

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT SÓC SƠN

.....✪.....



SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP KHÁI QUÁT HÓA, ĐẶC
BIỆT HÓA VÀ TƯƠNG TỰ HÓA QUA CHỦ ĐỀ BẤT
ĐẲNG THỨC COSI

Lĩnh vực/ Môn:	Toán học
Cấp học:	THPT
Tên tác giả:	Đỗ Duy Giang
Đơn vị công tác:	Trường THPT Sóc Sơn
Chức vụ:	Giáo viên

Năm học : 2019 - 2020

MỤC LỤC

A. ĐẶT VẤN ĐỀ

1. Lời mở đầu	02
2. Lý do chọn đề tài	02
3. Mục đích nghiên cứu	02
4. Đối tượng nghiên cứu	02

B. THỰC TRẠNG CÁC VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

1. Thực trạng	03
2. Kết quả của thực trạng	03

C. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

1. Giải pháp	04
2. Nội dung	04
2.1. Lý thuyết cơ bản	04
2.2. Các kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức cosi	05
2.2.1. Kỹ thuật 1 phân tích số mũ	05
2.2.2. Kỹ thuật 2: nhân hằng số	08
2.2.3. Kỹ thuật 3: Kiểm tra dấu bằng	09
2.2.4. Kỹ thuật 3: Kiểm tra dấu bằng	11

D. CÁC BIỆN PHÁP TỔ CHỨC THỰC HIỆN

1. Hình thức tổ chức	12
2. Hình thức nghiên cứu	13
3. Hình thức nghiên cứu	13

A. ĐẶT VẤN ĐỀ

1. Lời mở đầu

Do sự phát triển nhanh , mạnh với tốc độ bùng nổ của khoa học công nghệ thể hiện qua các lý thuyết , các thành tựu mới và khả năng ứng dụng cao, rộng và nhanh vào thực tế buộc ngành giáo dục cần phải đổi mới về chương trình giáo dục và phương pháp dạy học. mà nhiều chuyên gia giáo dục đã khuyến cáo : ”phải đổi mới giáo dục, nhằm khắc phục lối truyền thụ một chiều , rèn luyện nếp tư duy sáng tạo của người học, đảm bảo điều kiện và thời gian tự học, tự nghiên cứu nhằm phát huy hết “Năng lực của học sinh”

Để bồi dưỡng tư duy năng lực , tư duy độc lập , tư duy sáng tạo của học sinh , trước tiên phải trang bị cho các kiến thức cơ bản phổ thông vững chắc ,có khả năng giải các bài tập . Muốn vậy người giáo viên phải vận dụng các phương pháp khác nhau , hướng các em vào một môi trường hoạt động tích cực , xem học tập là một quá trình khám phá liên tục.Học tập phải thực sự là nhu cầu , mang đậm tính tự giác, chủ động và sáng tạo của học sinh. Người thầy giáo phải giúp học sinh xem xét một bài toán dưới nhiều góc độ khác nhau, kích thích sự liên tưởng ,kết nối giữa dữ kiện và yêu cầu của bài toán .Giữa bài toán chưa biết cách giải với bài toán đã biết cách giải . biết phân tích, tổng hợp ,và so sánh các trường hợp riêng lẻ để đem đến cái chung nhất mang tính chân lý.Từ đó vận dụng các phương pháp toán học để giải quyết các bài toán đặt ra.

2. Lý do chọn đề tài

Trong quá trình giảng dạy môn toán ở trường THPT tôi nhận thấy rằng trình độ học tập của học sinh là rất khác nhau , mức độ khả năng tiếp thu bài học của các e cũng có khoảng cách đáng kể.Trước tình hình thực tế tôi cũng có những suy nghĩ làm thế nào để học sinh khá giỏi không xem thường kiến thức sách giao khoa ,các e học sinh trung bình và yếu lại không e ngại sự chậm hiểu hay khó với cùng một đơn vị kiến thức . Người giáo viên cần tạo ra một không khí làm việc tập thể , dần dà cho các em học sinh cảm thấy nhu cầu làm việc trong giờ học , từ đó tạo ra hứng thú học tập một cách tự giác và phát huy hết năng lực của mọi học sinh. Đó là lý do tôi chọn đề tài sáng kiến kinh nghiệm

“Sử dụng phương pháp khái quát hóa ,đặc biệt hóa và tương tự hóa qua chủ đề bất đẳng thức cosi ”

3. Mục đích nghiên cứu

Rèn luyện tính tích cực chủ động sáng tạo của học sinh

Rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh.

4. Đối tượng nghiên cứu : “Sử dụng phương pháp khái quát hóa ,đặc biệt hóa và tương tự hóa qua chủ đề bất đẳng thức cosi ”

B. THỰC TRẠNG CÁC VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

1. Thực trạng

Sau nhiều năm giảng dạy môn Toán ở trường THPT, tôi thấy còn nhiều bất cập, nhất là chất lượng, hiệu quả đồng đều chưa cao, trình độ kiến thức kỹ năng thực hành, phương pháp tư duy khoa học... đa số các em còn chưa cao. Có nhiều nguyên nhân dẫn tới tình trạng trên như: tư duy giải toán kém, không phát huy được tính tư duy sáng tạo của mình, học tập thụ động, đối phó “học để đi thi”. Nhưng theo tôi nguyên nhân lớn nhất là do học sinh mất căn bản về phương pháp và kiến thức, hơn nữa lại thiếu cố gắng trong học tập, học tập đối phó, chưa có ý thức học tập một cách tích cực, chủ động phát hiện và giải quyết vấn đề.. Đây chính là điều nhiều giáo viên băn khoăn, suy nghĩ. Từ những nguyên nhân này dẫn tới các tình trạng như:

1.1 Tiếp thu kiến thức chưa nhanh, vận dụng kiến thức vào giải toán còn chậm.

1.2 Việc chuẩn bị bài ở nhà của nhiều học sinh còn mang tính chất đối phó, không chịu nghiên cứu làm bài tập là giở sách giải hoặc tra mạng internet.

1.3 Trong giờ kiểm tra nhiều học sinh không chịu tư duy mà có tư tưởng chép bài của bạn khá giỏi.

1.4 Định hướng cho lời giải chưa rõ ràng.

1.5 Nhiều học sinh không chịu tìm tòi nghiên cứu tài liệu môn toán để nâng cao kiến thức của mình.

2. Kết quả của thực trạng

Sau khi học nhiều học sinh rất nhanh quên kiến thức.

Một số học sinh còn chưa hứng thú với học tập môn toán vì còn tập trung vào các môn thi đại học các khối không thi môn toán.

Chưa thành thực kỹ năng, ứng dụng vào giải toán.

Là giáo viên đang trực tiếp giảng dạy môn toán ở trường THPT tôi đã và sẽ tiếp tục mạnh dạn cải tiến nội dung phương pháp dạy học theo hướng phát triển năng lực cho học sinh thông qua tiết tự chọn “Sử dụng phương pháp khái quát hóa, đặc biệt hóa và tương tự hóa cho học sinh qua chủ đề ứng dụng bất đẳng thức cosin”. Tôi thấy học sinh tích cực chủ động phát hiện vấn đề và tự giải quyết vấn đề, phát triển tư duy logic, tính chủ động sáng tạo của mình. Dần hình thành phương pháp học tập phát triển từ bài toán cơ bản dẫn đến bài toán khó hơn.

C. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

1. Giải pháp

Qua các bài toán đơn giản trong chương trình , học sinh đã giải được , tôi đã gợi ý cho học sinh tư duy theo phương pháp như : tương tự , so sánh, đặc biệt hóa , khái quát hóa , ... để học sinh vận dụng vào các bài toán khó hơn, các bài toán thuộc chuyên đề , phát hiện , phát biểu nên những vấn đề mới , những bài toán mới. Tăng cường các hoạt động tìm tòi, quan sát ...tăng cường sử dụng phương pháp qui nạp trong quá trình đi đến các giả thiết có tính khái quát.

Trong các tiết luyện tập , tiết học tự chọn tôi thường khuyến khích học sinh tìm nhiều lời giải khác nhau của một bài toán, so sánh các cách giải để chọn cách làm tối ưu nhất , chính vì vậy mà đòi hỏi học sinh phải chuyển từ thao tác trí tuệ này sang thao tác trí tuệ khác một cách nhuần nhuyễn hơn.

Học sinh được phát triển tư duy thuật giải trong quá trình làm toán một cách linh hoạt và khả năng sáng tạo dựa trên các nguyên tắc :

+ Các biện pháp phải thể hiện rõ ý tưởng tích cực học tập của học sinh.

+ Hệ thống các biện pháp phải mang tính khả thi, thực hiện tốt nội dung chương trình sách giáo khoa và phù hợp với đối tượng học sinh , điều kiện thực tế của trường , đảm bảo tính vừa sức chung và riêng .

+ Trong quá trình thực hiện cần đảm bảo sự thống nhất vai trò chủ đạo của thầy với vai trò tích cực độc lập của học sinh.

2. NỘI DUNG

2.1. Lý thuyết cơ bản

a. Bất đẳng thức cosi

+) Khi $n = 2$: Cho $x, y \geq 0$. Khi đó ta có:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad (1)$$

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Dấu “=” Xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

+) Khi $n = 3$: Cho $x, y, z \geq 0$. Khi đó ta có:

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \quad (1)$$

$$xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \quad (2)$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

b. Bất đẳng thức cosi cho n số không âm

Cho n số không âm $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$. Khi đó ta có :

+) Dạng 1: $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$. (1)

+) Dạng 2: $x_1 x_2 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^n$. (2)

Dấu “=” xảy ra khi $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

c. Chú ý

Dạng 1 được sử dụng chuyển từ tổng sang tích, thường dùng để làm giảm số mũ của các số hạng.

Dạng 2 được sử dụng chuyển từ tích sang tổng, thường dùng để làm tăng số mũ của các số hạng.

Khi áp dụng bất đẳng thức cosi phải kiểm tra điều kiện không âm của các số hạng tham gia vào bất đẳng thức cosi.

Đối với các bất đẳng thức có dấu “=” bắt buộc chỉ ra dấu “=” xảy ra khi nào. Nhưng nếu dễ dàng tìm được dấu “=” thì ta nên chỉ ra “=” xảy ra.

2.2. Các kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức cosi

2.2.1. Kỹ thuật 1 phân tích số mũ

a) Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho $a, b, c \geq 0$. CMR:

a. $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.

b. $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$

Đi tìm đường lối giải và giải bài toán:

Trong 3 số hạng ở vế phải a^2b, b^2c, c^2a nếu ta xét riêng số hạng a^2b số mũ của a gấp đôi số mũ của b

Từ nhận xét này, ta đưa đến suy nghĩ: Để tạo được số hạng a^2b cần 2 số hạng a^3 và 1 số hạng b^3 và ta đi đến lời giải sau:

Ta có: $a^3 + a^3 + b^3 \overset{\text{Cosi}}{\geq} 3\sqrt[3]{a^3 a^3 b^3} = 3a^2b \Rightarrow 2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$

Tương tự ta có: $2b^3 + c^3 \geq 3b^2c, 2c^3 + a^3 \geq 3c^2a$.

$\Rightarrow 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$ (đpcm).

Dấu “=” xảy ra khi $\Leftrightarrow a = b = c$.

b. Tương tự phép chứng minh câu a, nhờ quá trình phân tích số mũ của số hạng $a^2\sqrt{bc}$, các em học sinh cũng đạt được lời giải sau:

$$\text{Ta có : } a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + b^3 + c^3 \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 6\sqrt[6]{a^{12}b^3c^3} = 6a^2\sqrt{bc}$$

$$\Rightarrow 4a^3 + b^3 + c^3 \geq 6a^2\sqrt{bc}$$

$$\text{Tương tự ta có: } 4b^3 + c^3 + a^3 \geq 6b^2\sqrt{ca}, \quad 4c^3 + a^3 + b^3 \geq 6c^2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow 6(a^3 + b^3 + c^3) \geq 6(a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab})$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab} \text{ (đpcm).}$$

Dấu '=' xảy ra ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 2: Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$\text{a. } \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{d^2} + \frac{d^3}{a^2} \geq a + b + c + d.$$

$$\text{b. } \frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{d^3} + \frac{d^2}{a^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Đi tìm đường lối giải và giải bài toán:

a. trong vế trái và vế phải của bài toán, ta xét số hạng $\frac{a^3}{b^2}$ và nhận xét các số mũ của a ta thấy:

+) Từ số mũ của a là 3, muốn biến đổi về số mũ 1 của a phải đúng côsi cho 3 số

+) hai số còn lại tham gia vào BĐT côsi phải làm mất b^2 ở mẫu nên mỗi số là b

Từ đó ta đi đến lời giải bài toán:

$$\text{Ta có: } \frac{a^3}{b^2} + b + b \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2} \cdot b \cdot b} = 3a \Rightarrow \frac{a^3}{b^2} \geq 3a - 2b.$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b^3}{c^2} \geq 3b - 2c, \quad \frac{c^3}{d^2} \geq 3c - 2d, \quad \frac{d^3}{a^2} \geq 3d - 2a.$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{d^2} + \frac{d^3}{a^2} \geq a + b + c + d \text{ (đpcm)} \quad \text{Dấu "=" xảy ra khi } a = b = c = d.$$

b. Tương tự phép chứng minh câu a, nhờ quá trình phân tích số mũ của số hạng $\frac{a^2}{b^3}, \frac{1}{b}$ thì học sinh cũng có lời giải.

b) Một số yếu tố có thể khai thác để rèn luyện khái quát hóa , đặc biệt hóa , tương tự hóa cho học sinh qua các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$a. a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

$$b. a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}.$$

Nếu quan sát kỹ số mũ của mỗi số hạng có nhận xét: tổng số mũ của mỗi hạng tử đều bằng nhau:

+) Trong câu a tổng số mũ của mỗi hạng tử đều bằng 3

+) Trong câu b tổng số mũ của mỗi hạng tử của 2 vế đều bằng 3

Từ nhận xét ta có thể phát hiện hoặc dự đoán một số bài toán tổng quát như:

Cho $a, b, c \geq 0$. Khi đó :

$$1. a^n + b^n + c^n \geq a^{n-1}b + b^{n-1}c + c^{n-1}a$$

$$2. a^n + b^n + c^n \geq a^{n-1}\sqrt{bc} + b^{n-1}\sqrt{ca} + c^{n-1}\sqrt{ab}$$

$$3. a^n + b^n + c^n \geq a^{n-1}\sqrt[3]{bc^2} + b^{n-1}\sqrt[3]{ca^2} + c^{n-1}\sqrt[3]{ab^2}$$

$$4. a^n + b^n + c^n \geq a^{n-2}b^2 + b^{n-2}c^2 + c^{n-2}a^2$$

Ví dụ 2: Cho $a, b, c, d > 0$. CMR

$$a. \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{d^2} + \frac{d^3}{a^2} \geq a + b + c + d.$$

$$b. \frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{d^3} + \frac{d^2}{a^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Nếu quan sát kỹ số mũ của mỗi số hạng có nhận xét:

+) Số mũ của a, b, c, d đều bằng 1.

+) Số mũ của tử và của mẫu của vế trái hơn kém nhau 1 đơn vị đúng bằng số mũ của a, b, c, d . ở vế phải.

Từ nhận xét ta có thể phát hiện hoặc dự đoán một số bài toán tổng quát như:

$$\text{Cho } a, b, c, d > 0. \text{ Khi đó ta có : } \frac{a^{n+1}}{b^n} + \frac{b^{n+1}}{c^n} + \frac{c^{n+1}}{d^n} + \frac{d^{n+1}}{a^n} \geq a + b + c + d$$

$$\frac{a^n}{b^{n+1}} + \frac{b^n}{c^{n+1}} + \frac{c^n}{d^{n+1}} + \frac{d^n}{a^{n+1}} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

Đặc biệt hóa kết quả này , ta thu kết quả như sau:

$$\frac{a^{2016}}{b^{2015}} + \frac{b^{2016}}{c^{2015}} + \frac{c^{2016}}{d^{2015}} + \frac{d^{2016}}{a^{2015}} \geq a + b + c + d$$

$$\frac{a^{2015}}{b^{2016}} + \frac{b^{2015}}{c^{2016}} + \frac{c^{2015}}{d^{2016}} + \frac{d^{2015}}{a^{2016}} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

2.2.2. Kỹ thuật 2: nhân hằng số

a) Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho $0 \leq x \leq 1$. CMR: a. $x^2(1-x) \leq \frac{4}{27}$ b. $x(1-x)^2 \leq \frac{4}{27}$

Đi tìm đường lối giải toán

a. Trong vế trái số mũ của x là 2, số mũ của $1-x$ là 1 mà trong BĐT cosi, ban đầu thì số mũ của các hạng tử bằng nhau

từ nhận xét ta tách $x^2(1-x) = x.x.(1-x)$. Đến đây ta sử dụng BĐT cosi từ nhận xét này, ta đi đến lời giải sau:

Ta có : $VT = x.x.(1-x) = \frac{1}{2}[x.x.(2-2x)] \stackrel{\text{Cosi}}{\leq} \frac{1}{2}\left(\frac{x+x+2-2x}{3}\right)^3 = \frac{4}{27} \text{ đpcm).$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

b. Tương tự phép chứng minh câu a

b) Một số yếu tố có thể khai thác để rèn luyện khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự hóa cho học sinh.

Ví dụ 2 : Cho $0 \leq x \leq 1$. CMR: a. $x^2(1-x) \leq \frac{4}{27}$ b. $x(1-x)^2 \leq \frac{4}{27}$

Bài toán này có 2 nhân tử x và $1-x$, dấu của x trong hai nhân tử này trái ngược nhau. Do đó ta giải được bài toán này nhờ việc phân tích số mũ, đưa về số mũ 1 và việc điều chỉnh các hệ số thích hợp để tạo ra tổng không đổi. Từ đặc điểm này của bài toán, nhờ quá trình suy nghĩ tương tự, ta có thể yêu cầu học sinh phát hiện dự đoán một số bài toán tổng quát như : Cho $0 \leq x \leq 1$ CMR:

1. $x^n(1-x) \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

2. $x(1-x)^n \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

3. $x^m(1-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$

Tương tự các bài toán này, ta có thể yêu cầu học sinh giải các bài toán sau: Cho $0 \leq x \leq 1$ CMR:

$$1. (1-x)^3 \sqrt{x} \leq \frac{3}{4\sqrt{4}}$$

$$2. x^3 \sqrt{1-x} \leq \frac{3}{4\sqrt{4}}$$

2.2. 3. Kỹ thuật 3 : Kiểm tra dấu bằng

Kỹ thuật này dựa trên ý tưởng : Nếu dấu “=” ở BĐT ban đầu xảy ra tại điểm x_0 thì thường dấu “=” ở các BĐT trung gian cũng xảy ra tại điểm x_0 . Do đó một số bài toán nhằm trước dấu “=” xảy ra ở BĐT ban đầu, sau đó điều chỉnh dấu “=” xảy ra ở các BĐT trung gian theo dấu “=” vừa nhằm được.

a) Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. CMR:

$$a. a^3 + b^3 + c^3 \geq 3.$$

$$b. \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \leq 3.$$

Đi tìm đường lối giải và giải bài toán:

a. Trong bài toán phải chứng minh số mũ của a, b, c , là 3. Trong giả thiết $a + b + c = 3$ số mũ của a, b, c là 1 có nhận xét:

+) Từ số mũ 3, muốn đưa về số mũ 1 ta áp dụng BĐT côsi.

+) Hai hằng số còn lại tham gia vào BĐT côsi phải thỏa mãn điều kiện dấu “=” xảy ra ở BĐT ban đầu.

$$\text{Ta có: } a^3 + 1 + 1 \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 3\sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1} = 3a \Rightarrow a^3 \geq 3a - 2.$$

$$\text{Tương tự: } b^3 \geq 3b - 2, c^3 \geq 3c - 2.$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3(a + b + c) - 6 = 3 \cdot 3 - 6 = 3 \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$.

b. Xét $\sqrt[3]{a}$ Trong vế trái và a trong giả thiết có nhận xét:

+) Từ $\sqrt[3]{a}$ muốn đưa được về a phải dùng côsi cho 3 số.

+) hai số còn lại cho thêm $\sqrt[3]{a}$ phải thỏa mãn điều kiện xảy ra của BĐT $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2: Cho $a, b, c > 0$. CMR

$$a. \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 + \left(\frac{c}{a}\right)^3 \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

$$b. \frac{a^3}{b^3} + b^3 + \frac{1}{a^3} \geq \frac{a}{b} + b + \frac{1}{a}.$$

b) Một số yếu tố có thể khai thác để rèn luyện khái quát hóa , đặc biệt hóa, tương tự hóa cho học sinh

Ví dụ 1 : Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=3$. CMR:

$$a. a^3+b^3+c^3 \geq 3. \quad b. \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \leq 3.$$

Nhờ việc phân tích số mũ ta định hướng được phải sử dụng BĐT côsi cho bao nhiêu số .Nhờ kĩ thuật kiểm tra dấu “=” ta tìm được các số hạng tham gia vào BĐT côsi. Từ đặc điểm này nhờ phương pháp tương tự ,ta yêu cầu học sinh phát hiện hoặc dự đoán một số bài toán tổng quát như

+) Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=3$. CMR:

$$1. a^n+b^n+c^n \geq 3. \quad 2. \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} \leq 3.$$

+) Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$1. a^n + b^n + c^n \geq \frac{1}{3^{n-1}}. \quad 2. \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{3^{n-1}}.$$

Đặc biệt hóa kết quả này , ta thu được kết quả

Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$1. a^{1945} + b^{1945} + c^{1945} \geq 3. \quad 2. \sqrt[1975]{a} + \sqrt[1975]{b} + \sqrt[1975]{c} \leq 3.$$

Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$1. a^{2006} + b^{2006} + c^{2006} \geq \frac{1}{3^{2005}}. \quad 2. \sqrt[2006]{a} + \sqrt[2006]{b} + \sqrt[2006]{c} \leq \sqrt[2006]{3^{2005}}.$$

Cho $x+y+z=0$. Chứng minh : $8^x+8^y+8^z \geq 2^x+2^y+2^z$

Ví dụ 2: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$a. \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 + \left(\frac{c}{a}\right)^3 \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

$$b. \frac{a^3}{b^3} + b^3 + \frac{1}{a^3} \geq \frac{a}{b} + b + \frac{1}{a}.$$

Việc khái quát hóa và đặc biệt hóa tương tự cách tư duy ở ví dụ 1 ta được kết quả: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$1. \left(\frac{a}{b}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n + \left(\frac{c}{a}\right)^n \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

$$2. \left(\frac{a}{b}\right)^{1979} + \left(\frac{b}{c}\right)^{1979} + \left(\frac{c}{a}\right)^{1979} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

$$3. \left(\frac{a}{b}\right)^{1975} + \left(\frac{b}{c}\right)^{1975} + \left(\frac{c}{a}\right)^{1975} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^{1945} + \left(\frac{b}{c}\right)^{1945} + \left(\frac{c}{a}\right)^{1945}.$$

c) Một số yếu tố có thể khai thác để rèn luyện khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự hóa cho học sinh

Ví dụ: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 + \left(\frac{c}{a}\right)^3 \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$

Từ bài toán này giúp học sinh phát hiện ra bài toán tổng quát cùng với trường hợp đặc biệt như: Cho $a, b, c > 0$. CMR:

$$1. \left(\frac{a}{b}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n + \left(\frac{c}{a}\right)^n \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

$$2. \frac{a^3}{b^3} + b^3 + \frac{1}{a^3} \geq \frac{b}{a} + a + \frac{1}{b}$$

2.4. Kỹ thuật 4: Đổi biến số:

2.4.1: Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Bài giải

$$\text{Đặt } x=b+c>0, \quad y=c+a>0, \quad z=a+b>0 \quad \Rightarrow x+y+z=2(a+b+c)$$

$$\Rightarrow a+b+c = \frac{x+y+z}{2} \Rightarrow a = \frac{y+z-x}{2}, \quad b = \frac{x+z-y}{2}, \quad c = \frac{x+y-z}{2}$$

Bất đẳng thức(1) trở thành:

$$\frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 6 \quad (2)$$

$$\text{VT}(2) \geq 6 \overset{\text{Cosi}}{\sqrt[6]{\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z}}} = 6 = \text{VP}(2) \Rightarrow \quad (2) \text{ luôn đúng.}$$

Vậy (1) được chứng minh.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC chứng minh rằng.

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3 \quad (1)$$

Bài giải

Đặt $x=b+c-a>0$, $y=c+a-b>0$, $z=a+b-c>0 \Rightarrow x+y+z=a+b+c$

$$\Rightarrow a = \frac{y+z}{2}, b = \frac{z+x}{2}, c = \frac{x+y}{2} \quad \text{Bất đẳng thức(1) trở thành}$$

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 6 \quad (2)$$

Có
$$VT(2) \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 6 \sqrt[6]{\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z}} = 6 = VP(2) \Rightarrow (2) \text{ luôn đúng.}$$

Vậy (1) được chứng minh

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC .CMR:

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq a+b+c \quad (1)$$

Bài giải

Đặt $x=b+c-a>0$, $y=c+a-b>0$, $z=a+b-c>0 \Rightarrow x+y+z=a+b+c$

$$\Rightarrow a = \frac{y+z}{2}, b = \frac{z+x}{2}, c = \frac{x+y}{2}$$

Bất đẳng thức (1)trở thành:

$$\frac{(y+z)^2}{4x} + \frac{(z+x)^2}{4y} + \frac{(x+y)^2}{4z} \geq x+y+z \quad (2)$$

$$VT(2) \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} \frac{(2\sqrt{yz})^2}{4x} + \frac{(2\sqrt{zx})^2}{4y} + \frac{(2\sqrt{xy})^2}{4z} = \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \right) \stackrel{\text{Cosi}}{\geq}$$

$$\geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{\frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}} + \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{\frac{zx}{y} \cdot \frac{xy}{z}} + \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x}} =$$

$$= x+y+z = VP(2) \Rightarrow (2) \text{ đúng} \Rightarrow ĐPCM.$$

2.4.2 Nhận xét :

Trong bài các toán đầu, mẫu số phức tạp hơn tử số nên bài toán ở tình thế khó biến đổi đại số .Sau khi biến đổi trạng thái của bài toán đã đảo ngược nên ta có thể thực hiện các phép biến đổi đại số.

D. CÁC BIỆN PHÁP TỔ CHỨC THỰC HIỆN

1. Hình thức tổ chức

Thực hiện trong phạm vi một số buổi chữa bài tập của các buổi chính khóa với các bài tập ở mức độ vừa phải.

Thầy giáo đưa ra hệ thống bài tập gợi ý phương pháp giải

Cho học sinh hoạt động nhóm thảo luận đưa ra các cách giải khác nhau và trình bày ý tưởng, thảo luận phát hiện những vấn đề xung quanh bài toán ở mức độ đơn giản..

Thầy giáo nhận xét và kết luận .

Đối với học sinh khá ,giỏi với nhưng bài toán ở mức độ khó hơn.

2. Hình thức nghiên cứu

Hình thức nghiên cứu các bài toán theo nhóm có sự hướng dẫn của giáo viên. Hình thức này cũng cần thực hiện liên tục trong quá trình học tập của học sinh làm cho khả năng tư duy sáng tạo của học sinh ngày càng được nâng lên.

3. Kết quả

Qua khảo sát các em học sinh của 2 lớp 10A7& 10D6 năm học 2017-2018 . Lớp 10A7 dạy theo đổi mới ,còn 10D6 vẫn thực hiện theo cách truyền thống

Lớp Câu	10 D6 sĩ số 41 năm học 2017-2018)							
	Đạt 9-10 điểm		Đạt 7-8 điểm		Đạt 5-6 điểm		Đạt 0-5 điểm	
	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
1	8	19.5	10	24.4	20	48.8	3	7.3
Lớp Câu	10A7 sĩ số 41 năm học 2017-2018							
	Đạt 9-10 điểm		Đạt 7-8 điểm		Đạt 5-6 điểm		Đạt 0-5 điểm	
	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
1	28	63.6	10	22.7	4	9	2	4.5

Lời kết: Những khai thác rất nhỏ của mà tôi trình bày ở trên đây có thể chưa thực sự đầy đủ. Song bài viết này tôi mong muốn được chia sẻ cùng đồng nghiệp nhưng suy nghĩ, trăn trở của mình về việc dùng phương pháp để truyền tải những kiến thức toán học cho học sinh, rèn luyện cho học sinh kỹ năng giải toán, rèn luyện tư duy logic và tính sáng tạo của học sinh dựa trên nguyên tắc tương tự hóa, khái quát hóa, đặc biệt hóa để giải một lớp các bài toán.

Vì điều kiện thời gian cũng như năng lực còn hạn chế nên bài viết không thể tránh được những thiếu sót , rất mong quý thầy cô góp ý để bài viết tốt hơn, xin trân trọng cảm ơn.

Sóc Sơn, ngày 27 tháng 04 năm 2020

Người viết

Đỗ Duy Giang
