

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

Kỹ thuật Dồn biến trong các bài toán Bất đẳng thức

Lĩnh vực/ Môn: MÔN TOÁN

Cấp học: Trung học phổ thông

Tên tác giả: Nguyễn Phương Vũ

Đơn vị công tác: Trường THPT Phan Đình Phùng

Chức vụ: Giáo viên

NĂM HỌC 2021 - 2022

ĐƠN YÊU CẦU CÔNG NHẬN SÁNG KIẾN

(Ban hành kèm theo Thông tư số 18/TT-BKHCN ngày 01 tháng 8 năm 2013 của Bộ trưởng Bộ Khoa học và Công nghệ)

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM

Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

ĐƠN YÊU CẦU CÔNG NHẬN SÁNG KIẾN

Kính gửi: Hội đồng xét, duyệt sáng kiến kinh nghiệm Sở giáo dục và đào tạo Hà Nội.

	Ngày tháng năm sinh	Nơi công tác	Chức đanh	Trình độ chuyên môn	Tên sáng kiến
Nguyễn Phương Vũ	26/10/1972	Trường THPT Phan Đình Phùng	Giáo viên	Thạc Sĩ	Kỹ thuật Dồn biến trong các bài toán Bất đẳng thức

- Lĩnh vực áp dụng sáng kiến : Sáng kiến được áp dụng cho học sinh THPT
- Ngày sáng kiến được áp dụng thử tháng 9/2021
- Mô tả bản chất của sáng kiến : Giúp học sinh nâng cao kỹ năng phân tích, ứng dụng Toán học để sử dụng phương pháp Dồn biến để giải quyết các bài toán về Bất đẳng thức hay tìm GTLN, NN của một biểu thức. . Nhằm đáp ứng một phần kỹ năng vận dụng giải toán Toán học của HS trong các kì Học sinh giỏi và câu khó trong kỳ thi THPT Quốc Gia.
- Các điều kiện cần thiết để áp dụng sáng kiến: Bồi dưỡng Học sinh giỏi hoặc ôn luyện nâng cao cho học sinh lớp 12 phục vụ kì thi THPT Quốc gia
- Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tác giả : Đội tuyển Học sinh Giỏi của trường luôn nằm trong nhóm dẫn đầu của Cụm trường, kết quả thi THPT Quốc gia rất khả quan.
- Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tổ chức, cá nhân đã tham gia áp dụng sáng kiến lần đầu hoặc áp dụng thử nếu có: Lợi ích từ việc áp dụng sáng kiến vào việc bồi dưỡng HSG rất tốt, luôn bám sát yêu cầu mà Sở GD -ĐT Hà Nội đề ra trong Kỳ thi HSG cấp Cụm và Thành Phố.

Tôi xin cam đoan mọi thông tin nêu trong đơn là trung thực, đúng sự thật và hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật.

Hà nội, ngày 10 tháng 5 năm 2022

Người nộp đơn

NGUYỄN PHƯƠNG VŨ

BIÊN BẢN XÉT DUYỆT SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM CẤP TRƯỜNG

Tác giả : NGUYỄN PHƯƠNG VŨ
 Đơn vị : Trường THPT Phạm Đình Phùng
 Tên SKKN : Kỹ thuật dạy học theo các bài toán Bất Đẳng Thức
 Môn (hoặc Lĩnh vực): Toán

TT	Nội dung	Biểu điểm	Điểm được đánh giá	Nhận xét
I	Điểm hình thức (2 điểm)			
	Trình bày đúng quy định về thể thức văn bản (kiểu chữ, cỡ chữ, dẫn dòng, căn lề...)	1	1	Đúng quy định
	Kết cấu hợp lý: Gồm 3 phần chính (đặt vấn đề, giải quyết vấn đề, kết luận và khuyến nghị)	1	1	Đúng kết cấu
II	Điểm nội dung (18 điểm)			
1	Đặt vấn đề (2 điểm)			
	Nêu lý do chọn vấn đề mang tính cấp thiết	1	1	Phù hợp với cần thiết
	Nói rõ thời gian, đối tượng, phạm vi nghiên cứu	1	1	Thời gian rõ ràng
2	Giải quyết vấn đề (14 điểm)			
	Tên SKKN, tên các giải pháp phù hợp với nội hàm	1	1	Tên phù hợp với nội hàm
	Nêu rõ cách làm cũ, phân tích nhược điểm. Có số liệu khảo sát trước khi thực hiện giải pháp	3	3	Đủ số liệu
	Nêu cách làm mới thể hiện tính sáng tạo, hiệu quả. Có ví dụ và minh chứng tường minh cho hiệu quả của các giải pháp mới	7	6	Có sáng tạo và hiệu quả
	Có tính mới, phù hợp với thực tiễn của đơn vị và đối tượng nghiên cứu, áp dụng	1	1	Phù hợp với thực tiễn
	Có tính ứng dụng, có thể áp dụng được ở nhiều đơn vị.	1	1	Áp dụng BDTSG
	Nội dung đảm bảo tính khoa học,	1	1	Đảm bảo khoa học

TT	Nội dung	Biểu điểm	Điểm được đánh giá	Nhận xét
	chính xác			
3	Kết luận và khuyến nghị (2 điểm)			
	Có bảng so sánh đối chiếu số liệu trước và sau khi thực hiện các giải pháp	1	1	Có so sánh đối chiếu
	Khẳng định được hiệu quả mà SKKN mang lại.	0.5	0,5	Kết quả tốt
	Khuyến nghị và đề xuất với các cấp quản lý về các vấn đề có liên quan đến việc áp dụng và phổ biến SKKN	0.5	0,5	Đề xuất đề SKKN được sử dụng
	TỔNG ĐIỂM		1,9	

Đánh giá chung (Ghi tóm tắt những đánh giá chính):

SKKN đúng quy định, thực hiện chưa hoàn thiện.
 Áp dụng tốt vào việc bồi dưỡng học sinh giỏi.
 Không đúng chính xác.

Xếp loại :...A.....

Xếp loại A: Từ 17 đến 20 điểm
 Xếp loại B : Từ 14 đến <17 điểm
 Xếp loại C : Từ 10 đến <14 điểm
 Không xếp loại: < 10 điểm

Ngày 17 tháng 4 năm 2022

Người chấm 1
 (Ký, ghi rõ họ tên)

[Signature]
 Nguyễn Thị Mai Liên

Người chấm 2
 (Ký, ghi rõ họ tên)

[Signature]
 Nguyễn Thị Thu Hằng

Thủ trưởng đơn vị



HIỆU TRƯỞNG

[Signature]
 Nguyễn Thị Nhàn Huyền

1.MỤC LỤC

2. ĐẶT VẤN ĐỀ	1
2.1. Lí do chọn đề tài	1
2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu.....	2
3. TỔNG QUAN.....	2
3.1. Đối tượng, thời gian nghiên cứu.....	2
3.2 Phạm vi nghiên cứu:.....	2
4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU	2
5. PHẦN NỘI DUNG:	3
CHƯƠNG I: Kiến thức cơ sở	3
CHƯƠNG II: Kỹ thuật dồn biến trong các bài toán bất đẳng thức.....	5
1. Vận dụng kỹ thuật dồn biến đối với bất đẳng thức có 3 biến mà cực trị đạt được đối xứng.	5
2. Vận dụng kỹ thuật dồn biến đối với bất đẳng thức có 4 biến.....	8
3. Vận dụng kỹ thuật dồn biến bằng phương pháp hàm số:	10
4. Vận dụng kỹ thuật dồn biến trong các bất đẳng thức lượng giác.....	13
5. Vận dụng kỹ thuật dồn biến giải các đề thi học sinh giỏi	14
6. KẾT LUẬN	23
7. KIẾN NGHỊ VÀ ĐỀ XUẤT :	24

Các cụm từ thường viết tắt:

GTLN – Giá trị lớn nhất, GTNN – Giá trị nhỏ nhất, HS - Học sinh,
HSG – học sinh giỏi, BĐT – Bất đẳng thức.

2. ĐẶT VẤN ĐỀ**2.1. Lí do chọn đề tài**

Trong quá trình giảng dạy, song hành với việc truyền đạt tới học sinh kiến thức cơ bản, Giáo viên cần phải củng cố và nâng cao thêm cho học sinh để học sinh nắm sâu hơn các kiến thức đó. Một trong những yêu cầu không thể thiếu được đối với các trường Phổ thông là phải xây dựng các nhân tố để chọn ra đội tuyển cho từng môn học, bồi dưỡng thường xuyên cho Học sinh để các con có đầy đủ kiến thức tham gia các kỳ thi Học sinh giỏi của các Cụm trường cũng như các kì thi chọn đội tuyển học sinh giỏi hàng năm do Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội tổ chức.

Toán học là môn khoa học cơ bản nên việc dạy Toán trong trường phổ thông phải giúp học sinh nắm được kiến thức cơ bản, trọng tâm của bộ môn, mối quan hệ giữa Toán học và các môn khoa học khác để vận dụng các quy luật Toán học vào thực tiễn đời sống.

Trong các cuộc thi Học sinh giỏi và ở kì thi THPT Quốc gia, luôn có các bài toán về chứng minh Bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức. Đây là bài toán khó, nếu học sinh sử dụng các phép biến đổi thông thường thì thường không giải được hoặc nếu được sẽ rất cồng kềnh. Nhất là trong các cuộc thi cấp Thành phố do Sở Giáo dục tổ chức. Trong các cuộc thi này, học sinh tham dự là học sinh lớp 12, các con đã có một công cụ rất mạnh đó là sử dụng phương pháp “Dồn biến”. Đây là một công cụ rất tốt nhằm đơn giản hóa các bài toán trong việc loại bớt các biến nhằm giúp học sinh giả quyết bài toán theo chiều hướng đơn giản hơn.

Do đó, tôi chọn đề tài ***“Kỹ thuật Dồn biến trong các bài toán Bất đẳng thức”*** nhằm mục đích cung cấp cho Giáo viên cũng như Học sinh một số kinh nghiệm trong việc sử dụng kiến thức Toán học để khai thác bài chứng minh Bất đẳng thức hay tìm GTLN, GTNN của một biểu thức.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Giúp học sinh nâng cao kỹ năng phân tích, ứng dụng Toán học để sử dụng phương pháp Dồn biến để giải quyết các bài toán về Bất đẳng thức hay tìm GTLN, GTNN của một biểu thức. Nhằm đáp ứng một phần kỹ năng vận dụng giải toán Toán học của HS trong các kỳ Học sinh giỏi và câu khó trong kỳ thi THPT Quốc Gia.

3. TỔNG QUAN

3.1. Đối tượng, thời gian nghiên cứu

- Học sinh trung học phổ thông từ các năm học trước đến nay và giáo viên giảng dạy bộ môn Toán.
- Chương trình Toán học THPT bám sát đề thi của kỳ thi HSG hàng năm.

3.2 Phạm vi nghiên cứu:

-Trong năm học 2021 - 2022, tôi vẫn tiếp tục bám sát và giảng dạy cho học sinh khối 12 nắm vững việc giải quyết các bài toán. Thực tế trong các cuộc thi HSG cấp Thành phố môn toán năm vừa qua, có 2 học sinh trong đội tuyển Toán của trường đoạt giải, có học sinh lọt vào vòng 2 mặc dù đối tượng đầu vào của trường không phải là học sinh mũi nhọn của Thành Phố. Trong cuộc thi Học sinh giỏi Cụm: Đội tuyển Toán của trường có 13/14 học sinh dự thi đạt giải cao (2 giải nhất, 6 giải nhì, 4 giải 3 và 1 khuyến khích)

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

- Nghiên cứu lí luận về dạy học bài tập Toán.
- Nghiên cứu chương trình Toán học THPT.
- Tìm hiểu, đọc, phân tích, tổng hợp các tài liệu trên mạng internet, sách tham khảo.
- Tổng hợp từ kinh nghiệm giảng dạy của bản thân và học hỏi kinh nghiệm giảng dạy của các đồng nghiệp trong các đợt tập huấn chuyên môn, bồi dưỡng thay sách giáo khoa.
- Lựa chọn các dạng bài tập phù hợp với nội dung, kiến thức của đề tài.

5. PHẦN NỘI DUNG:

Chương 1: Kiến thức cơ sở

Chương 2: Kỹ thuật Dồn biến trong các bài toán Bất đẳng thức

NỘI DUNG ĐỀ TÀI

CHƯƠNG I: Kiến thức cơ sở

Rất nhiều trong số các Bất đẳng thức (BĐT) trong chương trình Phổ thông đã gặp có dấu đẳng thức khi các biến số bằng nhau (Ví dụ kinh điển là Bất đẳng thức Cauchy). Tuy nhiên, trong trường hợp Bất đẳng thức không xảy ra dấu bằng khi tất cả các biến bằng nhau mà chỉ có một số biến bằng nhau (thay vì tất cả) như trong các Ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho $x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Thì: $2(x + y + z) - xyz \leq 10$.

Trong Bất đẳng thức này, dấu “=” xảy ra khi $x = y = 2$ còn $z = 1$ (và các hoán vị).

Ví dụ 2 (Jackgarfukel): Cho a, b, c là 3 số thực không âm và có tối đa 1 số bằng 0. Thì ta luôn có: $\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$

Ở đây, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 3b > 0, c = 0$ (và các hoán vị).

Trong các Bất đẳng thức mà ta gặp, có trường hợp dấu “=” xảy ra ở tất cả các biến bằng nhau ta gọi là Cực trị đạt tại tâm, trường hợp đạt tại một số biến bằng nhau ta gọi là Cực trị đạt được có tính đối xứng, trường hợp một biến có giá trị trên biên thì gọi là Cực trị tại biên. Phương pháp Dồn biến được đặt ra để giải quyết các Bất đẳng thức có dạng như trên. Ý tưởng chung là: Nếu ta đưa được về trường hợp có hai biến bằng nhau, hoặc một biến có giá trị tại biên thì số biến sẽ giảm đi. Do đó Bất đẳng thức mới sẽ đơn giản hơn, đặc biệt nếu bất đẳng thức mới chỉ còn 1 biến thì bằng cách khảo sát hàm số một biến ta sẽ chứng minh bất đẳng thức khá đơn giản. Chính vì tư tưởng là giảm dần số biến nên phương pháp này gọi là phương pháp Dồn biến.

Trong phạm vi của đề tài, tôi sử dụng 5 định lý cơ bản sau của hàm số.

ĐỊNH LÝ 1: Cho D đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục. Thì f đạt giá trị nhỏ nhất trên D , nghĩa là tồn tại $x_0 \in D$ sao cho: $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in D$.

Định lý 1 là mở rộng của một kết quả quen thuộc trong Sách giáo khoa. Về mặt trực giác thì Định lý 1 khá rõ ràng. Tuy nhiên, học sinh sẽ khó hình dung được vấn đề dồn biến. Định lý 2 sẽ là chìa khóa cho vấn đề dồn biến

ĐỊNH LÝ 2: Cho D là một tập đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$; Δ là một tập con đóng của D .

$T: D \rightarrow D$ là phép biến đổi bất kì. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục thỏa mãn $f(x) > f(T(x)) \forall x \in D \setminus \Delta$. Thì ta có GTNN của f đạt được trên Δ .

Trong nhiều trường hợp có thể hàm f không đủ tốt và ta sẽ chỉ có điều kiện $f(x) \geq f(T(x))$ thì khi đó không thể áp dụng Định lý 1 được. Một đòi hỏi thực tế là phép biến đổi T phải đủ tốt để bù lại. Điều này ta đưa đến:

ĐỊNH LÝ 3: Cho D là một tập đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$; Δ là một tập con đóng của D .

$T: D \rightarrow D$ là phép biến đổi sao cho tồn tại một hàm số h liên tục và thỏa mãn $h(T(x)) < h(x), \forall x \in D \setminus \Delta$.

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục thỏa mãn $f(x) \geq f(T(x)) \forall x \in D$. Thì ta có GTNN của f đạt được trên Δ .

Áp dụng các Định lý trên, ta có thể vận dụng linh hoạt để giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức hay tìm GTLN, GTNN của một biểu thức. Trong quá trình bồi dưỡng học sinh giỏi, tôi đã khai thác phương pháp tương đối hiệu quả, giúp học sinh nắm vững và giải quyết bài toán trên một cách hiệu quả. Sau đây là các bài toán có thể vận dụng phương pháp hàm số để giải.

CHƯƠNG II: Kỹ thuật dồn biến trong các bài toán bất đẳng thức

1. Vận dụng kỹ thuật dồn biến đối với bất đẳng thức có 3 biến mà cực trị đạt được đối xứng.

Trong các kỳ thi đại học, nhất là thi Học sinh Giải, nếu có bài toán bất đẳng thức thì cũng không nằm ngoài các bất đẳng thức đối xứng hay hoán vị. Mà nếu thế thì sử dụng phương pháp dồn biến sau đây sẽ cực kỳ hiệu quả.

Phương pháp dồn biến (mixing variable) được khái quát theo 2 bước chính. Giả sử ta cần chứng minh $f(x, y, z) \geq 0$ (nếu không thì ngược lại), với x, y, z là 3 biến số thực thỏa mãn các tính chất nào đấy.

Bước 1(Kỹ thuật dồn về 2 biến bằng nhau)

Đánh giá $f(x, y, z) \geq f(x, t, t)$ với t là một biến mới sao cho bộ số (x, t, t) thỏa mãn tính chất của bộ số (x, y, z) .

Thông thường ta hay đặt t là các đại lượng trung bình để không làm mất đi các

tính chất cho trước, chẳng hạn $t = \frac{x+y}{2}$, $t = \sqrt{xy}$, $t = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$,

Bước 2. Đánh giá $f(x, t, t) \geq 0$,

Phương pháp chúng tôi đề cập đến chỉ ngắn gọn như thế, việc khó nhất của chúng ta là đánh giá $f(x, y, z) \geq f(x, t, t)$. Điều đó sử dụng nhiều kỹ thuật, chứ ở bước thứ 2 hầu hết là đơn giản vì chúng ta đã hạn chế còn lại chỉ 2 biến số.

Bài toán chúng ta cần khai thác có dạng $f(x, y, z) \geq 0$ với x, y, z là các biến số thực thỏa mãn một tính chất nào đấy. Điều chúng ta mong muốn là sẽ đánh giá $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$ với t là một đại lượng thích hợp tùy theo mối liên hệ giữa x, y, z (ta sẽ gọi đây là kỹ thuật dồn về 2 biến bằng nhau). Lưu ý rằng nếu các biến đã được chuẩn hóa thì bước cuối cùng chỉ còn 1 biến. Ta xét các ví dụ cơ bản nhất sau đây:

Ví dụ 1: Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn điều kiện $x(x + y + z) = 3yz$, ta có $(x + y)^3 + (y + z)^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \leq 5(y + z)^3$

(Đề thi Đại học khối A năm 2009)

Hướng dẫn giải:

Đây là một đề toán rất gần đây, không ít người cho rằng đây là bài toán dễ, nó được đông đảo người mê toán bất đẳng thức sôi nổi đưa ra các đáp án khác nhau và có nhiều lời giải hay.

Sau đây là cách giải sử dụng kỹ thuật dồn biên

Đặt $f(x, y, z) = VT - VP$

Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy rằng có hai biên có vai trò như nhau là y và z , và thấy được dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$ nên đặt $t = \frac{y + z}{2}$

Khi đó theo giả thiết $x(x + y + z) = 3yz$ nên $\frac{3}{4}(y + z)^2 = 3t^2$

Vì vậy $(x + t)^2 \leq (2t)^2$. Suy ra $x \leq t$ (1)

Ta có:

$$f(x, t, t) = 2(x + t)^3 + 6t(x + t)^2 - 5(y + z)^3$$

Vậy ta có:

$$f(x, y, z) - f(x, t, t) = (x + z)^3 + (x + y)^2 - 2(x + t)^3 - 6t(y - z)^3$$

Xét hàm số

$$g(x) = (x + z)^3 + (x + y)^3 - 2(x + t)^3 - 6t(y - z)^2$$

Khảo sát hàm $g(x)$ ta chứng minh được $g(x) \leq 0$

Do đó $f(x, y, z) - f(x, t, t) \leq 0$

Phương pháp dồn biên chỉ còn lại việc đánh giá biểu thức hai biến số

$$f(x, t, t) = 2(x + t)^3 + 6t(x + t)^2 - 40t^3 \leq 0 \text{ với } x \leq t$$

Bài toán đã quá đơn giản đối với học sinh.

Sau đây tôi vừa đưa ra một bất đẳng thức khó mà theo chúng tôi nó rất đặc trưng cho phương pháp chúng tôi đề cập đến:

Ví dụ 2: (Bất đẳng thức Côsi cho 3 số)

Giả sử x, y, z là 3 số thực không âm. Khi đó, $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$

Hướng dẫn giải:

Vì BĐT là đồng bậc nên có thể giả sử $x + y + z = 1$ (*)

Bước 1: Viết lại bài toán dưới dạng $f(x, y, z) \geq 0$ với $f(x, y, z) = 1 - 27xyz$

Bước 2: Thay x và y bởi $t = \frac{x+y}{2}$ thì điều kiện (*) vẫn bảo toàn

(tức là $t + t + z = 1$) nên ta chỉ cần phải xem xét sự thay đổi của xyz .

Bước 3: Ta có $xy \leq t^2$ nên $xyz \leq t^2z$. Vậy $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$

Bước 4: Do $z = 1 - 2t$ nên ta có:

$$f(t, t, z) = 1 - 27t^2z = 1 - 27t^2(1 - 2t) = (1 + 6t)(1 - 3t)^2 \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y$ và $3t = 1$ nghĩa là $x = y = z$

Nhận xét: Ta có thể chuẩn hóa theo cách khác, chẳng hạn giả sử $xyz = 1$ và chứng minh $f(x, y, z) \geq 0$ với $f(x, y, z) = x + y + z - 3$. Khi đó bước dồn biến sẽ là chứng minh $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$ với $t = \sqrt{xy}$.

Ví dụ 3: (Bất đẳng thức Schur) Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Xét } f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2(b + c) - b^2(c + a) - c^2(a + b)$$

Đặt $t = \frac{a+b}{2}$; ta hy vọng $f(a, b, c) \geq f(a, t, t)$. Xét:

$$d = f(a, b, c) - f(a, t, t) = [b + c - \frac{5}{4}a](b - c)^2$$

Ta thấy với a, b, c là các số không âm thì không chắc có d không âm. Tuy nhiên nếu giả sử a là số nhỏ nhất trong 3 số a, b, c thì vẫn có d không âm. Khi đó

chỉ còn phải chứng minh $f(a, t, t) \geq 0$. Nhưng Bất đẳng thức này tương đương với $a(a - t)^2 \geq 0$ nên hiển nhiên là đúng. Bài toán chứng minh xong.

Nhận xét: Nếu trong Bất đẳng thức mà 3 biến là đối xứng thì ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$ (hoặc ngược lại) còn trong trường hợp 3 biến hoán vị vòng quanh thì giả sử a là giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) trong 3 biến đó

Trên đây chúng tôi vừa đưa ra một bất đẳng thức khó mà theo chúng tôi nó rất đặc trưng cho phương pháp chúng tôi đề cập đến:

2. Vận dụng kỹ thuật dồn biến đối với bất đẳng thức có 4 biến.

Khi gặp bài toán có 4 biến thì ta có thể dồn biến theo từng cặp, và có thể chứng minh ngay được bài toán. Đối với những bài toán phức tạp thì thường ta chỉ dồn được 1 cặp nhờ thứ tự sắp được giữa các biến. Sau khi dồn được 2 biến bằng nhau thì ta chưa có ngay Bất đẳng thức 1 biến mà phải qua một bất đẳng thức trung gian. Tuy nhiên các Bất đẳng thức trung gian này thường dễ để chứng minh trực tiếp hoặc đánh giá quy về 1 biến. Chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 1: (IMO SL: Việt Nam đề nghị)

Cho $a, b, c, d \geq 0$ và $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng:

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176abcd}{27}$$

Hướng dẫn giải:

Đặt $f(x) = abc + bcd + cda + dab - kabcd$ với $k = \frac{1}{27}$. Ta có:

$$f(a, b, c, d) = ab(c + d - kcd) + cd(a + b)$$

Ta hy vọng có $f(a, b, c, d) \leq f(t, t, c, d)$ với $t = \frac{a+b}{2}$

Vì $0 \leq ab \leq t^2$ nên để có điều này ta cần có $c + d - kcd \geq 0$. Ở đây rất may mắn là nếu có điều này có điều ngược lại, nghĩa là $c + d - kcd < 0$ thì Bất đẳng thức hiển nhiên đúng, vì:

$$f(a, b, c, d) = ab(c + d - kcd) + cd(a + b) \leq cd(a + b) \leq \left(\frac{c+d+(a+b)}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

Vậy ta có thể giả sử $f(a, b, c, d) \leq f\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}; c; d\right)$. Nhờ có tính đối xứng ta có thể dồn 2 biến bất kì về 4 biến bằng nhau. Từ đó ta đặt thêm $s = \frac{c+d}{2}$. Vậy:

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &\leq f(t, t, c, d) = f(t, s, t, s) \leq f\left(\frac{t+s}{2}; \frac{t+s}{2}; t; s\right) \\ &\leq f\left(\frac{t+s}{2}; \frac{t+s}{2}; \frac{t+s}{2}; \frac{t+s}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{27} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Nhận xét: Trong lời giải trên; thực chất là cứ mỗi bước ta lại phân ra 2 trường hợp: có một trường hợp thì dồn biến được, và một trường hợp Bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Do đó để lời giải không phức tạp chúng ta có thể trình bày lại bằng phản chứng. Hay nói một cách khác, gộp cả 2 trường hợp là:

$$f(a, b, c, d) \leq \max\left\{\frac{1}{27}; f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right)\right\}$$

Ví dụ 2: Cho $a, b, c, d \geq 0$ và $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng:

$$abc + bcd + cda + dab + (abc)^2 + (bcd)^2 + (cda)^2 + (dab)^2 \leq 8$$

Hướng dẫn giải:

Đặt $f(a, b, c, d) = VT$. Ta có:

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right) - f(a, b, c, d) \\ &= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 (c+d) + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + ab\right] (c^2 + d^2) - \frac{(a-b)^2}{2} c^2 d^2 \\ &\geq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 (c+d + 4abcd - 2c^2 d^2) \end{aligned}$$

Vậy nếu $c + d + 4abcd \geq 2c^2 d^2$ thì $f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right) \geq f(a, b, c, d)$.

Giả sử $a \geq b \geq c \geq d$ thì theo trên ta có $f(x, x, c, d) \geq f(a, b, c, d)$ với $x = \frac{a+b}{2}$

Tương tự, Xét : $f\left(x, x, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) - f(x, x, c, d)$

Nếu $2x + 4x^2cd \geq 2x^4$ thì $f\left(x, x, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \geq f(x, x, c, d)$ và ta chỉ cần chứng minh $f(x, x, y, y) \leq 8$ với $x + y = 2$. Điều này đơn giản.

Nếu $2x + 4x^2cd < 2x^4$ thì ta đánh giá tiếp $2xcd + 4x^2c^2d^2 \leq 2x^4$ nên:

$$\begin{aligned} f(x, x, c, d) &= x^2(c + d) + 2xcd + 2x^2c^2d^2 + x^4(c^2 + d^2) \\ &\geq x^2(c + d) + x^4(c + d)^2 \end{aligned}$$

Do $x^2(c + d) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^2$ nên $f(x, x, c, d) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^6 < 8$. Ví dụ đã được chứng minh xong.

3. Vận dụng kỹ thuật dồn biến bằng phương pháp hàm số:

Đây là một kỹ thuật rất quan trọng trong phương pháp dồn biến. Trong các đề thi Học sinh giỏi Toán lớp 12 của Thành phố Hà Nội rất hay có dạng này. Trước hết ý tưởng của phương pháp này là: để chứng minh $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$ với $t = \frac{x+y}{2}$, ta xét hàm số $g(s) = f(x, t + s, t - s)$ với $s \geq 0$. Sau đó chứng minh g tăng với $s \geq 0$, suy ra $g(s) \geq g(0)$, $s \geq 0$. Ta xem xét một số ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho $k > 0$ và a, b, c là các số không âm và chỉ có tối đa 1 số bằng 0.

Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{a}{b+c}\right)^k \geq \min\left\{2, \frac{3}{2^k}\right\} \quad (*)$$

Hướng dẫn giải:

Không mất tính tổng quát giả sử $a + b + c = 1$ và $b \geq c \geq a$. Đặt $t = \frac{x+y}{2}$ và $m = \frac{b-c}{2}$ suy ra $b = t + m$, $c = t - m$, $a = 1 - 2t$. Khi đó vế trái của Bất đẳng thức

$$\text{là: } f(m) = \left(\frac{1-2t}{2t}\right)^k + \left(\frac{t+m}{1-t-m}\right)^k + \left(\frac{t-m}{1+m-t}\right)^k$$

Vì $c \geq a$ nên $3t - 1 \geq m \geq 0$ và $1 \geq b + c = 2t$ nên $1 \geq 2t \geq \frac{2}{3}$

Ta sẽ khảo sát hàm số $f(m)$ trên $m \in [0; 3t - 1]$; với $t \in [\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$ là hằng số

$$\text{Ta có: } f'(m) = \frac{k(t+m)^{k-1}}{(1-t-m)^{k+1}} - \frac{k(t-m)^{k-1}}{(1-t+m)^{k+1}}$$

$$\rightarrow f'(m) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{k(t+m)^{k-1}}{(1-t-m)^{k+1}} \geq \frac{k(t-m)^{k-1}}{(1-t+m)^{k+1}}$$

$$\Leftrightarrow g(m) = [\ln(t-m) - \ln(t+m) - \frac{k+1}{1-k} \left[\frac{1}{1-t-m} + \frac{1}{1-t+m} \right]] \geq 0 \quad (1)$$

Dùng phương pháp hàm số dùng chứng minh được $g'(m)$ luôn dương nên $g(m)$ đồng biến. Vậy $g(m) \geq g(0) = 0$, suy ra $f'(m) \geq 0$ hay $f(m) \geq f(0)$

Cuối cùng, ta cần chứng minh $h(t) = f(0) \geq 2$. Thật vậy:

$$h(t) = \left(\frac{1-2t}{2t}\right)^k + 2\left(\frac{t}{1-t}\right)^k \text{ với } t \in [0; \frac{1}{3}]$$

$$\text{Ta có } h'(t) \leq 0 \Leftrightarrow 2^{k+1}t^{2k} \leq [(1-t)(1-2t)]^{k-1} \quad (2)$$

Trong bất đẳng thức cuối, vế trái là hàm đồng biến theo t và vế phải là hàm nghịch biến nên để chứng minh (2) ta cần:

$$2^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \leq \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right)\right]^{k-1}$$

Bất đẳng thức này đúng nên suy ra $h(t) \geq h\left(\frac{1}{3}\right) = 2$

Nhận xét: Trường hợp $k = 1$ thì Bất đẳng thức trên chính là bất đẳng thức Netbit

Ví dụ 2: Cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} + \frac{ca}{3+b^2}$$

Hướng dẫn giải:

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $a = t + s$, $b = s - t$. Khi đó về trái của Bất đẳng thức là: $f(m) = \frac{c(s-t)}{3+(s+t)^2} + \frac{c(s+t)}{3+(s-t)^2} + \frac{s^2-t^2}{3+c^2}$

Ta sẽ khảo sát hàm số $f(m)$ trên $m \in [0; s - c]$; ta có:

$$\begin{aligned} f'(m) &= \frac{-c}{3+(s+t)^2} - \frac{2c(s^2-t^2)}{3+(s-t)^2} + \frac{c}{3+(s-t)^2} + \frac{2c(s^2-t^2)}{(3+(s-t)^2)^2} \\ &\quad - \frac{2t}{3+c^2} = \frac{4cst}{uv} + \frac{8cst(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2} - \frac{2t}{3+c^2} \end{aligned}$$

Với $u = 3 + (s + t)^2$, $v = 3 + (s - t)^2$. Vậy với mọi t thì:

$$f(t) \leq f(0) = \frac{2cs}{3+s^2} + \frac{s^2}{3+c^2} = \frac{2s(3-2s)}{3+s^2} + \frac{s^2}{3+(3-2s)^2} = g(s) \quad (1)$$

Xét hàm $g(s)$ với $s \in [1; \frac{1}{2}]$. Ta có:

$$g'(s) = \frac{24s - 12s^2}{(3+(3-2s)^2)^2} + \frac{18 - 24s - 6s^2}{(3+s^2)^2}$$

Dễ thấy, $s^2 - 3s + 4 > 0$ nên $g'(s)$ dương trên $(1; s_0)$ và âm trên $(s_0; \frac{1}{3})$.

$$\text{Rõ ràng: } g(s) \leq g(s_0) = \frac{11\sqrt{33}-45}{24} \quad (2)$$

Trong (1) và (2) dấu “=” xảy ra đồng thời tại $t = 0$ và $s_0 = s$,

tức là: $a = b = s_0$; $c = 3 - 2s_0$.

$$\text{Vậy GTLN cần tìm là } P = \frac{11\sqrt{33}-45}{24}$$

4. Vận dụng kỹ thuật dồn biến trong các bất đẳng thức lượng giác

Bất đẳng thức lượng giác trong tam giác cũng là bất đẳng thức ba biến. Trong các đề thi đại học rất ít ra nhưng ở đây chúng tôi cũng đưa ra một bài để minh họa cho sức mạnh của phương pháp dồn biến trong dạng bất đẳng thức này:

Ví dụ : Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = (1 + \cos^2 A) (1 + \cos^2 B) (1 + \cos^2 C)$$

Hướng dẫn giải:

Kí hiệu: $f(A, B, C) = (1 + \cos^2 A) (1 + \cos^2 B) (1 + \cos^2 C)$

Vì vai trò của A, B, C như nhau nên ta có thể giả sử $C = \min \{A, B, C\}$

Và ký hiệu $t = \frac{A+B}{2}$, khi đó $0 \leq C \leq \frac{\pi}{3}$ (*)

Ta có $f(t, t, C) = (1 + \cos^2 t)^2 (1 + \cos^2 C)$

Suy ra

$$f(A, B, C) - f(t, t, C) = (1 + \cos^2 C)[(1 + \cos^2 A) (1 + \cos^2 B) - (1 + \cos^2 t)]$$

Ta có

$$f(A, B, C) - f(t, t, C) = (1 + \cos^2 C)[(1 + \cos^2 A) (1 + \cos^2 B) - (1 + \cos^2 t)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos^2 A) (1 + \cos^2 B) - (1 + \cos^2 t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos^2 A) (1 + \cos^2 B) - (1 + \cos^2 \frac{A+B}{2}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \frac{A-B}{2} [\cos C - \cos(A-B) - 1] \geq 0 \quad (1)$$

Từ (*) ta có: $6\cos C - \cos(A-B) - 1 \geq 3 - 1 - 1 > 0$ suy ra (1) đúng.

Vậy $f(A, B, C) \geq f(t, t, C)$

Vấn đề còn lại của chúng ta là tìm giá trị nhỏ nhất của $f(t, t, C)$. Đến đây, học sinh tìm dễ dàng được:

$$f(t, t, C) = \frac{1}{4} \cdot (3 - \cos C)^2 (1 + \cos^2 C)$$

Dễ thấy $f(t, t, C) \geq \frac{125}{64}$. Suy ra $f(A, B, C) \geq \frac{125}{64}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(A, B, C)$ là $\frac{125}{64}$ khi tam giác ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Trong trường hợp 3 biến, có các Bất đẳng thức quen thuộc với học sinh, chẳng hạn như: Trong tam giác ABC ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Bất đẳng thức (1) có thể thu được ngay bằng cách áp dụng Bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi. Bất đẳng thức (2) phải xét hàm $f(x) = -\cos x$. Thế thì $f'(x) = \sin x$ nên chỉ lồi trên $[0; \pi]$. Do đó ta không thể áp dụng Bất đẳng thức Jensen cho 3 biến A, B, C. Tuy nhiên ta có thể giải sử $A \leq B \leq C$ và khi đó thì A, B đều thuộc $[0; \pi]$ nên ta có thể dồn 2 biến A, B về bằng nhau. Sau đó bài toán chỉ còn 1 biến và trở nên đơn giản.

Như vậy, tư tưởng dồn biến đã lộ rõ. Thay vì mong muốn có ngay 1 biến toàn cục, chúng ta hy vọng có thể từng bước đơn giản bài toán bằng cách giảm dần số biến. Đây chính là tư tưởng chính của phương pháp Dồn biến. Trong trường hợp 3 biến, sau khi thực hiện các động tác dồn biến (bất kể là về 2 biến bằng nhau; dồn 1 biến ra biên hay dồn 1 biến về giá trị trung bình) thì bài toán gần như chỉ còn 1 biến và xem như giải quyết đơn giản. Do đó, phép dồn biến không cần tác dụng với 2 biến bất kì mà có thể tận dụng thứ tự sắp được giữa các biến nếu Bất đẳng thức đã cho là đối xứng.

5. Vận dụng kỹ thuật dồn biến giải các đề thi học sinh giỏi

Trong khuôn khổ của SKKN này, tôi đã trình bày sơ lược kỹ năng vận dụng phương pháp dồn biến để chứng minh các Bất đẳng thức hoặc tìm Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức. Bên cạnh đó, tôi đưa ra một số Bài tập cơ bản đã được ra trong các kì thi HSG của Thành Phố Hà Nội và Quốc Gia qua các năm học trước đây để minh họa cho phương pháp này.

Bài 1: Cho a, b, c là ba số dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 1}} - \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Hướng dẫn giải:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} = \frac{1}{2}[(a+b)^2 + (c+1)^2] \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$$

$$(a+1)(b+1)(c+1) \leq \left(\frac{a+1+b+1+c+1}{3}\right)^3 = \left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3$$

$$\text{Vậy } P \leq \frac{2}{a+b+c+1} - \frac{54}{(a+b+c+3)^3} = \frac{2}{t} - \frac{54}{(t+2)^3} = f(t)$$

$$\text{với } t = a+b+c+1 \quad (t > 1)$$

$$f'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{162}{(t+2)^4}; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 1 (\text{loại}) \end{cases}$$

Lập Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ ta sẽ tìm được giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{4}$

$$\text{khi } \begin{cases} a+b+c=3 \\ a=b=c \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$$

Bài 2: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + 2 - 3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right)$. Tìm giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x-y)^2 \left(\frac{x^2}{y^4} + \frac{y^2}{x^4} - \frac{3}{xy}\right)$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Từ giả thiết ta có } 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = (x+y) + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 2 \geq 2\sqrt{3(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)} + 2$$

$$3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2\sqrt{3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6} + 2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq \frac{10}{3}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi}$$

$$\begin{cases} x+y=3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, y=1 \\ x=1, y=3 \end{cases}$$

$$P = (x^2 - 2xy + y^2)\left(\frac{x^2}{y^4} + \frac{y^2}{x^4} - \frac{3}{xy}\right) = \left(\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4}\right) - 2\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) + \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6$$

Đặt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t$, ta có $t \geq \frac{10}{3}$ và $P = t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 3t + 6$

Đặt $f(t) = t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 3t + 6, \quad t \geq \frac{10}{3}$

$$f'(t) = 4t^3 - 6t^2 - 6t + 3 = 2t^2(t-3) + 2t(t^2-3) + 3 > 0 \quad \text{với } t \geq \frac{10}{3}$$

Do đó $f(t) \geq f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{2596}{81}$, có “=” khi $t = \frac{10}{3}$ hay $\begin{cases} x=3, y=1 \\ x=1, y=3 \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $\frac{2596}{81}$

Bài 3: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xyz=4 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất và

nhỏ nhất của biểu thức $F = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b) = (a+b+c)^3 - 3(a+b)c(a+b+c) - 3ab(a+b)$

$$= (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) \quad (*)$$

Sử dụng (*) ta có: $F = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)$

$$= \left(\frac{xy + yz + zx}{xyz}\right)^3 - 3\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x^2y^2z^2} = \frac{1}{64}(xy + yz + zx)^3 - \frac{3}{16}(6-x)(6-y)(6-z)$$

Ta có $(6-x)(6-y)(6-z) = 216 - 36(x+y+z) + 6(xy + yz + zx) - xyz$

$= 6(xy + yz + zx) - 4$. Suy ra $F = \frac{1}{64}(xy + yz + zx)^3 - \frac{9}{8}(xy + yz + zx) + \frac{3}{4}$

Từ giả thiết ta có
$$\begin{cases} y+z=6-x \\ yz=\frac{4}{x} \end{cases}$$

Do đó y, z là nghiệm của phương trình bậc 2: $a^2 - (6-x)a + \frac{4}{x} = 0$ (*)

Vì $y, z > 0$ nên (*) có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow 4 - 2\sqrt{3} \leq x \leq 4$

Đặt $t = x(y+z) + yz = x(6-x) + \frac{4}{x}$

Xem t là một hàm số ẩn x trên $[4-2\sqrt{3}; 4]$.

Ta có $t'(x) = 0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=1+\sqrt{3}$.

Lại có $t(1) = t(4) = 9$ và $t(1+\sqrt{3}) = t(4-2\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \Rightarrow 9 \leq t \leq 6\sqrt{3}$

$t = 9$ chẳng hạn khi $x=4, y=z=1$;

$t = 6\sqrt{3}$ chẳng hạn khi $x=4-2\sqrt{3}, y=z=1+\sqrt{3}$; Ta có $F = \frac{1}{64}t^3 - \frac{9}{8}t + \frac{3}{4} = f(t)$

$f'(t) = \frac{3}{64}t^2 - \frac{9}{8} > 0 \forall t \in [9; 6\sqrt{3}]$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[9; 6\sqrt{3}]$

Do đó $\frac{129}{64} \leq F \leq \frac{27\sqrt{3}+6}{8}$. Suy ra GTLN của F là $\frac{129}{64}$; GTNN của F là $\frac{27\sqrt{3}+6}{8}$.

Bài 4: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh

rằng:
$$\frac{2}{3+ab+bc+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{6} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq 1$$

Hướng dẫn giải:

Đặt : $P = \frac{2}{3+ab+bc+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{6} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$

Áp dụng bất đẳng thức: $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ta có:

$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 9abc > 0 \Rightarrow ab+bc+ca \geq 3\sqrt{abc}$

Ta có: $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3 \forall a, b, c > 0$. Thật vậy:

$$\begin{aligned} (1+a)(1+b)(1+c) &= 1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc \\ &\geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{(abc)^2} + abc = (1+\sqrt[3]{abc})^3 \end{aligned}$$

Khi đó: $P \leq \frac{2}{3(1+\sqrt{abc})} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}} + \frac{\sqrt{abc}}{6}$

Đặt: $\sqrt[6]{abc} = t \Rightarrow \sqrt[3]{abc} = t^2, \sqrt{abc} = t^3.$

Vì $a, b, c > 0$ nên $0 < abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1 \Rightarrow 0 < t \leq 1$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2}{3(1+t^3)} + \frac{t^2}{1+t^2} + \frac{1}{6}t^3, t \in (0; 1]$

$\Rightarrow f'(t) = \frac{2t(t-1)(t^5-1)}{(1+t^3)^2(1+t^2)^2} + \frac{1}{2}t^2 > 0 \forall t \in (0; 1]$

Do hàm số đồng biến trên $(0; 1]$ nên $f(t) \leq f(1) = 1 \Rightarrow P \leq 1.$

$\Rightarrow \frac{2}{3+ab+bc+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{6} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq 1$. Dấu '=' xảy ra khi

$a=b=c=1.$

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

Hướng dẫn giải:

Theo BĐT B.C.S ta có: $a+b+c+2 \leq \sqrt{4(a^2+b^2+c^2+4)}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c+2) \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2+4}$$

Theo BĐT Cô-si ta có:

$$\begin{aligned} 3(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} &\leq (3a+3b) \cdot \left(\frac{a+b+4c}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{4(a+b+c)}{2} \right]^2 = 2(a+b+c)^2 \end{aligned}$$

Vậy $T \leq \frac{8}{a+b+c+2} - \frac{27}{2(a+b+c)^2}$

$$\text{Đặt } t = a + b + c ; (t > 0) \Rightarrow T \leq \frac{8}{t+2} - \frac{27}{2t^2} = f(t)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{8}{t+2} - \frac{27}{2t^2}, (t > 0) \quad f'(t) = -\frac{8}{(t+2)^2} + \frac{27}{t^3}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{(t+2)^2} = \frac{27}{t^3} \Leftrightarrow 8t^3 - 27(t+2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

$$\text{Từ BBT ta có } T \leq f(t) \leq f(6) = \frac{5}{8}; \text{ Vậy } \max T = \frac{5}{8} \text{ xảy ra khi } a = b = c = 2$$

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \forall xy \neq 0$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad (|t| \geq 2) \quad A = (t^2 - 2)^2 + t^2 - 2 + t - 2 = t^4 - 5t^2 + t + 4$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = A. \quad f'(t) = 4t^3 - 10t + 1$$

$$f''(t) = 12t^2 - 10 \geq 0 \quad \forall |t| \geq 2 \quad \text{Nên hàm số } f'(t) \text{ đồng biến}$$

$$\forall t \geq 2 \Rightarrow f'(t) \geq f'(2) = 13 > 0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến} \Rightarrow f(t) \geq f(2) = 2 \quad \forall t \geq 2$$

$$\forall t \leq -2 \Rightarrow f'(t) \leq f'(-2) = -3 < 0 \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến}$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(-2) = -2 \quad \forall t \leq -2$$

Vậy $f(t) \geq -2 \quad \forall |t| \geq 2$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là $A_{\min} = -2$ đạt được khi $t = -2$ hay $(x + y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -y$.

Bài 7: Cho ba số thực dương a, b, c . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 1}} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Hướng dẫn giải:

Theo bất Cô-si ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(c+1)^2 \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$$

$$\text{và } (a+1)(b+1)(c+1) \leq \left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3$$

$$\text{Do đó } P \leq \frac{1}{a+b+c+1} - \frac{27}{(a+b+c+3)^3} \text{ đặt } t = a+b+c+1 \Rightarrow t > 1.$$

$$\text{Ta có } P \leq \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}, t \in (1; +\infty)$. Vẽ bảng biến thiên của hàm số này trên

$(1; +\infty)$ ta có $\max f(t) = f(4) = \frac{1}{8}$. Từ đó $P \leq \frac{1}{8}$ và dấu đẳng thức xảy ra khi

$$a = b = c = 1.$$

Bài 8: Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq a + \frac{1}{2} \cdot \frac{a+4b}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{a+4b+16c}{3} = \frac{4}{3}(a+b+c).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4b = 16c$.

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{3}{2(a+b+c)} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

$$\text{Đặt } t = a+b+c, t > 0. \text{ Khi đó ta có: } P \geq \frac{3}{2t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{3}{2t} - \frac{3}{\sqrt{t}} \text{ với } t > 0 \text{ ta có } f'(t) = \frac{3}{2t\sqrt{t}} - \frac{3}{2t^2}.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2t\sqrt{t}} - \frac{3}{2t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Do đó : $P \geq \frac{(3-z)^4 + 64z^4}{8}$. Xét $f(z) = (3-z)^4 + 64z^4$ với $z \in (0; 3)$

$$\Rightarrow f'(z) = 4 \cdot 64z^3 - 4(3-z)^3 = 4(4z-3+z)[4^2z^2 + 4z(3-z) + (3-z)^2]$$

$$\Rightarrow f'(z) = 0 \Leftrightarrow 4z - 3 + z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3}{5} \in (0; 3)$$

Lập BBT. $f(z)$ nhỏ nhất khi $z = \frac{3}{5} \Rightarrow P \geq \frac{f(z)}{8} \geq \min_{0 < z < 3} \frac{f(z)}{8} = \frac{3^4 2^3}{5^3} = \frac{648}{125}$

Mặt khác khi $x = y = \frac{6}{5}; z = \frac{3}{5}$ thì $P = \frac{648}{125}$. Kết luận: GTNN của P là $\frac{648}{125}$

Bài 9: Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1; 4]$ và $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$

Hướng dẫn giải:

Với a và b dương, $ab \geq 1$, ta luôn có $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ (*).

Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow (a+b+2)(1+\sqrt{ab}) \geq 2(1+a)(1+b)$

$\Leftrightarrow (a+b)\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} \geq a+b+2ab \Leftrightarrow (\sqrt{ab}-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$, luôn đúng với a và b dương, $ab \geq 1$.

Đẳng thức xảy ra, khi và chỉ khi $ab=1$ hoặc $a=b$.

Với x và y thuộc đoạn $[1; 4]$ và $x \geq y$ (tức $x \cdot \frac{1}{y} \geq 1$), ta có

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}} \geq \frac{1}{2+3 \cdot \frac{y}{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{z}{y} = \frac{x}{z}$ hoặc $\frac{x}{y} = 1$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$ thì $t \in [1; 2]$. Khi đó $P \geq \frac{t^2}{2t^2 + 3} + \frac{2}{1+t} = f(t)$.

Ta có $f(1) = \frac{6}{5}$ và $f(2) = \frac{34}{33}$. Ta sẽ chỉ ra $f(t) \geq f(2)$.

$$\text{Thật vậy, } f(t) - \frac{34}{33} = \left(\frac{t^2}{2t^2 + 3} - \frac{4}{11} \right) + \left(\frac{2}{1+t} - \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{(2-t)(35t^2 - 27t + 48)}{33(t+1)(2t^2 + 3)} \geq 0, \forall t \in [1; 2] \text{ hay } f(t) \geq \frac{34}{33}, \forall t \in [1; 2].$$

Đẳng thức xảy ra khi $t = 2$ (khi đó $\frac{x}{y} = 4 \Leftrightarrow x = 4, y = 1$).

Suy ra $P \geq \frac{34}{33}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 4, y = 1$ và $z = 2$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{34}{33}$

Qua nghiên cứu trên tôi thấy phương pháp dồn biến là phương pháp mạnh và hiệu quả cho việc chứng minh bất đẳng thức. Phương pháp này là phương pháp hiện đại, mặc dù có vẻ hơi xa lạ cho các em học sinh, xong giáo viên chỉ cần dạy cho các em nắm được ý tưởng của phương pháp này là khi giải các bài toán bất đẳng thức nếu ta đưa được về trường hợp có hai biến bằng nhau hoặc là một biến có giá trị tại biên, thì số biến sẽ giảm đi. Do đó bất đẳng thức mới đơn giản hơn bất đẳng thức ban đầu, đặc biệt nếu bất đẳng thức mới chỉ còn một biến thì bằng cách khảo sát hàm số một biến số ta sẽ chứng minh bất đẳng thức khá đơn giản. Chính vì tư tưởng là giảm dần số biến nên phương pháp này được gọi là phương pháp dồn biến. Nếu các em học sinh nắm được bản chất của phương pháp và vận dụng kiến thức đã học trong chương trình phổ thông thì các em sẽ làm tốt các bài toán bất đẳng thức trong các kì thi đại học và thi Học sinh giỏi.

6. KẾT LUẬN

Trên đây, tôi trình bày một số ví dụ áp dụng kỹ năng vận dụng phương pháp dồn biến để giải quyết bài toán Bất đẳng thức hay tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một biểu thức. Nhìn chung, đây là một dạng toán hay nhưng cũng tương đối khó khăn trong việc phát hiện ra dấu hiệu áp dụng và giải đối với nhiều học sinh. Để học sinh làm tốt các bài toán dạng này giáo viên cần cho HS rèn luyện nhiều, đồng thời cần phân tích dấu hiệu áp dụng đối với mỗi bài toán để tập cho HS cách nhìn nhận, phân tích các bài toán khác. Tuy nhiên, do quỹ thời gian và kiến thức còn hạn chế nên đề tài trên có thể có khiếm khuyết, tôi rất mong nhận được sự góp ý của đồng nghiệp để tôi có thể nhìn nhận và hoàn thiện hơn kiến thức của mình, nâng cao chất lượng giảng dạy bộ môn.

Với những ví dụ tôi đã đưa ra trong đề tài SKKN chủ yếu là các dạng bài trong các đề thi HSG lớp 12. Vấn đề còn lại là chúng ta có kịp nhận ra và vận dụng toán để giải quyết vấn đề đó hay không mà thôi. Đến lúc này tôi muốn khẳng định một điều rằng : toán học rất trừu tượng và khó, vì vậy Giáo viên cần cố gắng đơn giản hóa bài toán, cho học sinh nắm vững các dạng toán giúp Học sinh vận dụng để giải được kết quả tối ưu. Qua thực nghiệm sư phạm tôi thấy rằng học sinh phổ thông cũng đã rất nhạy bén trong vận dụng nếu Giáo viên đưa ra các dạng toán cụ thể. Sau một thời gian cùng Tổ nhóm chuyên môn ứng dụng chuyên đề này vào giảng dạy, đội tuyển HSG của trường luôn là một trong các trường có số lượng học sinh đoạt giải cao nhất trong Cụm. Bên cạnh đó, tôi cũng khảo sát qua các năm dạy đội tuyển lớp 12 tôi cũng thu được kết quả tốt ở lần làm sau:

Năm học	Số học sinh tham gia thi HSG cấp Thành phố	Đoạt giải	
		Số lượng	Tỷ lệ
2017 - 2018	3	1	33,33 %
2018 - 2019	3	2	66,66 %

2019 - 2020	3	2	66,66 %
2019 - 2020	3	3	100 %

Mặc dù đã rất cố gắng trong quá trình tìm tòi và nghiên cứu, nhưng do hạn chế về mặt về mặt năng lực và thời gian nên những trình bày trong khóa luận không tránh khỏi những thiếu sót, việc khai thác đề tài chắc chắn chưa hoàn thiện triệt để.

7. KIẾN NGHỊ VÀ ĐỀ XUẤT :

Đề nghị các cấp lãnh đạo tạo điều kiện giúp đỡ học sinh và giáo viên có nhiều hơn nữa tài liệu sách tham khảo đổi mới và phòng thư viện để nghiên cứu học tập nâng cao kiến thức chuyên môn nghiệp vụ. Nhà trường cần tổ chức các bồi trao đổi phương pháp giảng dạy. Có tủ sách lưu lại các tài liệu chuyên đề bồi dưỡng ôn tập của giáo viên hàng năm để làm cơ sở nghiên cứu phát triển chuyên đề.

Trong nghiên cứu của tôi, không thể nói là cách sử dụng phương pháp dồn biến sẽ ngắn gọn hơn hay là dễ hiểu hơn. Song mục đích của tôi là sử dụng một phương pháp chung, phương pháp dồn biến cho tất cả các bài toán bất đẳng thức trong các kì thi đại học mà chúng tôi đề cập đến.

Đề tài nghiên cứu sẽ giúp giáo viên và học sinh có một tài liệu tiếp cận với phương pháp dồn biến, một phương pháp mới để giải tốt các bài toán bất đẳng thức. Do thời gian và khả năng có hạn nên đề tài không tránh khỏi những thiếu sót, rất mong có những ý kiến đóng góp quý báu của các đồng nghiệp.

Xin chân thành cảm ơn!