VẤN ĐỀ	1
1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI	2
2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU	3
3. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU	3
4. ĐỐI TƯỢNG KHẢO SÁT THỰC NGHIỆM	3
5. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU	3
6. PHẠM VI VÀ KẾ HOẠCH NGHIÊN CỨU	3
PHẦN II. NỘI DUNG	3
1. CƠ SỞ LÝ LUẬN	3
2. THỰC TRẠNG VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU	4
3. NỘI DUNG CHUYÊN ĐỀ	4
3.1. Ý nghĩa hình học của số phức	4
3.1.1. Một số kiến thức cơ bản	4
3.1.2. Khai thác ý nghĩa hình học của số phức vào giải toán	5
3.2. Tính chất về số phức liên hợp và modun của số phức	10
3.2.1. Các tính chất cơ bản	11
3.2.2. Khai thác các tính chất trên vào giải toán	11
4. KẾT QUẢ	15
PHẦN III. KẾT LUẬN	15

PHẦN I. ĐẶT VẤN ĐỀ

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI.

Số phức được đưa vào cuối chương trình môn Toán THPT với thời lượng rất ngắn, do đó rất nhiều học sinh thậm chí là học sinh khá, giỏi sau khi học xong phần số phức cũng chỉ hiểu một cách rất đơn sơ như tính toán các phép toán, giải các phương trình đơn giản, khi giải các bài toán về số phức, học sinh chưa hiểu và khai thác được mối liên hệ giữa số phức với hình học, với các kiến thức đã học dẫn đến học sinh sẽ thường giải bài toán theo hướng trực diện và sẽ gặp khó khăn, phức tạp, thậm chí là không giải được.

Có những bài toán hình học được giải quyết dễ dàng hơn nhờ công cụ của đại số và giải tích. Ngược lại, có những bài toán đại số hoặc giải tích, nhờ có hình học mà người ta thấy được cách giải đầy thú vị của nó. Hơn nữa, việc nhìn nhận một vấn đề theo nhiều khía cạnh khác nhau còn khiến cho học sinh có thể phát triển được cả tư duy sáng tạo của mình.

Sau nhiều năm giảng dạy tôi nhận thấy rằng bài toán về số phức có nhiều mối quan hệ với kiến thức của chương khác trong chương trình toán trung học phổ thông đặc biệt là hình học tọa độ *Oxy* và hình học phẳng, sợi dây liên kết vô hình đó tạo ra rất nhiều bài toán hay về số phức trong kì thi trung học phổ thông quốc gia và thi chọn học sinh giỏi.

Khai thác tính chất hay của số phức nằm trong ý nghĩa hình học của số phức, tính chất về modun số phức, số phức liên hợp được tôi trình bày khá chọn lọc trong sáng kiến này. Sự góp mặt của những tính chất đó đã làm nên yếu tố thú vị, bất ngờ đối với học sinh và góp phần không nhỏ trong việc phát triển tư duy, phát huy tối đa khả năng tìm tòi sáng tạo của học sinh. Không những thế các tính chất như một làn gió mới thổi vào bài toán thuần túy số phức tạo ra những biến đổi diệu kì.

Tính mới tính sáng tạo của sáng kiến là hệ thống tương đối đầy đủ những tính chất hay của số phức có mối quan hệ đặc biệt với các chương khác của chương trình toán THPT. Cách sắp xếp các bài tập có trật tự hợp lí giúp học sinh dễ xuyên chuỗi các tính chất với nhau, phát triển tốt các thao tác tư duy tương tự hóa và tổng quát hóa. Cập nhật hình thức thi trắc nghiệm mới đối với môn Toán của Bộ giáo dục và đào tạo, sau mỗi chuyên mục 3.1.2 và 3.2.2 chúng tôi đều xây dựng các bài tập trắc nghiệm dựa trên các ý tưởng của các bài tập tự luận chúng tôi đã trình bày trong mục đó. Sáng kiến rất phù hợp cho học sinh chuẩn bị tham gia kì thi trung học phổ thông quốc gia và các kì thi chọn học sinh giỏi.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU.

Tìm tòi cơ sở lý luận, thực trạng việc dạy và học số phức trong chương trình THPT, các cách tiếp cận bài toán. Xây dựng hệ thống các bài toán nhằm giúp cho việc dạy và học số phức trong nhà trường trở nên dễ dàng và thú vị, từ đó giúp học sinh có thói quen đào sâu mối liên hệ giữa kiến thức các phân môn Toán và Toán với môn học khác.

3. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU.

Nghiên cứu sách giáo khoa, chương trình, sách tham khảo, các đề thi THPTQG, học sinh giỏi các cấp, một số kiến thức thuộc các môn khác liên quan. Tìm hiểu khả năng nhận thức thực tế của từng đối tượng học sinh để từ đó đưa ra được hệ thống bài tập, các bước phân tích tìm lời giải, các bước hướng dẫn giải phù hợp.

4. ĐỐI TƯỢNG KHẢO SÁT THỰC NGHIỆM.

Là các học sinh lớp 12 năm học 2018 – 2019.

5. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU.

Nghiên cứu lý luận về chuẩn kiến thức kỹ năng, các tài liệu về tâm lý học lứa tuổi, về phát triển tư duy cho học sinh...

Điều tra - quan sát: Tìm hiểu khả năng phân tích, tổng hợp, khái quát hoá, đặc biệt hoá, tương tự hóa, tư duy đại số và tư duy hình học của mỗi học sinh.

Tổng kết kinh nghiệm: Tổng kết những kinh nghiệm rút ra từ thực tế giảng dạy và quá trình nghiên cứu của bản thân, qua trao đổi với những giáo viên dạy khác và với học sinh.

6. PHẠM VI VÀ KẾ HOẠCH NGHIÊN CỨU.

Nghiên cứu lý luận và hệ thống các kiến thức, kỹ năng, các thao tác tư duy từ tháng 1/2019; Triển khai vào giảng dạy từ tháng 2/2019; Kiểm tra đánh giá vào tháng 4/2019 và tổng kết kinh nghiệm vào tháng 5/2019.

PHẦN II. NỘI DUNG.

1. CƠ SỞ LÝ LUẬN.

Theo cách tiếp cận thứ nhất, số phức được xem là một biểu thức đại số có dạng $z = a + ib$ và ở đây thì các tính toán trên số phức được thực hiện theo kỹ thuật biến đổi đa thức một biến trên trường số thực. Chúng ta gọi đây là cách tiếp cận đại số. Trong cách tiếp cận thứ hai, chúng ta gọi là tiếp cận hình học, số phức được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng phức. Với cách tiếp cận này, những tính chất và quan hệ trên số phức được chuyển dịch sang các quan hệ hình học,

các phép toán trên số phức liên hệ mật thiết với các phép toán về vectơ và các phép biến hình trên mặt phẳng phức. Câu hỏi đầu tiên mà chúng ta tự đặt ra cho mình là: Trong toán học, tại sao lại cần có hai cách tiếp cận đó? Chúng có quan hệ gì? Trong thực tế dạy học toán ngày nay, quan hệ đó được thiết lập ra sao? Những câu hỏi này là nguồn gốc hình thành nên chủ đề nghiên cứu: “Quan hệ giữa hình học và đại số trong dạy học số phức ở lớp 12”. “Giữa “hình” và “số”, giữa các phép biến hình và các phép biến đổi về số có quan hệ sâu sắc... hình học trực quan hóa đại số nghĩa là làm cho những quan hệ đại số trừu tượng trở nên có hình ảnh còn đại số cho thấy mối quan hệ sâu xa bên trong giữa những hiện tượng hình học bề ngoài nhiều khi rất khác nhau”

2. THỰC TRẠNG VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU.

Khi dạy khối 12 ôn thi trung học phổ thông quốc gia tôi nhận thấy học sinh có phần hạn chế trong việc định hình hướng cách giải cho bài toán về số phức với mức độ vận dụng thấp và vận dụng cao. Xuất phát từ thực trạng đó chúng tôi thiết nghĩ cần rèn luyện cho học sinh kỹ năng phát hiện ý nghĩa hình học của số phức và các tính chất về số phức liên hợp, modun của số phức đồng thời hướng dẫn học sinh cách khai thác các tính chất đó như thế nào. Trước hết học sinh cần trang bị cho mình kiến thức hình học phẳng và các phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số một biến.

3. NỘI DUNG CHUYÊN ĐỀ.

3.1. Ý nghĩa hình học của số phức:

3.1.1. Một số kiến thức cơ bản:

+ Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.
Điểm $M(a, b)$ là điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Khi đó: $|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$

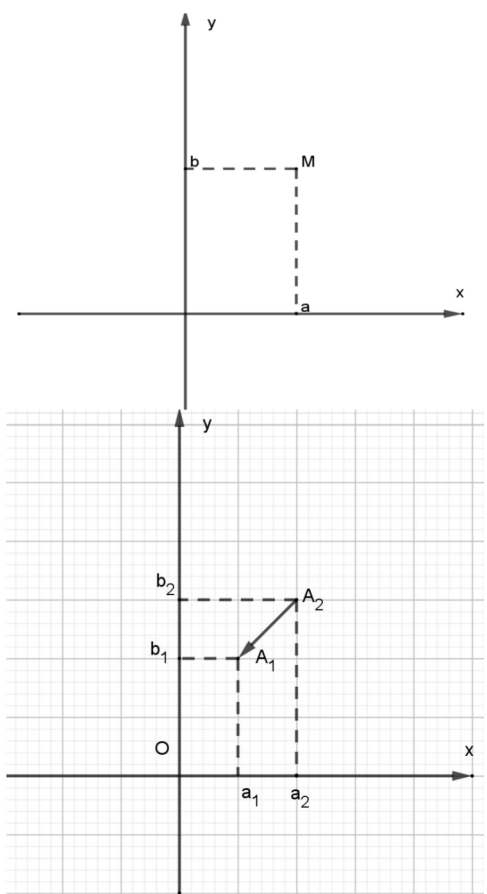
+ Cho $z_1 = a_1 + b_1i$ ($a_1, b_1 \in \mathbb{R}$);

$z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_2, b_2 \in \mathbb{R}$).

Điểm $A_1(a_1, b_1)$; $A_2(a_2, b_2)$ là điểm biểu diễn của z_1, z_2 . Ta có:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i \\ \Rightarrow |z_1 - z_2| &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \\ \overrightarrow{A_2A_1} &= (a_1 - a_2; b_1 - b_2) \\ \Rightarrow A_1A_2 &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \end{aligned}$$

Do đó: $|z_1 - z_2| = A_1A_2$;

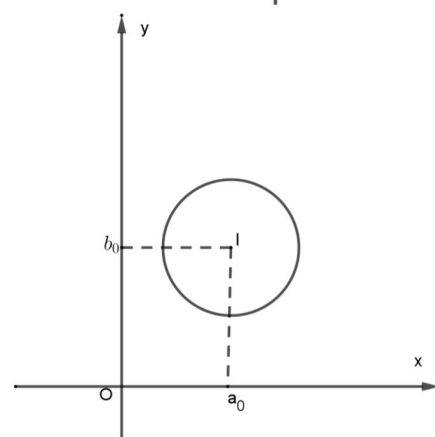
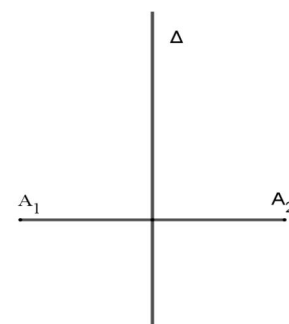


Số phức $z_1 - z_2$ được đặt tương ứng với tọa độ vec tơ $\overrightarrow{A_2A_1}$

+ Cho hai số phức z_1, z_2 . Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn:

$|z - z_1| = |z - z_2|$ là một đường thẳng đó là đường trung trực của đoạn thẳng A_1A_2 .

+ Cho số phức z_0 . Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn: $|z - z_0| = R$ là một đường tròn tâm I bán kính R trong đó I là điểm biểu diễn của số phức z_0



3.1.2. Khai thác ý nghĩa hình học của số phức vào giải toán:

Bài toán 1.1. Tìm tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện sau:

a) $|z - i| = |z + i|$. b) $|z - 1 - i| = 2$.

Lời giải:

a) Trên hệ trục Oxy, ta có điểm biểu diễn của số phức i là điểm $A(0; 1)$ và $-i$ là điểm $B(0; -1)$. Theo tính chất nêu trên thì tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường trung trực của AB và đó chính là trục hoành có phương trình: $y = 0$.

b) $|z - 1 - i| = 2 \Leftrightarrow |z - (1 + i)| = 2$. Trên hệ trục Oxy, ta có điểm biểu diễn của số phức $1 + i$ là điểm $I(1; 1)$. Theo tính chất nêu trên thì tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là một đường tròn tâm là điểm I và bán kính bằng 2. Phương trình đường tròn là: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

Bài toán 1.2. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z biết số phức $\frac{z+3+2i}{z-3-i}$ là một số thực âm.

Lời giải:

Bài toán này có thể dùng cách đặt $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ nhưng học sinh cần phải thực hiện phép chia hai số phức khá phức tạp, trong khi đó nếu sử dụng tính chất hay của số phức về điểm biểu diễn thì rất nhanh đưa ra kết luận.

$$\frac{z+3+2i}{z-3-i} \text{ là một số thực âm} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^- / z + 3 + 2i = k(z - 3 - i)$$

$$\Leftrightarrow z - (-3 - 2i) = k[z - (3 + i)] (*)$$

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z , $A(-3; -2)$ là điểm biểu diễn của số phức $-3 - 2i$, $B(3; 1)$ là điểm biểu diễn của $3 + i$.

$$(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM} \text{ với } k < 0. \text{ Suy ra } M \text{ nằm trong đoạn thẳng } AB$$

Phương trình đường thẳng (AB) : $-x + 2y + 1 = 0$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là phần đường thẳng có phương trình $-x + 2y + 1 = 0$ với $-3 < x < 3$



Bài toán 1.3.

- a) Cho số phức $w = 2z - i + 3$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn của số phức w nếu số phức z thỏa mãn $|z - 2 - i| = 4$.
- b) Cho số phức $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn của số phức w nếu $|z - 1| \leq 2$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } w = 2z - i + 3 &\Leftrightarrow w = 2(z - 2 - i) + 7 + i \\ &\Leftrightarrow w - (7 + i) = 2(z - 2 - i) \Rightarrow |w - (7 + i)| = 2|z - 2 - i| = 8 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn tâm $I(7; 1)$ và bán kính bằng 8. Phương trình đường tròn là: $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 64$.

$$\begin{aligned} \text{b) } w = (1 + i\sqrt{3})z + 2 &\Leftrightarrow w = (1 + i\sqrt{3})(z - 1) + 1 + i\sqrt{3} + 2 \\ &\Leftrightarrow w - (3 + i\sqrt{3}) = (1 + i\sqrt{3})(z - 1) \\ &\Rightarrow |w - (3 + i\sqrt{3})| = |1 + i\sqrt{3}||z - 1| \leq 4. \end{aligned}$$

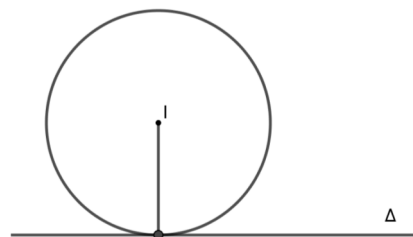
Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là hình tròn tâm $I(3, \sqrt{3})$ và bán kính bằng 4, thỏa mãn bất phương trình: $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 \leq 16$.

Bài toán 1.4. Tìm số thực m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} |z - 3i - 1| = 1 \\ |z + i - 1| = |z - m| \end{cases}$$

Lời giải:

Gọi $M(a; b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $I(1; 3)$, $A(1; -1)$, $B(m; 0)$ là điểm biểu diễn của số phức z , $1 + 3i$, $1 - i$, m



Từ giả thiết ta có:

M thuộc đường tròn (C) tâm I bán kính bằng 1 và M thuộc đường thẳng (Δ) là đường thẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

Để hệ trên có nghiệm duy nhất thì đường thẳng (Δ) tiếp xúc với đường tròn $(C) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = 1$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (m - 1; 1)$, $J\left(\frac{m+1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$ là trung điểm của AB .

Phương trình của đường thẳng AB là: $(m - 1)\left(x - \frac{m+1}{2}\right) + 1\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2(m - 1)x + 2y - m^2 + 2 = 0 \\ \Rightarrow d(I, \Delta) &= \frac{|2(m - 1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 - m^2|}{\sqrt{(m - 1)^2 \cdot 4 + 4}} = 1 \\ &\Leftrightarrow |-m^2 + 2m - 6| = 2\sqrt{m^2 - 2m + 2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [8 - (m^2 - 2m + 2)]^2 = 4(m^2 - 2m + 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 2 = 4 \\ m^2 - 2m + 2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \pm \sqrt{3} \\ m = 1 \pm \sqrt{15} \end{cases}$$

Bài 1.5. Cho số phức z : $|z - 6 - 8i| = 5$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z|$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z - 1 - 3i|$

Lời giải

a) Gọi $M(a; b), a, b \in \mathbb{R}, I(6; 8)$ là điểm biểu diễn của số phức $z, 6 + 8i$.

Ta có M thuộc đường tròn tâm I bán kính bằng 5:

$$IM = 5, OI = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10; |z| = OM$$

Ta sử dụng bất đẳng thức tam giác quen thuộc để tìm Min, Max của $|z|$

$$|OI - IM| \leq OM \leq OI + IM \Leftrightarrow 5 \leq |z| \leq 15$$

Vậy $|z|$ đạt Min bằng 5 và đạt Max bằng 15 khi M là giao điểm của đường thẳng OI và đường tròn.

b) Trong câu b ta thay điểm $O(0; 0)$ bởi điểm $A(1; 3) \Rightarrow AI = 5\sqrt{2}$

Ta có: $|z - 1 - 3i| = AM$.

$$|AI - IM| \leq AM \leq AI + IM \Leftrightarrow 5\sqrt{2} - 5 \leq |z - 1 - 3i| \leq 5\sqrt{2} + 5$$

Vậy $|z - 1 - 3i|$ đạt Min bằng $5\sqrt{2} - 5$ và đạt Max bằng $5\sqrt{2} + 5$ khi M là giao điểm của đường thẳng AI và đường tròn.

Bài toán 1.6. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 4| + |z + 4| = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z|$.

Lời giải:

Gọi $M(a; b), a, b \in \mathbb{R}, F_1(-4; 0), F_2(4; 0)$ là điểm biểu diễn của số phức $z, -4, 4$

Ta có : $|z + 4| = |z - (-4)| = MF_1, |z - 4| = MF_2$

$$|z - 4| + |z + 4| = 10 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10$$

Theo định nghĩa đường Elip thì tập hợp M là đường Elip có hai tiêu điểm là F_1, F_2 :

$$c = 4, 2a = 10 \Rightarrow a = 5, b = \sqrt{a^2 - c^2} = 3. \text{ Phương trình (E): } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

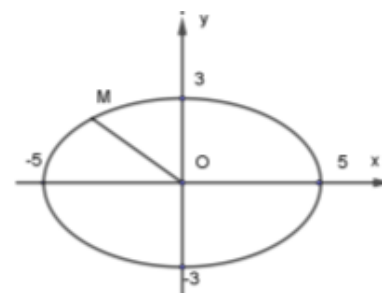
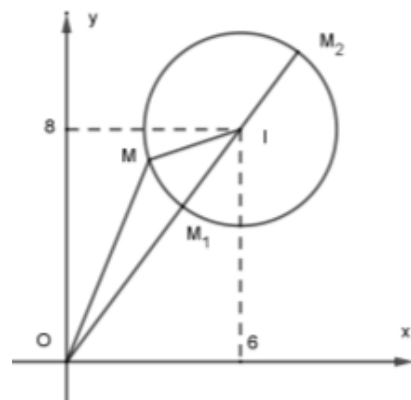
Mặt khác $|z| = OM \Rightarrow b \leq |z| \leq a \Leftrightarrow 3 \leq |z| \leq 5$.

Vậy $|z|$ đạt Min bằng 3 và đạt Max bằng 5.

Bài toán 1.7. Cho số phức z thỏa mãn $|(z + 2)i + 1| + |(\bar{z} - 2)i - 1| = 6$. Gọi $K; k$ là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $T = K + k$

Lời giải:

Đặt $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$



$$|(z+2)i+1|+|(\bar{z}-2)i-1|=6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = 6$$

Gọi $M(x; y), A(-2; 1), B(2; 1)$

Ta có $MA + MB = 6$. Suy ra tập hợp M là elip có hai tiêu điểm là A, B

$$\begin{cases} 2a = 6 \\ 2c = 4 \\ b = \sqrt{a^2 - c^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = 2 \\ b = \sqrt{5} \end{cases}$$

Phương trình elip là : $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$ tâm đối xứng là $I(0; 1)$

Ta có $|z| = OM \geq IM - OI \geq b - OI = \sqrt{5} - 1 \Rightarrow \text{Min}|z| = k = \sqrt{5} - 1$ đạt được khi $M \equiv E(0; 1 - \sqrt{5})$

Xét $|z|^2 = x^2 + y^2 = 9 \left[1 - \frac{(y-1)^2}{5} \right] + y^2 = f(y)$

$$f'(y) = 2y - \frac{18}{5}(y-1) = \frac{-8}{5}y + \frac{18}{5} \Rightarrow f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{9}{4} \Rightarrow f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{180}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Max}|z| = K = \sqrt{\frac{180}{16}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Vậy } T = K + k = \frac{5\sqrt{5}-2}{2}.$$

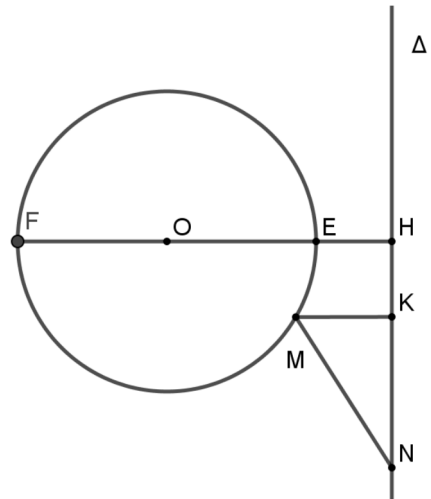
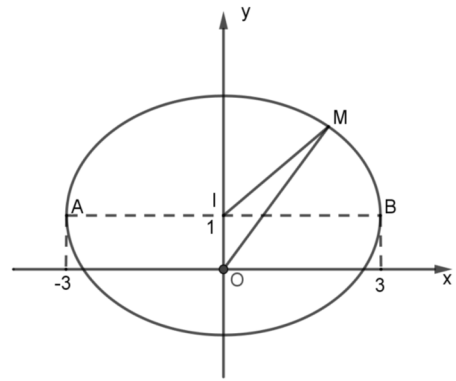
Bài toán 1.8. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 = a + bi; z_2 = c + di; a^2 + b^2 = 4; c + d = 4, a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$.

Lời giải

Gọi điểm M là điểm biểu diễn của số phức z_1 , N là điểm biểu diễn của số phức z_2 . Ta có $|z_1 - z_2| = MN$.

Theo giả thiết M thuộc đường tròn tâm O bán kính $R = 2$ còn N thuộc đường thẳng $(\Delta): x + y = 4$.

Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với (Δ) cắt đường tròn tại hai điểm E, F và cắt (Δ) tại H với điểm E nằm giữa O và H.



$$MN \geq d(M, \Delta) = MK \geq EH = OH - OE = d(O, \Delta) - R = 2\sqrt{2} - 2$$

Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv E$ và $N \equiv H$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng $2\sqrt{2} - 2$.

Bài toán 1.9. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 = a + bi; z_2 = c + di$; với

$a^2 + b^2 = 4; c^2 + d^2 = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z_1 - z_2|$.

Lời giải:

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 . Ta có: A thuộc đường tròn $(O; 2)$ và B thuộc đường tròn $(O; 3)$.

Suy ra: $|z_1 - z_2| = AB$ đạt min bằng hiệu hai bán kính và đạt max bằng tổng hai bán kính.

Vậy $\min|z_1 - z_2| = 1, \max|z_1 - z_2| = 5$

Bài toán 1.10. Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$.

Lời giải:

Cách 1: Gọi $M(a; b), a, b \in \mathbb{R}, I(4; 3)$,

$A(-1; 3); B(1; -1)$ là điểm biểu diễn của số phức $z, 4 + 3i, -1 + 3i; 1 - i$.

Ta có: M thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = \sqrt{5}$.

$IA > R, IB > R$ nên điểm A và B nằm ngoài đường tròn.

$$|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i| = MA + MB$$

Gọi (Δ) là đường thẳng trung trực của AB thì phương trình của Δ đi qua trung điểm của AB là $J(0; 1)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (2; -4)$ làm vectơ pháp tuyến là:

$$2x - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2y - 2$$

Ta tìm giao điểm của Δ và đường tròn

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} x = 2y - 2 \\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2y - 6)^2 + (y - 3)^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

Suy ra giao điểm của Δ và đường tròn là hai điểm $C(2; 2)$ và $D(6; 4)$.

Ta chứng minh: $MA + MB \leq DA + DB(*)$

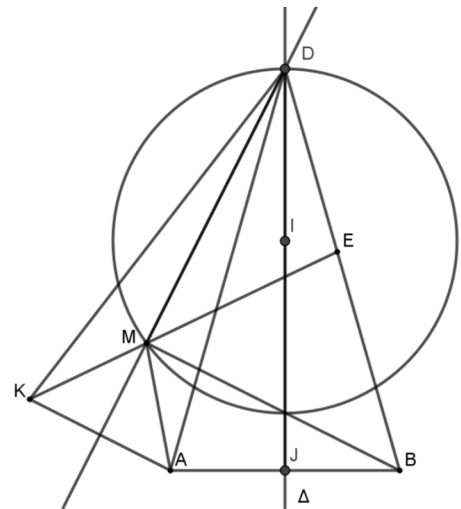
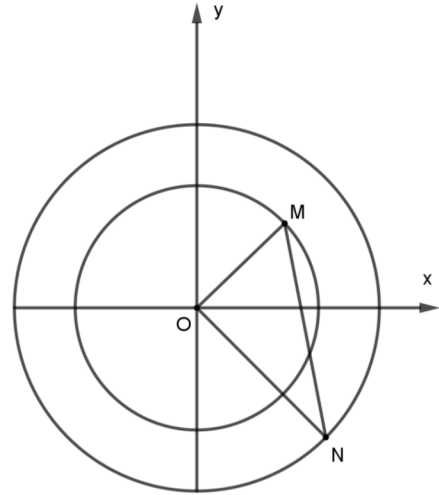
Thật vậy: $D \in \Delta \Leftrightarrow DA = DB$. Đặc biệt $I(4; 3) \in \Delta$

Lấy điểm K đối xứng với A qua đường thẳng (DM)

Ta có: $MA = MK, DA = DK, MK \cap DB = \{E\}$

$\Rightarrow MA + MB = MK + MB \leq MK + ME + EB \leq EK + EB \leq DK + DE + EB = DK + DB = DA + DB$ Suy ra $(*)$ được chứng minh

Ta có $DA + DB = 10\sqrt{2}$.



Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ bằng $10\sqrt{2}$.

Cách 2: Gọi J là trung điểm của AB . Theo công thức đường trung tuyến ta có

$$MJ^2 = \frac{2(MA^2 + MB^2) - AB^2}{4} \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 2MJ^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Mà $(MA + MB)^2 \leq 2(MA^2 + MB^2) = 4MJ^2 + AB^2$.

M chạy trên đường tròn tâm I cố định nói trên, điểm J cố định nên JM lớn nhất khi điểm I nằm giữa $J; M$. Suy ra $M \equiv D(6,4)$.

Vậy $MA + MB$ đạt giá trị lớn nhất khi tam giác MAB cân tại M và điểm I nằm giữa J, M . Suy ra $M \equiv D(6,4)$ (thỏa mãn cả hai điều kiện).

Bài toán 1.11. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z - 1| + |z + 1|$.

Lời giải:

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ |z^2 + 1| = 2|z| \end{cases}$$

Đặt $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow M(a; b)$ là điểm biểu diễn z

$$\begin{aligned} |z^2 + 1| = 2|z| &\Leftrightarrow |(a + bi)^2 + 1| = 2|a + bi| \\ &\Leftrightarrow (a^2 - b^2 + 1)^2 + 4a^2b^2 = 4(a^2 + b^2) \\ &\Leftrightarrow a^4 + b^4 + 2a^2b^2 + 1 - 2a^2 - 6b^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 1)^2 = 4b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 1 = 2b \\ a^2 + b^2 - 1 = -2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (b - 1)^2 = 2 \\ a^2 + (b + 1)^2 = 2 \end{cases}$$

Mặt khác nếu $z = 0 \Leftrightarrow M \equiv O$ và điểm O không thuộc hai đường tròn trên

Suy ra tập hợp điểm M là điểm biểu diễn của số phức z là hợp của hai đường tròn $(C_1)x^2 + (y - 1)^2 = 2$ và $(C_2): x^2 + (y + 1)^2 = 2$.

Hai đường tròn trên đều có bán kính bằng $\sqrt{2}$ và cắt nhau tại hai điểm $A(1; 0), B(-1; 0) \Rightarrow T = MA + MB$.

Ta thấy bài toán này có ý tưởng tương tự bài toán 10. Chứng minh tương tự bài toán 10: T đạt giá trị lớn nhất khi tam giác MAB cân tại M . Khi đó M là trung điểm của cung lớn $AB \Leftrightarrow M \equiv M_1(0; 1 + \sqrt{2})$ hoặc $M \equiv M_2(0; -1 - \sqrt{2})$

Vậy $MaxT = M_1A + M_1B = 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.

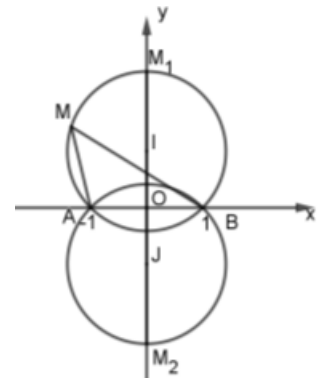
Bài toán 1.12. Cho ba số phức u, v, w thỏa mãn: $|u| = |v| = |w| = 1$ và $u + v + w = 1$. Chứng minh rằng trong ba số u, v, w có ít nhất một số bằng 1.

Lời giải:

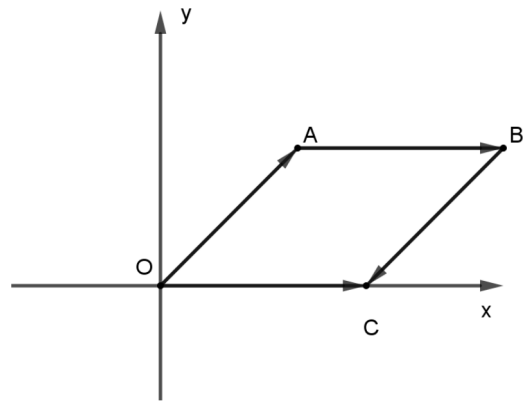
Trên mặt phẳng tọa độ Oxy ta dựng $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ lần lượt biểu diễn cho các số phức u, v, w .

Ta có $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

nên là $\overrightarrow{OC}$ vectơ biểu diễn cho số phức $u + v + w \Rightarrow OC = |u + v + w| = 1$



Mà $u + v + w = 1$ suy ra điểm $C \in Ox$.
 Tứ giác $OABC$ có $OA = AB = BC = OC$
 nên tứ giác trở thành hình thoi
 $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} = 1$, tức là có ít nhất một số
 phức bằng 1.



3.2. Tính chất về số phức liên hợp và modun của số phức:

3.2.1. Các tính chất cơ bản :

+ Với mọi số phức z ta có: $z = \overline{\overline{z}}$

$z = \overline{z}$ thì số phức z là số thực; $z = -\overline{z}$ thì số phức z là số thuần ảo

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$$

+ Với mọi số phức z_1, z_2 ta có: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ với mọi số nguyên dương n .

+ Nếu $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thì $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

+ Với mọi số phức z_1, z_2 ta có:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|; \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

+ Bất đẳng thức Bunhiacopxki với bốn số thực bất kì: $a, b, x, y (x, y \neq 0)$

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

3.2.2. Khai thác các tính chất trên vào giải toán

Bài toán 2.1. Cho số phức $z = \frac{m - i\sqrt{3}}{1 - m^2 + 2mi}$ với $m \in \mathbb{R}$. Tìm m để $z \cdot \overline{z} = 1$

Lời giải:

Ta có: $z \cdot \overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{|m - i\sqrt{3}|}{|1 - m^2 + 2mi|} = 1 \Leftrightarrow m^2 + 3 = (1 - m^2)^2 + 4m^2 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Bài toán 2.2. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện

$$|z_1 + 3z_2| = 4, |z_1| = |z_2| = 1. \text{ Tính } |3z_1 - z_2|$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} T &= |3z_1 - z_2|^2 + |z_1 + 3z_2|^2 \\ &= (3z_1 - z_2)(\overline{3z_1 - z_2}) + (z_1 + 3z_2)(\overline{z_1 + 3z_2}) \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất của số phức liên hợp nêu trên ta có :

$$T = 10z_1\overline{z_1} + 10z_2.\overline{z_2} = 20 \Rightarrow |3z_1 - z_2|^2 = 20 - 16 = 4.$$

Vậy $|3z_1 - z_2| = 2$.

Bài toán 2.3. Cho số phức z thỏa mãn: $\frac{2z-1}{z-2}$ là số thực, chứng minh z là số thực

Lời giải: $\frac{2z-1}{z-2}$ là số thực

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{\left(\frac{2z-1}{z-2}\right)} &= \frac{2\overline{z}-1}{\overline{z}-2} = \frac{2\overline{z}+1}{\overline{z}-2} = \frac{2z+1}{z-2} \Rightarrow (2\overline{z}+1)(z-2) \\ &= (\overline{z}-2)(2z+1) \Rightarrow 5\overline{z} = 5z \end{aligned}$$

Vậy z là số thực.

Bài toán 2.4. Cho hai số phức z, w thỏa mãn: $|z| = 1; |w| = 1; zw \neq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{z+w}{1+zw}$ là số thực.

Lời giải: Ta có: $|z| = 1 \Rightarrow z.\overline{z} = 1 \Rightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$

Tương tự: $\overline{w} = \frac{1}{w}$

Xét $\overline{\left(\frac{z+w}{1+zw}\right)} = \frac{\overline{z}+\overline{w}}{1+\overline{z}.\overline{w}} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{w}}{1+\frac{1}{zw}} = \frac{z+w}{1+zw}$. Vậy $\frac{z+w}{1+zw}$ là số thực

Bài toán 2.5. Cho z, w, u là ba số phức phân biệt sao cho $|z| = |w| = |u| = 1$.

Chứng minh rằng: $|zw + wu + zu| = |z + w + u|$

Lời giải: Ta có: $z.\overline{z} = w.\overline{w} = u.\overline{u} = 1$ nên

$$\begin{aligned} |z + w + u| &= \left| \frac{1}{\overline{z}} + \frac{1}{\overline{w}} + \frac{1}{\overline{u}} \right| = \left| \frac{\overline{1}}{\overline{z}} + \frac{\overline{1}}{\overline{w}} + \frac{\overline{1}}{\overline{u}} \right| = \left| \overline{\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{u} \right)} \right| = \left| \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{u} \right| \\ &= \frac{|zw + wu + uz|}{|zwu|} = |zw + wu + uz| \end{aligned}$$

Bài toán 2.6. Cho hai số phức z, w thỏa mãn: $|z| = 3, |w| = 4, |z - w| = \sqrt{37}$.

Tính $\frac{z}{w}$?

Lời giải: Ta có: $\frac{z}{w} = \frac{z.\overline{w}}{w.\overline{w}} = \frac{z.\overline{w}}{16}$

Theo đề bài: $|z - w| = \sqrt{37} \Leftrightarrow (z - w)(\overline{z} - \overline{w}) = 37 \Leftrightarrow z.\overline{z} - z.\overline{w} - w.\overline{z} + w.\overline{w} = 37 \Rightarrow z.\overline{w} + \overline{z}.w = -12$

Mà $(z.\overline{w}).(\overline{z}.w) = |z|^2.|w|^2 = 144$.

Suy ra $z.\overline{w}; \overline{z}.w$ là nghiệm của phương trình:

$$t^2 + 12t + 144 = 0 \Leftrightarrow t = -6 \pm 6\sqrt{3}i \Rightarrow \frac{z}{w} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{8}.$$

Bài toán 2.7. Tìm modun của z biết $z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i$

Lời giải:

Ta sử dụng tính chất rất đơn giản của số phức, đó là $|z|$ là một số thực

Giả thiết $\Leftrightarrow z(1 + 3i) = 4 + |z| + i(|z| - 4)$

Lấy modun hai vế ta được:

$$|z|. |1 + 3i| = \sqrt{(4 + |z|)^2 + (|z| - 4)^2}$$

Đặt $a = |z| \Rightarrow a \in \mathbb{R}^+$. Ta có phương trình:

$$\sqrt{10}a = \sqrt{(4 + a)^2 + (4 - a)^2} \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy $|z| = 2$.

Bài toán 2.8. Cho z là số phức khác 0 thỏa mãn: $\left|z^3 + \frac{8}{z^3}\right| \leq 9$.

Chứng minh rằng: $\left|z + \frac{2}{z}\right| \leq 3$.

Lời giải:

Ta có: $\left(z + \frac{2}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{8}{z^3} + 3 \cdot z \cdot \frac{2}{z} \left(z + \frac{2}{z}\right) \Rightarrow z^3 + \frac{8}{z^3} = \left(z + \frac{2}{z}\right)^3 - 6 \left(z + \frac{2}{z}\right)$

$$\Rightarrow 9 \geq \left|z^3 + \frac{8}{z^3}\right| = \left|\left(z + \frac{2}{z}\right)^3 - 6 \left(z + \frac{2}{z}\right)\right| \geq \left|z + \frac{2}{z}\right|^3 - 6 \cdot \left|z + \frac{2}{z}\right|$$

Đặt $a = \left|z + \frac{2}{z}\right| \Rightarrow a \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow a^3 - 6a - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (a - 3)(a^2 + 3a + 3) \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 3 \text{ (đpcm)}.$$

Bài toán 2.9. Trong các số phức z thỏa mãn: $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$, hãy tìm số phức có

a) $|z|$ nhỏ nhất?

b) $|z|$ lớn nhất ?

Lời giải:

$$\left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right) \left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{z^2 + 1}{z} \cdot \frac{\bar{z}^2 + 1}{\bar{z}} = 4$$

$$\Leftrightarrow |z|^4 + z^2 + \bar{z}^2 + 1 - 4z \cdot \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow |z|^4 - 6z \cdot \bar{z} + 1 = -(z + \bar{z})^2 \leq 0 \text{ (vì } z + \bar{z} \text{ là một số thực)}$$

$$\Leftrightarrow |z|^4 - 6 \cdot |z|^2 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leq |z|^2 \leq 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \leq |z| \leq \sqrt{2} + 1$$

Vậy $\min|z| = \sqrt{2} - 1$ đạt được khi $z = (\sqrt{2} - 1)i$

$\max|z| = \sqrt{2} + 1$ đạt được khi $z = (\sqrt{2} + 1)i$

Bài toán 2.10. Cho số phức $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ sao cho

$|z + 4 + i| = \sqrt{2}|z + 3 - i|$. Tìm giá trị lớn nhất của $x + y$.

Lời giải: Giả thiết

$$\Leftrightarrow |x + yi + 4 + i| = \sqrt{2} \cdot |x + yi + 3 - i|$$

$$\Leftrightarrow (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 2[(x + 3)^2 + (y - 1)^2]$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$$

Xét $M = x + y = 1 \cdot (x + 2) + 1 \cdot (y - 3) + 1$

$$\Rightarrow (M - 1)^2 = [1 \cdot (x + 2) + 1 \cdot (y - 3)]^2 \leq (1^2 + 1^2)[(x + 2)^2 + (y - 3)^2] \leq 20.$$

(Bất đẳng thức Bunnhiacopski)

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{5} \leq M \leq 1 + 2\sqrt{5}$$

Vậy $\text{Max}(x + y) = 1 + 2\sqrt{5}$ đạt được khi $\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10 \\ x + y = 1 + 2\sqrt{5} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} - 2 \\ y = 3 + \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow z = (\sqrt{5} - 2) + (3 + \sqrt{5})i.$$

Những bài toán trong mục 3.1.2 và 3.2.2 nêu trên đều rất phù hợp với kì thi THPT quốc gia hiện nay bằng cách chuyển hóa những ý tưởng đó thành những bài tập trắc nghiệm và tiến hành thực nghiệm trên 2 đối tượng học sinh theo đề:

Câu 1. Tập hợp biểu diễn của số phức z thỏa mãn: $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1$ là:

A. đường phân giác góc phần tư thứ nhất. **B.** trục tung.

C. trục hoành. **D.** đường phân giác góc phần tư thứ 2.

Câu 2. Tìm số thực m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn:

$$|z - 3i - 1| = 1; |z + i - 1| = |m - z|$$

A. $m \in \{1 \pm \sqrt{3}; 1 \pm \sqrt{15}\}$. **B.** $m \in \{1 \pm \sqrt{5}; 1 \pm \sqrt{15}\}$.

C. $m \in \{1 \pm \sqrt{3}; 1 \pm \sqrt{10}\}$. **D.** $m \in \{1 \pm \sqrt{5}; 1 \pm \sqrt{10}\}$.

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 4| + |z + 4| = 10$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. 10 và 4. **B.** 5 và 4. **C.** 4 và 3. **D.** 5 và 3.

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = |z - 1 - i|$ là:

A. một cung tròn. **B.** Một đoạn thẳng. **C.** một đường tròn. **D.** một đường thẳng.

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z^3 - z + 2|$

A. 3. **B.** 4. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{15}$.

Câu 6. Biết số phức z thỏa mãn $|z - i + 1| = 2$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $\omega = 2z - 3i + 5$ là một đường tròn có bán kính bằng:

A. 16. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 7. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = 1; |z_2| = 4; |4z_1 + z_2| = 8$. Tính $|z_1 - 2z_2|$

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 8. Cho z thỏa mãn $|z - 2 - 2i| = \sqrt{2}$, và $|z|$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 9. Cho z_1, z_2, z_3 có ba điểm biểu diễn là ba đỉnh A, B, C của tam giác đều cạnh 1 và nhận gốc tọa độ O là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. **B.** $|z_1| + |z_2| + |z_3| = 3$.

C. $|z_1| + |z_2| + |z_3| = \sqrt{3}$. **D.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Câu 10. Cho số z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z - 1 - 2i| \leq \sqrt{5}$ và $|z - 5 - 2i| \leq \sqrt{13}$. Tìm $\max|z|$.

A. $T = 2\sqrt{5}$. **B.** $T = 3\sqrt{5}$ **C.** $T = 4\sqrt{5}$. **D.** $T = \sqrt{5}$.

Câu 11. Cho z là số thực thỏa mãn $|z + m| = |z - 1 + m|$ và số phức $w = 1 + i$. Xác định tham số thực m để $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $m = \frac{1}{2}$. **B.** $m = \frac{-1}{2}$. **C.** $m = \frac{1}{3}$. **D.** $m = 1$.

Câu 12. Cho z_1, z_2, z_3 là ba số phức cố định có các điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là ba đỉnh của một tam giác đều có cạnh bằng 1.

Tìm $\min|az_2 + (1 - a)z_3 - z_1|$ với a là một số thực thay đổi

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** 1. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

4. KẾT QUẢ.

Với việc áp dụng nhuần nhuyễn biểu diễn hình học của số phức và tính chất modun, số phức liên hợp thông qua các bài toán cực trị số phức quy về cực trị hình học và một số bài toán tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức cũng một số bài toán khác trong quá trình học và ôn luyện, tư duy của các em phát triển rõ rệt. Các em có những cách nhìn bài toán đa chiều hơn, không những tìm được lời giải mà còn tìm được nhiều cách giải khác nhau theo những cách tiếp cận khác nhau: Đại số, hàm số, hình học, lượng giác, ... và tìm được cách giải ngắn. Các em không còn sợ khi phải giải các bài toán số phức, kể cả những bài khó.

PHẦN III. KẾT LUẬN.

Bài toán về số phức ở mức độ vận dụng và vận dụng cao là một mảng khó trong đề thi trung học phổ thông quốc gia. Thông qua các bài toán được sắp xếp một cách có chủ định với mục đích tăng dần liều lượng từ dễ đến khó, từ đơn giản đến phức tạp, đã từng bước kích thích niềm say mê học toán của học sinh.

Kết quả thu được sau khi áp dụng sáng kiến này là học sinh khối 12 tự tin hơn khi giải bài toán về số phức trong đề thi THPT Quốc gia. Các em học sinh có định hướng tốt hơn hướng giải của các bài toán đó và hoàn thành tốt bài thi của mình.

Trong thời gian có hạn, sáng kiến còn nhiều thiếu sót, rất mong nhận được sự góp ý của các bạn đồng nghiệp!

PHIẾU KHẢO SÁT

(Nội dung khảo sát sau khi ứng dụng các giải pháp mới của đề tài SKKN)

Người viết: **Nguyễn Như Tùng.**

Tên SKKN: **Khai thác biểu diễn hình học và tính chất của số phức để làm đơn giản hóa các bài toán về số phức**

Môn (ngành, nghề): **Toán.**

Tổ/nhóm: **Toán – Tin.**

Nội dung khảo sát, kết quả sau khi ứng dụng các giải pháp mới của đề tài SKKN:

+ Đối tượng: 30 học sinh lớp 12A3 trường THPT Phan Đình Phùng.

+ Nội dung khảo sát: Học sinh làm đề trắc nghiệm 10 câu đầu (trong SKKN) trong thời gian 45 phút.

+ Kết quả:

Điểm	0 đến 2	3 đến 4	5 đến 6	7 đến 8	9 đến 10
Số lượng	2	3	8	10	7
Tỉ lệ %	6,7%	10%	26,7%	33,3%	23,3%

Ngày tháng năm 2019

Người viết

(ký và ghi rõ họ tên)

Nguyễn Như Tùng

PHIẾU KHẢO SÁT

(Nội dung khảo sát trước khi ứng dụng các giải pháp mới của đề tài SKKN)

Người viết: **Nguyễn Như Tùng.**

Tên SKKN: **Khai thác biểu diễn hình học và tính chất của số phức để làm đơn giản hóa các bài toán về số phức**

Môn (ngành, nghề): **Toán.**

Tổ/nhóm: **Toán – Tin.**

Nội dung khảo sát, kết quả sau khi ứng dụng các giải pháp mới của đề tài SKKN:

+ Đối tượng: 30 học sinh lớp 12A2 trường THPT Phan Đình Phùng.

+ Nội dung khảo sát: Học sinh làm đề trắc nghiệm 10 câu đầu (trong SKKN) trong thời gian 45 phút.

+ Kết quả:

Điểm	0 đến 2	3 đến 4	5 đến 6	7 đến 8	9 đến 10
Số lượng	8	8	9	4	1
Tỉ lệ %	26,7%	26,7%	30%	13,3%	3,3%

Ngày tháng năm 2019

Người viết

(ký và ghi rõ họ tên)

Nguyễn Như Tùng