

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT SÓC SƠN
..........



SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

*RÈN LUYỆN KỸ NĂNG
TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ
CHO HỌC SINH LỚP 12 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG*

Lĩnh vực/ Môn:	Toán học
Cấp học:	THPT
Tên tác giả:	Đoàn Trường
Đơn vị công tác:	Trường THPT Sóc Sơn
Chức vụ:	Giáo viên

Năm học : 2019 - 2020

MỤC LỤC

A. MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài-----	01
2. Mục đích nghiên cứu-----	01
3. Đối tượng nghiên cứu và khách thể nghiên cứu -----	01
4. Vấn đề nghiên cứu-----	01
5. Phương pháp nghiên cứu -----	01

B. NỘI DUNG

Chương 1: KỸ NĂNG GIẢI TOÁN -----	02
-----------------------------------	----

1. Quan niệm về kỹ năng, kỹ năng giải toán -----	02
1.1. Quan niệm về kỹ năng, kỹ năng giải toán-----	02
1.2. Các mức độ của kỹ năng giải toán-----	02
2. Nhiệm vụ rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh -----	02
2.1. Mục tiêu dạy học môn toán-----	02
2.2. Yêu cầu rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh ở trường THPT -----	03
3. Những tri thức liên quan đến bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số -----	03
3.1. Những phương pháp thường dùng trong bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số ----	03
3.2. Những bất đẳng thức thường dùng trong bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số ----	03
3.3. Mối liên quan giữa bài toán chứng minh BĐT và bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức -----	04
4. Định hướng cho giải pháp rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh -----	04
4.1. Quy trình hình thành kỹ năng -----	04
4.2. Những yêu cầu đối với giáo viên trong việc hình thành kỹ năng giải toán cho HS ---	04

Chương 2: GIẢI PHÁP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ CHO HỌC SINH-----	05
---	----

1. Phương pháp dùng đạo hàm tìm GTLN, GTNN của hàm số-----	05
2. Một số dạng hàm số dùng phương pháp khác -----	07
2.1. Một số hàm đa thức -----	07
2.2. Một số hàm phân thức hữu tỷ -----	08
2.3. Một số hàm vô tỷ-----	09
2.4. Hàm chứa biểu thức mũ-----	09
2.5. Hàm thuận nghịch; tựa thuận nghịch-----	10
2.6. Dạng hàm số lượng giác -----	11
2.7. Dạng hàm số dùng phương pháp Lượng giác hóa-----	13
3. Bài tập tự luyện-----	13
4. Kết quả thực tiễn -----	14

C. KẾT LUẬN

Kết luận-----	15
---------------	----

D. PHỤ LỤC

A. MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Môn Toán là môn học công cụ, giữ một vai trò hết sức quan trọng trong chương trình THPT. Trong đó các bài toán về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số là các bài toán yêu cầu khá cao ở học sinh về tư duy, về kĩ năng. Vì vậy giáo viên cần phải chú ý và có những biện pháp để rèn luyện kĩ cho học sinh năng giải dạng toán này, góp phần nâng cao chất lượng dạy học trong chủ đề này.

Từ những lí do trên, đề tài được chọn là: ***“Rèn luyện kĩ năng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số cho học sinh lớp 12 trung học phổ thông”.***

2. Mục đích nghiên cứu

Nhằm rèn luyện có hiệu quả kĩ năng tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số cho học sinh (HS) lớp 12 và để làm tốt bài thi trung học phổ thông (THPT) Quốc gia.

3. Đối tượng nghiên cứu và khách thể nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Là quá trình dạy học chủ đề tìm GTLN, GTNN ở trường THPT Sóc Sơn năm học 2019-2020.

Phạm vi nghiên cứu: Là các bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số trong chương trình THPT hiện hành.

Khách thể nghiên cứu: Học sinh lớp 12 trường THPT Sóc Sơn.

4. Vấn đề nghiên cứu

Các kĩ năng tìm GTLN, GTNN của hàm số.

Giải pháp rèn luyện kĩ năng tìm GTLN, GTNN của hàm số cho HS lớp 12.

5. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu lí luận: Nghiên cứu lí luận về rèn luyện kĩ năng giải toán, về dạy học giải bài tập toán học.

Phương pháp điều tra quan sát:

+ Sử dụng những mẫu phiếu điều tra về tình hình dạy và học nội dung chủ đề nghiên cứu.

+ Điều tra kết quả thi môn toán HKI và HKII năm học 2018-2019 (**Phụ lục 1**)

Phương pháp thực nghiệm sư phạm: Soạn và dạy thực nghiệm một số giáo án về tìm GTLN, GTNN của hàm số ở một số lớp 12 (Ban A), của trường THPT Sóc Sơn, đánh giá kết quả thực nghiệm, đánh giá tính khả thi của đề tài.

B. NỘI DUNG

CHƯƠNG 1: KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

1. Quan niệm về kỹ năng, kỹ năng giải toán

1.1. Quan niệm về kỹ năng, kỹ năng giải toán

Tùy theo các phương diện nhìn nhận khác nhau về kỹ năng: Xét về tâm lý, hành vi, hay xét theo năng lực vận dụng, hành động, hay xét theo phương diện giáo dục, mà có những cách định nghĩa khác nhau về kỹ năng.

Trong đề tài này, tôi quan niệm:

Kỹ năng là khả năng vận dụng tri thức (khái niệm, định lý, thuật giải, phương pháp) để giải quyết nhiệm vụ đặt ra. Như vậy, tri thức (bao gồm cả tri thức sự vật, tri thức phương pháp) là cơ sở của kỹ năng.

Từ quan niệm về kỹ năng, tôi quan niệm về kỹ năng giải toán như sau:

Trong Toán học, kỹ năng là khả năng giải các bài toán, thực hiện các chứng minh cũng như phân tích có phê phán các lời giải và chứng minh nhận được. Kỹ năng giải bài tập toán của HS là khả năng sử dụng có mục đích, sáng tạo những kiến thức toán học đã học để giải bài tập toán học.

1.2. Các mức độ của kỹ năng giải toán

Kỹ năng giải bài tập toán học có thể chia thành ba mức độ khác nhau:

Biết làm: Vận dụng được lý thuyết để giải những bài tập cơ bản, hình thành các thao tác cơ bản như: Viết các đại lượng theo ngôn ngữ toán học, viết chính xác công thức, kí hiệu, tính giá trị dựa vào công thức; nắm được quy trình giải một dạng toán nào đó tương tự như bài mẫu.

Thành thạo: Giải nhanh, ngắn gọn, chính xác bài toán theo cách giải đã biết, trong những hoàn cảnh mới, điều kiện mới tương tự như bài đã biết; giải được những bài tập tổng hợp, phức tạp, đa dạng.

Mềm dẻo, linh hoạt, sáng tạo: Đưa ra được những cách giải ngắn gọn, cách chuyển hóa vấn đề khéo léo, cách giải quyết vấn đề độc đáo.

2. Nhiệm vụ rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh

2.1. Mục tiêu dạy học môn toán

Mục tiêu dạy học môn Toán nằm trong mục tiêu giáo dục nói chung.

+ Trang bị cho học sinh những tri thức, kỹ năng, phương pháp toán học phổ thông, cơ bản, thiết thực.

+ Góp phần phát triển năng lực trí tuệ, bồi dưỡng phẩm chất trí tuệ cho HS.

+ Góp phần hình thành và phát triển các phẩm chất, phong cách lao động khoa học, biết hợp tác lao động, có ý chí và thói quen tự học thường xuyên.

Tạo cơ sở để HS tiếp tục học Đại học, Cao Đẳng, Trung cấp chuyên nghiệp, học nghề hoặc đi vào cuộc sống lao động.

Các mục tiêu thể hiện sự toàn diện, thống nhất và có quan hệ mật thiết, hỗ trợ, bổ sung cho nhau: Tri thức là cơ sở để thực hiện các mục tiêu khác; trong các mục

tiêu thì mục tiêu phát triển trí tuệ là quan trọng nhất; thông qua hoạt động mà rèn luyện kỹ năng, củng cố tri thức.

2.2. Yêu cầu rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh ở trường THPT

Việc rèn luyện kỹ năng giải toán nhằm đạt được các yêu cầu cần thiết sau:

+ Giúp HS hình thành và nắm vững những mạch kiến thức cơ bản trong chương trình.

+ Giúp HS phát triển các năng lực trí tuệ: Tư duy logic và ngôn ngữ chính xác. Khả năng suy đoán, tư duy trừu tượng và trí tưởng tượng trong không gian.

+ Những thao tác tư duy như phân tích, tổng hợp khái quát hóa ...

+ Các phẩm chất trí tuệ như tư duy độc lập, tư duy linh hoạt và sáng tạo.

3. Những tri thức liên quan đến bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

3.1. Những phương pháp thường dùng trong bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số

+ Phương pháp sử dụng bất đẳng thức

+ Phương pháp tìm tập giá trị của hàm số (dựa vào định nghĩa)

+ Phương pháp khảo sát hàm số (dùng đạo hàm)

+ Phương pháp Lượng giác hóa

3.2. Những bất đẳng thức thường dùng trong bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số

3.2.1. Những bất đẳng thức cơ bản có trong SGK

+ Bất đẳng thức lượng giác:

$$|\sin \alpha| \leq 1; |\cos \alpha| \leq 1 \quad \forall \alpha. \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: |\sin^n \alpha| \leq |\sin \alpha|; |\cos^n \alpha| \leq |\cos \alpha|$$

$$|\tan \alpha + \cot \alpha| \geq 2; \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha \geq 2 \quad \forall \alpha \neq k \frac{\pi}{2}$$

+ Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối:

$$\text{Với } a, b \in \mathbb{R} \text{ ta có: } |a| - |b| \leq |a - b|; |a + b| \leq |a| + |b|. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow ab \geq 0$$

3.2.2. Những BĐT thông dụng

$$\text{+ Bất đẳng thức Cô-si: } x_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}: \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x_i = x_j, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j$$

3.2.3. Một số hệ quả của BĐT Cô-si

$$\forall x_i > 0 \quad (i = \overline{1, n}); \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

$$\forall x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, n}): (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq \left(1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}\right)^n$$

$$\forall x_i \geq 1 \quad (i = \overline{1, n}): \frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \dots + \frac{1}{1 + x_n} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x_i = x_j, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j$$

3.3. Mối liên quan giữa bài toán chứng minh BĐT và bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức

Các phương pháp chứng minh BĐT là các phương pháp chủ yếu sử dụng trong bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức và ngược lại.

Về cơ bản hai dạng toán này có thể chuyển hóa cho nhau. Tuy nhiên cũng có những điểm khác nhau: Có thể tìm GTLN, GTNN theo những cách khác nhau (tìm tập giá trị, khảo sát hàm số), trong đó có cách sử dụng BĐT. Ngược lại, có những cách chứng minh BĐT không liên quan gì đến bài toán tìm GTLN, GTNN, như

$$\text{BĐT: } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n+1} \text{ (với } n > 2\text{)}.$$

Về yêu cầu: Bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức thì bắt buộc phải chỉ ra đẳng thức xảy ra khi nào, còn bài toán chứng minh BĐT không nhất thiết phải làm điều đó.

Ví dụ: CM: $a^2 + 1 \geq 0 \forall a \in \mathbb{R}$ và Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $(a^2 + 1)$.

Bài toán chứng minh BĐT là bài toán có thể đưa về bài toán so sánh một biểu thức với một số đã biết (chứng minh $a > b$ tức là so sánh $(a - b)$ với số 0), còn trong bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức, ta phải so sánh biểu thức đó với một số chưa biết mà ta phải tìm. Nếu dự đoán được số là GTLN, GTNN của biểu thức thì bài toán sẽ trở thành bài toán chứng minh BĐT. Tuy nhiên, như đã trình bày ở trên: bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức thì bắt buộc phải chỉ ra đẳng thức xảy ra khi nào, còn bài toán chứng minh BĐT không nhất thiết phải làm điều đó.

4. Định hướng cho giải pháp rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh

4.1. Quy trình hình thành kỹ năng

Theo tôi, quy trình hình thành kỹ năng giải toán nói chung, kỹ năng tìm GTLN, GTNN cho học sinh gồm ba bước sau:

Bước 1: Hướng dẫn học sinh giải một số bài toán mẫu ở trên lớp, có phân tích phương pháp suy nghĩ, tìm lời giải, lưu ý cho HS những điểm cần thiết.

Bước 2: Học sinh tự rèn luyện kỹ năng giải toán theo hệ thống bài toán có chủ định của giáo viên, giáo viên phân tích, khắc phục những khó khăn, thiếu sót cho HS.

Bước 3: Rèn luyện kỹ năng giải toán ở mức độ cao hơn, tổng hợp hơn.

4.2. Những yêu cầu đối với giáo viên trong việc hình thành kỹ năng giải toán cho học sinh

Để hình thành kỹ năng giải bài tập toán học cho học sinh, giáo viên cần thực hiện tốt các vấn đề sau:

+ Xác định từng kỹ năng cụ thể trong hệ thống kỹ năng giải bài tập toán học cho học sinh THPT và mức độ của nó ở mỗi lớp học, cấp học tương ứng.

+ Xác định hệ thống bài tập toán học tương ứng chủ yếu để học sinh luyện tập kỹ năng giải các bài tập cơ bản, bài tập tổng hợp.

+ Xây dựng sơ đồ định hướng khái quát, các thuật toán giải mỗi dạng, loại bài tập.

+ Hướng dẫn học sinh hoạt động tìm kiếm lời giải, bài tập mẫu và bài tập tương tự nhằm giúp học sinh nắm được sơ đồ định hướng giải bài tập toán học nói chung và mỗi bài tập cụ thể nói riêng.

+ Sử dụng hệ thống bài tập sau mỗi bài, mỗi chương để giúp học sinh luyện tập theo mẫu, không theo mẫu, thường xuyên và theo nhiều hình thức giải khác nhau.

+ Chú ý đến tính hệ thống của các kỹ năng. Có những dạng kỹ năng khác nhau: Kỹ năng vận dụng đúng lý thuyết, kỹ năng tính toán, kỹ năng thực hành các phép biến đổi... Nhưng các kỹ năng này không đứng độc lập mà nằm trong một hệ thống. Các kỹ năng có mối liên hệ chặt chẽ với nhau, kỹ năng này là cơ sở hình thành kỹ năng kia và ngược lại việc hình thành kỹ năng sau lại củng cố rèn luyện kỹ năng trước đó...

CHƯƠNG 2: GIẢI PHÁP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ CHO HỌC SINH

1. Phương pháp dùng đạo hàm tìm GTLN, GTNN của hàm số

Khi xét GTLN, GTNN của hàm số $f(x)$ trên tập hợp D :

Trường hợp 1: D không đóng thì lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên tập hợp D . Dựa vào bảng biến thiên đó kết luận.

Trường hợp 2: D đóng – giả sử $D=[a;b]$ và hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng đóng $[a;b]$ thì không cần lập bảng biến thiên của hàm số: Chỉ cần tìm tập hợp điểm tới hạn thuộc đoạn $[a;b]$ của hàm số. GTLN (GTNN) của hàm số trên đoạn $[a;b]$ bằng GTLN (GTNN) trong tập hợp các giá trị của hàm số tại a ; b , các điểm tới hạn thuộc $(a;b)$.

Ví dụ 1. Tìm GTLN, GTNN của $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2019$ trên mỗi tập hợp D

a. $D=[1;4]$

b. $D=[1;4)$

c. $D=(1;4]$

d. $D=(1;4)$

Lời giải:

+ a. TXĐ: $\mathbb{R}$, $D=[1;4] \subset \mathbb{R}$, D là khoảng đóng.

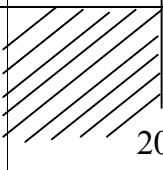
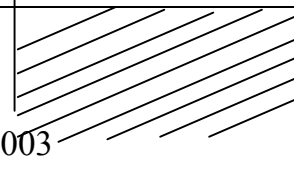
$$f'(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1;4] \\ x = 2 \in [1;4] \end{cases}$$

$$\max_{x \in [1;4]} f(x) = \max(f(1), f(2), f(4)) = \max(2021; 2023; 2003) = 2023 = f(2)$$

$$\min_{x \in [1;4]} f(x) = \min(f(1), f(2), f(4)) = \min(2021; 2023; 2003) = 2003 = f(4)$$

+ b, c, d. TXĐ: $D = [1; 4); (1; 4]; (1; 4)$ - Là khoảng không đóng.

$$f'(x) = -3x^2 + 6x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$					

+Kết luận: $\max_{x \in [1;4]} f(x) = f(2) = 2023$; $\max_{x \in (1;4]} f(x) = f(2) = 2023$; $\max_{x \in [1;4)} f(x) = f(2) = 2023$

b. $f(1) = 2021 > \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 2003 \Rightarrow \exists \min_{x \in [1;4)} f(x)$

c. $f(4) = 2003 < \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2021 \Rightarrow \min_{x \in (1;4]} f(x) = 2003 = f(4)$

d. $\exists \min_{x \in (1;4)} f(x)$

Ví dụ 2. Tìm GTLN, GTNN của $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - x + 2}$

Lời giải:

Cách 1: TXĐ: $\mathbb{R}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} y$; $y' = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2 - x + 2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

t	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$		1		$\frac{6}{7}$		2	
				</			

+KL: $\max y = 2 = y(1)$; $\min y = \frac{6}{7} = y(-3)$

Cách 2: Dựa vào định nghĩa tập giá trị của hàm số.

Ví dụ 3. Tìm GTNN của $y = 27^x - 3^x - x \ln 9$.

Lời giải: + TXĐ: $\mathbb{R}$. Ta có: $y' = 27^x \ln 27 - 3^x \ln 3 - 2 \ln 3 = (3 \cdot 27^x - 3^x - 2) \ln 3$.

$$+ y' = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^3 - 3^x - 2 = 0. \text{ Đặt } t = 3^x (t > 0),$$

$$+ \text{Pt có dạng: } 3t^3 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

+ Lập bảng biến thiên của hàm số y ta có $\min y = 0 = y(0)$.

2. Một số dạng hàm số dùng phương pháp khác

Đối với một số hàm ta có thể sử dụng phương pháp khảo sát hàm số như ở mục 2.1 trên. Tuy nhiên, không phải hàm số nào cũng dễ dàng khảo sát được, nên mục này chủ yếu sẽ trình bày những phương pháp khác ngoài phương pháp khảo sát hàm số.

Trong mục này tôi trình bày việc rèn luyện kỹ năng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số cho HS theo từng dạng khác nhau. Trong mỗi dạng sẽ sử dụng một số phương pháp như đã xác định ở mục 1.3 chương 1. Tôi trình bày theo cấu trúc như vậy một mặt để thuận lợi cho việc rèn luyện kỹ năng cho HS theo từng bài, mặt khác mỗi dạng có thể có nhiều phương pháp giải khác nhau.

2.1. Một số hàm đa thức

Ví dụ 4. Xét $y = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 8)$

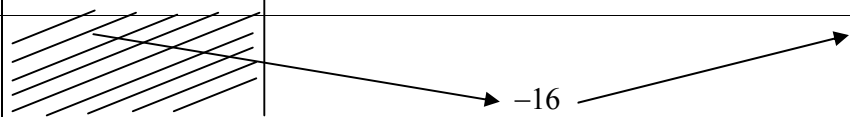
a. Tìm GTNN của y .

b. Tìm GTLN, GTNN của y trên $[0; 3]$

*** Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ kết hợp với khảo sát**

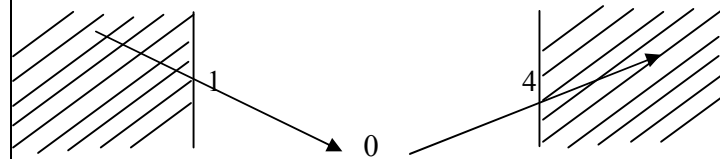
Lời giải: a. Đặt $t = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2, t \geq 0, \forall x$.

$$y = (t - 1)(t - 9) = t^2 - 10t + 9 = f(t) \quad \min y = \min_{[0; +\infty)} f(t)$$

t	$-\infty$	0	5	$+\infty$
$f'(t)$		-	- 0 +	
$f(t)$				

$$\min_{[0; +\infty)} f(t) = -16 = f(5). \text{KL: } \min y = -16 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

b. Đặt $t = (x - 1)^2$. Tìm điều kiện t với $x \in (0; 3]$, thấy $t \in [0; 4]$

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
t					

$$y = t^2 - 10t + 9 = f(t); \quad \min y = \min_{t \in [0;4]} f(t); \quad \max y = \max_{t \in [0;4]} f(t);$$

Xét $f(t) = t^2 - 10t + 9$ trên $[0;4]$ là khoảng đóng

$$f'(t) = 2t - 10, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5 \notin [0;4]$$

$$\Rightarrow \max_{t \in [0;4]} f(t) = \max(f(0); f(4)) = \max(9; -15) = 9 = f(0)$$

$$\min_{t \in [0;4]} f(t) = \min(f(0); f(4)) = \min(9; -15) = -15 = f(4)$$

$$+ \text{KL: } \min_{x \in (0;3]} y = -15 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 4 \\ x \in (0;3] \end{cases} \Leftrightarrow x = 3; \max_{x \in (0;3]} y = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ x \in (0;3] \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

2.2. Một số hàm phân thức hữu tỷ

* Hàm số dạng $y = \frac{mx^2 + nx + p}{ax^2 + bx + c}$ với $b^2 - 4ac < 0$.

Ví dụ 5. Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + x + 1}$

* **Sử dụng phương pháp dùng định nghĩa tập giá trị**

Lời giải: + TXĐ: $\mathbb{R}$.

$$+ y \in \text{TGT} \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + x + 1} \text{ có nghiệm (PT ẩn } x)$$

$$\Leftrightarrow (y-1)x^2 + (y-3)x + y-5 = 0 \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \frac{9-4\sqrt{3}}{3} \leq y \leq \frac{9+4\sqrt{3}}{3}.$$

$$+ \text{KL: } \min y = \frac{9-4\sqrt{3}}{3}; \quad \max y = \frac{9+4\sqrt{3}}{3}.$$

- Hàm số dạng khác

Ví dụ 6. Tìm GTNN của hàm số $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-x}$ trên khoảng $(0;1)$

* **Sử dụng phương pháp sử dụng các BĐT thông dụng**

Lời giải: Xét biểu thức phụ $M = \frac{1-x}{x} + \frac{2x}{1-x} \geq 2\sqrt{2}$ (Theo BĐT Cô-si)

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-x}{x} = \frac{2x}{1-x} \\ x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{Có } y - M = \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{1-x} \right) - \left(\frac{1-x}{x} + \frac{2x}{1-x} \right) = 3 \Rightarrow y = M + 3$$

Vậy $\min_{x \in (0;1)} y = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1$

2.3. Một số hàm vô tỷ

Ví dụ 7. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}$.

Phương pháp đánh giá biểu thức có liên quan dựa vào BĐT thông dụng

Lời giải: Xét $y^2 = 4 + 2\sqrt{(x-2)(6-x)}$, $x \in [2;6]$. Có $y \geq 0$, $\forall x \in [2;6]$

Có $0 \leq \sqrt{(x-2)(6-x)} \leq \frac{x-2+6-x}{2} = 2 \Rightarrow 4 \leq y^2 \leq 8 \Rightarrow 2 \leq y \leq 2\sqrt{2}$

$$y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(6-x) = 0 \\ x \in [2;6] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$y = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 6-x \\ x \in [2;6] \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

KL: $\min y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases}$, $\max y = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 4$

Hàm vô tỷ dạng $y = n(\sqrt{x+a} \pm \sqrt{b-x}) + m\sqrt{(x+a)(b-x)} + p$

Đặt $t = \sqrt{x+a} \pm \sqrt{b-x}$, $y = f(t)$

+ Tìm điều kiện $t: t \in D$.

+ Chuyển sang xét hàm số $f(t), t \in D$.

2.4. Hàm chứa biểu thức mũ

Ví dụ 8. Tìm GTNN của hàm số:

$$y = (2 + \sqrt{3})^{2x} + (2 - \sqrt{3})^{2x} - 3 \left[(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x \right]$$

Sai lầm: (học sinh dễ mắc phải)

Đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x \Rightarrow (2 + \sqrt{3})^{2x} + (2 - \sqrt{3})^{2x} = t^2 - 2$

$$\Rightarrow y = t^2 - 3t - 2 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} \geq -\frac{17}{4} \forall t, \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}.$$

KL: $\min y = -\frac{17}{4}$

Phân tích: Sai do chưa chú ý tìm điều kiện của t

Các bước: + Đặt $t = t(x)$, biến đổi $y = f(t)$.

+ Tìm điều kiện $t \in T$ khi $x \in D$.

+ Chuyển về bài toán GTLN, GTNN của $f(t)$ trên tập hợp T .

Lời giải: + Đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x \Rightarrow y = t^2 - 3t - 2 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} = f(t)$

+ Tìm điều kiện của t :

Cách 1: $t \geq 2\sqrt{(2 + \sqrt{3})^x (2 - \sqrt{3})^x} = 2, \forall x$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x = (2 - \sqrt{3})^x \Leftrightarrow x = 0$

Có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = +\infty$. Vậy $t \in [2; +\infty)$

Cách 2: $t' = (2 + \sqrt{3})^x \ln(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})^x \ln(2 - \sqrt{3})$
 $= \ln(2 + \sqrt{3}) \left[(2 + \sqrt{3})^x - (2 - \sqrt{3})^x \right]$

$t' = 0 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x = (2 - \sqrt{3})^x \Leftrightarrow x = 0$

$t' > 0 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x > (2 - \sqrt{3})^x \Leftrightarrow x > 0$

Lập bảng biến thiên của hàm số t : có $t \in [2; +\infty)$

Cách 3: + Đặt $u = (2 + \sqrt{3})^x$; có: $t = u + \frac{1}{u}$; $t \geq 2 \forall x > 0$

+ Có: $\min y = \min_{t \in [2; +\infty)} f(t)$. Do $t \geq 2 \Rightarrow t - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow y \geq -4$

+ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy $\min y = -4 \Leftrightarrow x = 0$

2.5. Hàm thuận nghịch; tựa thuận nghịch

+ Bậc 2: $y = a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c (a \neq 0)$

$$y = a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c (a \neq 0)$$

+ Bậc 3: $y = a\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c\left(x + \frac{1}{x}\right) + d (a \neq 0)$

$$y = a\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c\left(x - \frac{1}{x}\right) + d$$

Phương pháp: Đặt $t = x \pm \frac{1}{x}$

Ví dụ 9. Tính GTLN của $y = \frac{-x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x^2}$

Lời giải: $y = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5$. Đặt $t = x + \frac{1}{x}$

$$y = -(t^2 - 2) + 2t - 5 = -t^2 + 2t - 3 = f(t)$$

Điều kiện của t :

Cách1: Do x và $\frac{1}{x}$ cùng dấu nên: $|t| = \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \left|\frac{1}{x}\right| \geq 2\sqrt{|x|\left|\frac{1}{x}\right|} = 2$

Cách2: Tìm t để phương trình: $x^2 - tx + 1 = 0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \geq 4 \Leftrightarrow |t| \geq 2$$

Cách 3: Xét $t' = 1 - \frac{1}{x^2}$. Lập bảng biến thiên của $t' = 1 - \frac{1}{x^2}$ rồi suy ra $|t| \geq 2$

$$\max y = \max_{t \in D} f(t), D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$$

t	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(t)$	+		+ 0 -		-
$f(t)$		-11		-3	

$$\max_{t \in D} f(t) = -3 = f(2)$$

Kết luận: $\max y = -3 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$

2.6. Dạng hàm số lượng giác

Hàm số lượng giác đưa được về một hàm số lượng giác của biến

- Dạng chứa $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$. Đặt $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$

- Dạng chứa $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 3x$. Đặt $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$

- Dạng chứa $\frac{1}{\cos x}$, $\tan^2 x$. Đặt $t = \frac{1}{\cos x}$, $t \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

- Dạng chứa $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\tan x$. Đặt $t = \tan x$.

- Dạng bậc chẵn đối với $\sin x$, $\cos x$.

Cách 1: Đặt $t = \sin^2 x$ hoặc $t = \cos^2 x$, $t \in [0;1]$

Cách 2: Đặt $t = \cos 2x$, $t \in [-1;1]$

Nếu có thêm tính chất đối xứng đối với $\sin x$, $\cos x$ thì đưa về $\sin^2 2x$,
đặt $t = \sin^2 2x$ hoặc đặt $t = \cos 4x$.

- Dạng đối xứng đối với $\sin x$, $\cos x$.

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

Hệ quả: + Dạng $y = a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x + c$

$$\text{Đặt } t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

+ Dạng $y = a|\sin x + \cos x| + b \sin x \cos x + c$

$$\text{Đặt } t = |\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right|, t \in [0; \sqrt{2}]$$

+ Dạng đối xứng đối với $\tan x$ và $\cot x$: Đặt $t = \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ ($|t| \geq 2$)

Ví dụ 10. Tìm GTLN, GTNN của: $y = \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 + \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2$

Phương pháp dùng BĐT thông dụng

***Sai lầm 1:** Có $u^2 + v^2 \geq 2vu$, $\forall u; v$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow u = v$

$$\begin{aligned} y &\geq 2\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) \\ &= 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x + \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} + \tan^2 x + \cot^2 x\right) \geq 2(2 + 2) = 8 \\ &\Rightarrow \min y = 8 \end{aligned}$$

***Sai lầm 2:** Ta có $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \geq 2\sqrt{\cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = 2$

$$\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \geq 2\sqrt{\sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}} = 2 \Rightarrow y \geq 8 \Rightarrow \min y = 8$$

*** Phân tích sai lầm:** + Quên xét dấu bằng xảy ra.

+ Với cách đánh giá trên, dấu bằng không bao giờ xảy ra.

Lời giải: + TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k_1 \frac{\pi}{2}, k_1 \in \mathbb{Z} \right\}$

$$+ \text{ Có } u^2 + v^2 \geq \frac{1}{2}(u+v)^2 \forall u, v. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow u = v$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } y &\geq \frac{1}{2} \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{\sin^2 2x} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Có } 0 < \sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 2x} \geq 1 \Rightarrow y \geq \frac{1}{2}(1+4.1)^2 = \frac{25}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2} \\ \sin^2 2x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Kết luận: } \min y = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$$

2.7. Dạng hàm số dùng phương pháp Lượng giác hóa

Ví dụ 11. Tìm GTLN, GTNN của hàm : $f(x) = \sqrt{3-3x^2} \cdot x \cdot (2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)$

Lời giải: $f(x) = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} \cdot x \cdot (2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)$

$$+ \text{ Đặt } \cos t = x. \text{ Do } x \in [-1;1] \Rightarrow t \in [0;\pi]$$

$$\text{Khi đó có: } \sqrt{1-x^2} = \sin t; 2x^2-1 = \cos 2t; 8x^4-8x^2+1 = \cos 4t.$$

$$f(x) = \sqrt{3} \sin t \cos t \cos 2t \cos 4t = \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 8t = g(t).$$

$$\text{Có } |\sin 8t| \leq 1, \forall t \in [0;\pi] \Rightarrow |g(t)| \leq \frac{\sqrt{3}}{8}, \forall t \in [0;\pi] \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{8}, \forall x \in [-1;1]$$

$$+ \text{ Kết luận: } \max_{x \in [-1;1]} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{8}; \min_{x \in [-1;1]} f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

3. Bài tập tự luyện

Bài 1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

a. $y = x^4 - x^2 + 13$ trên $[-1;2]$. (Đề THPTQG năm 2019)

b. $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ trên $(-4;3]$. (Đề thi thử THPTQG năm 2019 của THPT Chuyên Sơn La lần 1)

Bài 2. Tìm GTNN của hàm số $y = \frac{3}{2-x} + \frac{1}{x}$ trên $(0; 2)$.

Bài 3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = \frac{20x^2 + 10x + 2020}{3x^2 + 2x + 1}$.

Bài 4. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + \sqrt{4-x}$.

Bài 5. Tìm GTNN của hàm số: $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$.

Bài 6. Tìm GTNN của hàm số: $y = \frac{1}{2}x^2 - x - e^{-x}$ trên $[0; 1]$.

Bài 7. Tìm GTNN của hàm số: $y = \frac{e^{-x^2}}{1+x} - \frac{x^4}{2x+2} + x$ trên $[0; 1]$

Bài 8. Tìm GTNN của: $y = \left(\log_{\frac{1}{2}} x - \log_2(-2x+1) \right)^2 - \log_2(8x^4 - 8x^3 + 2x^2)$.

Bài 9. Tìm GTLN, GTNN của y : $y = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin 2x$

Bài 10. Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = \sin^{20} x + \cos^{20} x$

4. Kết quả thực tiễn

Để đánh giá kết quả thực nghiệm, tác giả soạn một đề kiểm tra với thời gian làm bài 45 phút (**Phụ lục 2**) cho hai lớp – lớp thực nghiệm (12A5) và lớp đối chứng (12A4) cùng làm trong cùng một điều kiện như nhau, và đánh giá kết quả của cả hai lớp. Đây là 2 lớp học Ban A của trường THPT Sóc Sơn năm học 2019-2020. (Kết quả kiểm tra – **Phụ lục 3**)

Qua việc quan sát quá trình HS làm bài kiểm tra và qua việc chấm bài, tác giả có nhận xét:

Ở bài 1: Lớp thực nghiệm: Tất cả HS đều nhanh chóng tìm được cách giải và làm đúng theo cách tìm tập giá trị của hàm số dựa vào Định nghĩa.

Lớp đối chứng: Các em làm được bài này thì cũng loay hoay một thời gian khá lâu mới tìm được hướng giải. Các em còn lại thì sa vào biến đổi đại số phức tạp do dùng đạo hàm.

Ở bài 2: Lớp thực nghiệm: Hầu hết các học sinh đều nhanh chóng tìm được cách giải và làm đúng: Đặt $t = 2^{\sqrt{-x^2+2x+3}}$, $y = 2t^3 - 9t^2 + 17 = f(t)$, Đk: $t \in [1; 4]$, đưa về xét hàm số $f(t)$ trên $[1; 4]$. Kết luận: $\max y = 10$; $\min y = -10$.

Lớp đối chứng: Đa số học sinh hoặc quên điều kiện t , hoặc sai điều kiện: $t > 0$ hoặc $t \geq 1$, do đó lúng túng không biết phải xử lý thế nào.

Ở bài 3: Lớp thực nghiệm: Nhiều học sinh đã phát hiện được cách giải, đã có sự vận dụng sáng tạo kiến thức đã học.

TXD: $D = [1; +\infty)$. Đặt $t = \sqrt[4]{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ ($t \geq 1$), $y = \frac{1}{t} + t^2$. Dùng BĐT Cô-si hoặc dùng đạo hàm. Đáp số: $\min y = 2 = y(1)$.

Có 8 em làm đúng cách 1, có 13 em làm đúng cách 2, có 9 em làm đúng cách 3, có 3 em làm đúng nửa bài, có 9 em chưa làm được.

Lớp đối chứng: Có 3 em làm đúng theo cách 1. Có 5 em làm đúng theo cách 2. Số còn lại có 5 em tìm đúng điều kiện của t , nhưng tính toán sai do hàm số $f(t)$ khá phức tạp hoặc không kịp, có 4 em quên tìm điều kiện của t , có 23 em không viết được ý nào của bài này.

Như vậy, rõ ràng các em lớp thực nghiệm không chỉ giải tốt bài tập mà điều quan trọng là việc phát hiện hướng giải, tốc độ xử lý bài toán của các em là nhanh hơn hẳn.

C. KẾT LUẬN

SKKN có những kết quả chủ yếu sau đây:

Nêu được một số vấn đề thuộc về lí luận liên quan đến kĩ năng giải toán nói chung và kĩ năng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trong trường trình THPT; tóm tắt những tri thức liên quan đến bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Từ những căn cứ lí luận, đồng thời căn cứ vào những đặc điểm về phong cách học tập của học sinh, đề xuất một giải pháp rèn luyện kĩ năng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số cho học sinh thông qua hệ thống sử dụng một số phương pháp để giải quyết 11 ví dụ có phân tích, hệ thống bài tập tự luyện gồm 10 bài.

Trong mỗi phương pháp, giáo viên thực hiện theo quy trình ba bước hình thành kĩ năng giải toán cho học sinh.

Giải pháp rèn luyện kĩ năng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số cho học sinh đề xuất trong đề tài một phần đã được kiểm nghiệm, đánh giá qua Thực nghiệm sư phạm. Tuy phạm vi thực nghiệm chưa rộng nhưng đã chứng tỏ được tính khả thi và hiệu quả của đề tài.

Sóc Sơn, ngày 15 tháng 02 năm 2020

Người viết

Đoàn Trường

D. PHỤ LỤC

1. Phụ lục 1 : Kết quả kiểm tra môn Toán HKI và HKII năm học 2018-2019 trước khi dạy thực nghiệm.

Lớp	Giỏi		Khá		Trung bình		Yếu	
	TS	%	TS	%	TS	%	TS	%
1. Kết quả HKI								
Thực nghiệm (12A5)	4	<i>10%</i>	11	<i>27,50%</i>	19	<i>47,50%</i>	6	<i>15%</i>
Đối chứng (12A4)	4	<i>10%</i>	14	<i>35%</i>	15	<i>37,50%</i>	7	<i>17,50%</i>
2. Kết quả HKII								
Thực nghiệm (12A5)	5	<i>12,50%</i>	15	<i>37,50%</i>	18	<i>45,00%</i>	2	<i>5,00%</i>
Đối chứng (12A4)	6	<i>15,00%</i>	15	<i>37,50%</i>	16	<i>40,00%</i>	3	<i>7,50%</i>

2. Phụ lục 2: Đề bài kiểm tra sau khi dạy thực nghiệm(45 phút)

TRƯỜNG THPT SÓC SƠN
TỔ TỰ NHIÊN 1

ĐỀ KIỂM TRA 1 TIẾT – GT 12
Thời gian: 45 phút

Bài 1: Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = \frac{3x^2 + 10x + 2019}{x^2 + 2x + 3}$

Bài 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = 2.8^{\sqrt{-x^2+2x+3}} - 9.4^{\sqrt{-x^2+2x+3}} + 17$

Bài 3: Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = \sqrt[4]{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$.

Bài kiểm tra này tác giả nhằm mục đích kiểm tra kỹ năng tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng các phương pháp đã nêu.

3. Phụ lục 3: Kết quả bài kiểm tra sau khi dạy thực nghiệm

- Tính theo số học sinh làm đúng ở từng bài:

Bài Lớp	1	2	3
Lớp thực nghiệm (12A5)	39/39 <i>100%</i>	35/39 <i>89,7%</i>	30/39 <i>76,92%</i>
Lớp đối chứng (12A4)	36/40 <i>90%</i>	19/40 <i>47,5%</i>	8/40 <i>20,00%</i>

Ghi chú: Lớp 12A5 sẽ số thay đổi so với năm học trước do có 1 HS bị ung thư nên nghỉ học.