

TS. VĂN PHÚ QUỐC – TS. LÊ SÁNG
ThS. LÊ TRUNG TÍN – ThS. PHẠM KIM CHUNG

TINH HOA

**CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI
DƯỠNG TOÁN ĐẠI SỐ LỚP**

10



↵ TỦ SÁCH HIẾU HỌC ↵
NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TS. VĂN PHÚ QUỐC – TS. LÊ SÁNG
ThS. LÊ TRUNG TÍN – ThS. PHẠM KIM CHUNG

TINH HOA

**CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI
DƯỠNG TOÁN ĐẠI SỐ LỚP**

10



↵ TỦ SÁCH HIẾU HỌC ↵
NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

CHƯƠNG 1: MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP – ÁNH XẠ

BÀI 1: MỆNH ĐỀ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Đại số mệnh đề

Là các mệnh đề thỏa mãn hai điều kiện

* Mỗi mệnh đề phải là hoặc đúng (Đ), hoặc sai (S)

* Một mệnh đề không thể đồng thời là đúng và sai

2. Phủ định của một mệnh đề

Phủ định một mệnh đề A là một mệnh đề được kí hiệu $\bar{A}$ có bảng chân trị:

A	$\bar{A}$
Đ	S
S	Đ

3. Phép hội (giao)

Hội của hai mệnh đề A và B là một mệnh đề được kí hiệu là $A \wedge B$, có bảng chân trị:

A	B	$A \wedge B$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	S
S	S	S

4. Phép tuyển

Tuyển của hai mệnh đề A và B là một mệnh đề được kí hiệu là $A \vee B$, có bảng chân trị

A	B	$A \vee B$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ
S	Đ	Đ
S	S	S

5. Phép kéo theo

Phép kéo theo của hai mệnh đề A và B là một mệnh đề được kí hiệu:

$A \Rightarrow B$, đọc là: “A kéo theo B”

Bảng chân trị là:

A	B	$A \Rightarrow B$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	Đ
S	S	Đ

6. Phép tương đương

Phép tương đương của hai mệnh đề A và B là một mệnh đề được kí hiệu: $A \Leftrightarrow B$ có bảng chân trị

A	B	$A \Leftrightarrow B$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	S
S	S	Đ

7. Hai mệnh đề bằng nhau

a) Định nghĩa: Hai mệnh đề A và B được gọi là bằng nhau nếu như chúng có cùng chân trị. Kí hiệu: $A = B$

b) Các tính chất:

* $A \wedge B = B \wedge A$

* $A \vee B = B \vee A$

$$* A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

$$* A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

$$* A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$* A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$* \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

$$* \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

$$* A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Vấn đề 1: xét chân trị của mệnh đề

Dựa vào chân trị các mệnh đề đã biết: $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$

a) **Ví dụ 1:** Xét chân trị các mệnh đề sau:

i) $(\pi > 3) \wedge (\sqrt{3} > 2)$

ii) $(2\sqrt{2} < 3) \Rightarrow (\pi - 2 > 1)$

Giải

i) Vì $(\sqrt{3} > 2)$ sai nên $(\pi > 3) \wedge (\sqrt{3} > 2)$ sai

ii) Vì $(\pi - 2 > 1)$ đúng nên $(2\sqrt{2} < 3)$

$\Rightarrow (\pi - 2 > 1)$ đúng

b) **Ví dụ 2:** Tìm x để hàm sau đây đúng ($x^2 < 1$

$\Rightarrow x > 1)$

Giải

* Nếu $x \leq -1$. Ta có: $x^2 < 1$ sai và $x > 1$ sai nên: $(x^2 < 1 \Rightarrow x > 1)$ đúng

* Nếu $-1 < x < 1$. Ta có: $x^2 < 1$ đúng và $x > 1$ sai nên: $(x^2 < 1 \Rightarrow x > 1)$ sai

* Nếu $x = 1$. Ta có: $x^2 < 1$ sai và $x > 1$ sai nên $(x^2 < 1 \Rightarrow x > 1)$ đúng

* Nếu $x > 1$. Ta có: $(x^2 < 1)$ sai và $x > 1$ đúng nên $(x^2 < 1 \Rightarrow x > 1)$ đúng

Vậy $x \leq -1$ hoặc $x \geq 1$

c) **Ví dụ 3:** Xét chân trị mệnh đề: $(A \wedge B \Rightarrow B)$

Giải

* Nếu B đúng thì $(A \wedge B \Rightarrow B)$ đúng

* Nếu B sai thì $A \wedge B$ sai; theo đó $(A \wedge B \Rightarrow B)$ đúng

Vậy $(A \wedge B \Rightarrow B)$ luôn đúng

d) **Ví dụ 4:** Cho $(A \vee B \Rightarrow B)$ đúng (đpcm) $(\bar{A} \vee B \Rightarrow B)$ đúng

Giải

* Nếu B đúng thì $(\bar{A} \vee B \Rightarrow B)$ đúng (đpcm)

* Nếu B sai, do $A \vee B$ đúng suy ra A đúng, theo đó $\bar{A}$ sai kéo theo $\bar{A} \vee B$ sai. Vậy $(\bar{A} \vee B \Rightarrow B)$ đúng (đpcm)

2. Vấn đề 2: CHỨNG MINH HAI MỆNH ĐỀ BẰNG NHAU

Có hai cách chứng minh

- * Lập bảng chân trị rồi so sánh kết quả
- * Dùng các tính chất của hai mệnh đề bằng nhau

a) **Ví dụ 1:** Chứng minh: $A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$

Giải

A	$\bar{A}$	B	$A \Rightarrow B$	$\bar{A} \vee B$
Đ	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	S	S
S	Đ	Đ	Đ	Đ
S	Đ	S	Đ	Đ

* Lập bảng chân trị

Từ bảng chân trị ta được đpcm

b) **Ví dụ 2:** Chứng minh: $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) = A \wedge B \Rightarrow C$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 A \Rightarrow (B \Rightarrow C) &= \bar{A} \vee (B \Rightarrow C) \\
 &= \bar{A} \vee (\bar{B} \vee C) \\
 &= (\bar{A} \vee \bar{B}) \vee C \\
 &= \overline{(A \wedge B)} \vee C \\
 &= A \wedge B \Rightarrow C \text{ (đpcm)}
 \end{aligned}$$

C. GIẢI BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Tìm chân trị các mệnh đề sau:

a) $(\sqrt{2} > 1) \wedge (\pi < 3)$

b) $\left(\frac{11}{3} > \frac{7}{2}\right) \vee (4^2 < 0)$

c) $(115 - 191 > 3) \Rightarrow (4, 2.5 < 21)$

d) $(5.12 > 4.6) \Rightarrow (\pi^2 < 10)$

Giải

a) Vì $(\pi < 3)$ sai nên $(\sqrt{2} > 1) \wedge (\pi < 3)$ sai

b) Vì $\left(\frac{11}{3} > \frac{7}{2}\right)$ đúng nên $\left(\frac{11}{3} > \frac{7}{2}\right) \vee (4^2 < 0)$ đúng

c) Vì $(115 - 191 > 3)$ sai nên $(115 - 191 > 31) \Rightarrow (4, 2.5 < 21)$ đúng

d) Vì $(\pi^2 < 10)$ đúng nên $(5.12 > 4.6) \Rightarrow (\pi^2 < 10)$ đúng

2. Định x để các hàm đề sau đây đúng:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x = 1 \vee x = 2)$

b) $x = 3 \Rightarrow x > 2$

c) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x = 1 \wedge x = 2)$

d) $x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 1 \vee x \neq 3)$

Giải

a) * Nếu $x < 1$ thì $x^2 - 3x + 2 = 0$ sai

và $(x = 1 \vee x = 2)$ sai

Suy ra $[x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x = 1 \vee x = 2)]$ đúng

* Nếu $x = 1$ thì $x^2 - 3x + 2 = 0$ đúng

và $(x = 1 \vee x = 2)$ đúng.

Suy ra $[x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x = 1 \vee x = 2)]$ đúng

* Nếu $1 < x < 2$ thì $x^2 - 3x + 2 = 0$

sai và $(x = 1 \vee x = 2)$ sai.

Suy ra $[x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x = 1 \vee x = 2)]$ đúng

* Nếu $x = 2$ thì $x^2 - 3x + 2 = 0$ đúng

và $(x = 1 \vee x = 2)$ đúng.

Suy ra $[x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x = 1 \vee x = 2)]$ đúng

* Nếu $x > 2$ thì $x^2 - 3x + 2 = 0$

sai và $(x = 1 \vee x = 2)$ sai.

Suy ra $[x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x = 1 \vee x = 2)]$ đúng

Vậy $x \in \mathbb{R}$

b) **Đáp số:** $x \in \mathbb{R}$

c) **Đáp số:** $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

d) **Đáp số:** $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$

3. Trong các hàm đề sau hàm đề nào đúng với mọi x :

a) $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$

b) $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

$$c) x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x = 2 \wedge x = 3)$$

$$d) x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 2 \wedge x \neq 3)$$

Giải

a) Và d) đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ (Bạn đọc tự giải)

b) đúng $\forall x \neq -3$

c) đúng $\forall x \neq 2, 3$

4. a) Cho $(A \Rightarrow B)$ đúng $(A \Leftrightarrow B)$ sai. Tìm chân trị của $B \Rightarrow A$; A ; B

b) Cho $(A \Leftrightarrow B)$ đúng. Tìm chân trị của $\bar{A} \Leftrightarrow B$; $A \Leftrightarrow \bar{B}$; $B \Leftrightarrow A$

c) Cho $(A \vee B)$; $(A \Rightarrow C)$, $(B \Rightarrow D)$ đúng. Chứng minh $(C \vee D)$ đúng.

Giải

a) Do $(A \Rightarrow B)$ đúng và $(A \Leftrightarrow B) = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ sai

Suy ra $(B \Rightarrow A)$ sai và A sai, B đúng

b) Do $(A \Leftrightarrow B)$ đúng nên A và B cùng chân trị

Suy ra: A và B khác chân trị; A và $\bar{B}$ khác chân trị; theo đó:

$(\bar{A} \Leftrightarrow B)$ sai, $(A \Leftrightarrow \bar{B})$ sai, $(B \Leftrightarrow A)$ đúng

c) * Nếu C đúng thì $C \vee D$ đúng (đpcm)

* Nếu C sai, do $A \Rightarrow C$ đúng suy ra A sai, lại có $(A \vee B)$ đúng $\Rightarrow B$ đúng

Với $(B \Rightarrow D)$ suy ra D đúng. Vậy $(C \vee D)$ đúng (đpcm)

5. Dùng bảng chân trị chứng minh:

a) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

b) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

c) $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

d) $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

Giải

a)

A	B	C	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ
Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ
S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ
S	Đ	S	Đ	S	S	S	S
S	S	Đ	S	Đ	S	S	S
S	S	S	S	S	S	S	S

b)

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ

S	Đ	Đ	S	S	S	Đ	S
Đ	S	S	S	S	S	S	S
S	Đ	S	S	S	S	Đ	S
S	S	Đ	S	S	S	Đ	S
S	S	S	S	S	S	S	S

c)

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$
Đ	Đ	S	S	Đ	S	S
Đ	S	S	Đ	Đ	S	S
S	Đ	Đ	S	Đ	S	S
S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ

d)

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$
Đ	Đ	S	S	Đ	S	S
Đ	S	S	Đ	S	Đ	Đ
S	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ
S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ

6. Chứng minh:

a) $\overline{A \Rightarrow B} = A \wedge \bar{B}$

b) $(\bar{A} \wedge \bar{B}) \Rightarrow C = A \vee B \vee C$

c) $(B \Rightarrow \bar{C}) \wedge A = \overline{(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)}$

Giải

$$a) \text{ Ta có: } \overline{A \Rightarrow B} = \overline{\overline{A} \vee B} = \overline{\overline{A}} \wedge \overline{B} = A \wedge \overline{B} \text{ (đpcm)}$$

$$b) (\overline{A} \wedge \overline{B}) \Rightarrow C = \overline{(\overline{A} \wedge \overline{B}) \wedge \overline{C}} = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}} \vee C = (A \vee B) \vee C \\ = A \vee B \vee C \text{ (đpcm)}$$

$$c) (B \Rightarrow \overline{C}) \wedge A = (\overline{B} \vee \overline{C}) \wedge A = (A \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge \overline{C}) \\ = \overline{(\overline{A} \vee B)} \vee \overline{(\overline{A} \vee C)} \\ = \overline{(A \Rightarrow B)} \vee \overline{(A \Rightarrow C)} \text{ (đpcm)}$$

7. Viết các mệnh đề sau chỉ dùng mệnh đề phủ định, giao, hợp:

$$a) A \Rightarrow (\overline{B} \vee C)$$

$$b) (\overline{A} \wedge B) \Rightarrow \overline{C}$$

$$c) A \Leftrightarrow \overline{B}$$

Giải

$$a) A \Rightarrow (\overline{B} \vee C) = \overline{A \wedge (\overline{B} \vee C)} = \overline{A} \vee \overline{\overline{B} \vee C} \\ = \overline{A} \vee (B \wedge \overline{C})$$

$$b) (\overline{A} \wedge B) \Rightarrow \overline{C} = \overline{(\overline{A} \wedge B) \wedge C} = \overline{\overline{A} \wedge B} \vee \overline{C} = A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \\ = A \vee (\overline{B} \wedge \overline{C})$$

$$c) A \Leftrightarrow \overline{B} = (A \Rightarrow \overline{B}) \wedge (\overline{B} \Rightarrow A) \\ = (\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge (B \vee A) = (\overline{A} \wedge B) \wedge (A \vee \overline{B})$$

8. Phủ định các mệnh đề:

$$a) A \vee (B \wedge C)$$

$$b) (A \wedge \overline{B}) \Rightarrow C$$

$$c) A \Leftrightarrow B$$

Giải

$$a) \overline{A \vee (B \wedge C)} = \bar{A} \wedge (B \wedge C)$$

$$b) \overline{(A \wedge \bar{B}) \Rightarrow C} = \overline{A \wedge \bar{B} \vee C} = (A \wedge \bar{B}) \wedge \bar{C} \\ = A \vee \bar{B} \wedge \bar{C}$$

$$c) \overline{A \Leftrightarrow B} = \overline{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)} \\ = \overline{(A \Rightarrow B)} \vee \overline{(B \Rightarrow A)} = (A \wedge \bar{B}) \vee (B \wedge \bar{A})$$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Xét chân trị các mệnh đề:

$$a) (\sqrt{3} > 2) \vee (\pi^2 < 10)$$

$$b) (1 + \sqrt{3} > \sqrt{5}) \wedge (1 + \sqrt{5} > \pi)$$

$$c) (2 \times \sqrt{7} - 5 > 0) \Rightarrow (7 - 4\sqrt{3} < 0)$$

$$d) (5\sqrt{2} - 7 \leq 0) \Rightarrow (\pi - 1 > \sqrt{5})$$

2. Định xđề các hàm đề sau đây đúng:

$$a) x = 1 \wedge x > 3$$

$$b) x \neq 1 \wedge x \neq 3$$

$$c) x < 1 \vee x > 3$$

$$d) x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$$

$$e) x = -2 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$f) x^2 - x = 0 \Rightarrow (x = 0 \wedge x = 1)$$

$$g) x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0 \wedge x \neq 1)$$

3. Cho $(A \Rightarrow B)$ đúng. Chứng minh $[(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$ đúng.
4. Lập bảng chân trị chứng minh:
 - a) $A \Rightarrow \bar{B} = \overline{A \wedge B}$
 - b) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) = (A \wedge B) \Rightarrow C$
5. Chứng minh:
 - a) $A \Rightarrow (B \wedge C) = (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$
 - b) $A \vee (B \wedge C) = \bar{A} \Rightarrow (B \Rightarrow \bar{C})$
6. Phủ định các mệnh đề:
 - a) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$
 - b) $\bar{A} \Rightarrow (B \Rightarrow \bar{C})$
 - c) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

BÀI 2: PHÉP CHỨNG MINH QUY NẠP

A. TÓM TẮT GIÁC KHOA

1. Nguyên lí quy nạp

$T(n)$ là mệnh đề, với $n \in \mathbb{N}^*$

Nếu 1) $T(1)$ đúng

2) Với mọi $k \geq 1$, từ $T(k)$ đúng suy ra được $T(k + 1)$ cũng đúng

Thì: $T(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Như vậy để chứng minh mệnh đề $T(n)$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ bằng quy nạp toán học ta thực hiện hai bước.

* *Bước 1:* (còn gọi là bước cơ sở của quy nạp)

- * **Bước 2:** (còn gọi là bước chuyển tiếp quy nạp)
- Giả sử $T(k)$ đúng (đây là giả thiết quy nạp)
 - Ta phải chứng minh $T(k + 1)$ đúng

KẾT LUẬN: Theo nguyên lý quy nạp ta được đpcm

2. Ví dụ: Chứng minh với mọi n nguyên dương ta có:

a) $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

b) $3^0 + 2n - 1$ chia hết cho 4

Giải

a) * Khi $n = 1$ ta có: VT = $1.2 = 2$

VP = $\frac{1.2.3}{3} = 2$; suy ra VT = VP: mệnh đề đúng

* Giả sử $1.2 + 2.3 + \dots + k(k + 1) = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{3}$

đúng (1)

Ta cần chứng minh:

$$1.2 + 2.3 + \dots + k(k + 1) + (k + 1)(k + 2) \\ = \frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{3}$$

Thật vậy:

$$VT = [1.2 + 2.3 + \dots + k(k + 1)] + (k + 1)(k + 2)$$

$$= \frac{k(k + 1)(k + 2)}{3} + (k + 1)(k + 2) \text{ (do (1))}$$

$$= \frac{(k + 1)(k + 2)}{3}(k + 3) = \frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{3} \text{ (đpcm)}$$

$$\text{Vậy } 1.2 + 2.3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Đặt $A(n) = 3^n + 2n - 1$

* Khi $n = 1$. Ta có $A(1) = 3 + 2 - 1 = 4 \div 4$ mệnh đề đúng

* Giả sử $A(k) = 3^k + 2k - 1 \div 4$

Ta phải chứng minh

$$\begin{aligned} A(k+1) &= 3^{k+1} + 2(k+1) - 1 \div 4 \\ &= 3(3^k + 2k - 1) - 4k + 4 = 3.A(k) - 4(k-1) \end{aligned}$$

Do $A(k) \div 4$ và $4(k-1) \div 4$

Suy ra $A(k+1) \div 4$ (đpcm)

Vậy $3^n + 2n - 1$ chia hết cho 4 đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$

B. GIẢI BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Chứng minh với mọi số nguyên dương n ta có:

a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $1.4 + 2.7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$

c) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

$$d) \frac{3}{1.2.2} + \frac{4}{2.3.2^2} + \dots + \frac{n+2}{n(n+1).2^n} = 1 - \frac{1}{(n+1).2^n}$$

e) $n^3 + 2n$ chia hết cho 9

f) $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9

g) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7

h) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ chia hết cho 11

Giải

a) * Khi $n = 1$. VT = $1^2 = 1$, VP = $\frac{1.2.3}{6} = 1$

$\Rightarrow$ VT = VP: mệnh đề đúng

* Giả sử $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Suy ra: $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2$
 $= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$

$$= \frac{k+1}{6} (2k^2 + k + 6k + 6)$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Điều này chứng tỏ mệnh đề đúng với $n = k + 1$

Vậy $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) * Khi $n = 1$, $VT = 1 \times (3 \times 1 + 1) = 4$,

$$VP = 1(1 + 1)^2 = 4$$

$\Rightarrow VT = VP$: mệnh đề đúng

* Giả sử $1.4 + 2.7 + \dots + k(3k + 1) = k(k + 1)^2$

Suy ra: $1.4 + 2.7 + \dots + k(3k + 1) + (k + 1)(3k + 4)$

$$= k(k + 1)^2 + (k + 1)(3k + 4)$$

$$= (k + 1)(k^2 + k + 3k + 4)$$

$$= (k + 1)(k^2 + 4k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2$$

Điều này chứng tỏ mệnh đề đúng với $n = k + 1$

Vậy: $1.4 + 2.7 + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$ đúng

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$

c) * Khi $n = 1$. $VT = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$, $VP = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Suy ra: $VT = VP$: mệnh đề đúng

* Giả sử: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

Suy ra: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Điều này chứng tỏ mệnh đề đúng với $n = k + 1$

Vậy: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$

d) * Khi $n = 1$, $VT = \frac{1+2}{1(1+1).2^1} = \frac{3}{4}$,

$$VP = 1 - \frac{1}{(1+1).2^1} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Suy ra $VT = VP$; mệnh đề đúng

* Giả sử:

$$\frac{3}{1.2.2} + \frac{4}{2.3.2^2} + \dots + \frac{k+2}{k(k+1).2^k} = 1 - \frac{1}{(k+1).2^k}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } & \frac{3}{1.2.3} + \dots + \frac{k+2}{k(k+1).2^k} + \frac{k+3}{(k+1)(k+2).2^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{2(k+2) - k - 3}{(k+1)(k+2).2^{k+1}} \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{k+1}{(k+1)(k+2).2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{(k+2).2^{k+1}}$$

Điều này chứng tỏ mệnh đề đúng với $n = k + 1$

Vậy: $\frac{3}{1.2.2} + \frac{4}{2.3.2^2} + \dots + \frac{n+2}{n(n+1).2^n} = 1 - \frac{1}{(n+1).2^n}$

(đpcm)

e) Đặt $A(n) = n^3 + 2n$

* Khi $n = 1$, $A(1) = 1^3 + 2.1 = 3 : 3$ mệnh đề đúng

* Giả sử $A(k) = (k^3 + 2k) : 3$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } A(k+1) &= (k+1)^3 + 2(k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 5k + 3 \\ &= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)\end{aligned}$$

Vì $A(k) = (k^3 + 2k) : 3$ và $3(k^2 + k + 1) : 3$

Suy ra: $A(k+1) : 3$

Vậy $n^3 + 2n : 3$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$

f) Đặt $A(n) = 4^n + 15n - 1$

* Khi $n = 1$, $A(1) = 4 + 15 - 1 = 18 : 9$, mệnh đề đúng

* Giả sử $A(k) = (4^k + 15k - 1) : 9$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } A(k+1) &= 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 \\ &= 4.4^k + 15k + 14 \\ &= 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18 \\ &= 4.A(k) - 9(5k - 2)\end{aligned}$$

Vì $A(k) : 9$ và $9(5k - 2) : 9$

Suy ra $A(k+1) : 9$

* Vậy $(4^n + 15n - 1) : 9$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$

g) Đặt $A(n) = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

* Khi $n = 1$, $A(1) = 3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35 : 7$; mệnh đề đúng

* Giả sử $A(k) = (3^{2k+1} + 2^{k+2}) : 7$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } A(k+1) &= 3^{2k+3} + 2^{k+3} = 9 \cdot 3^{2k+1} + 2 \times 2^{k+2} \\ &= 2(3^{2k+1} + 2^{k+2}) + 7 \cdot 3^{2k+1} \\ &= 2.A(k) + 7 \cdot 3^{2k+1}\end{aligned}$$

Vì $A(k) : 7$ và $7 \times 3^{2k+1} : 7$

Suy ra $A(k+1) : 7$

* Vậy $3^{2n+1} + 2^{n+2} : 7$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$

h) Ta có: $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n = 3^n(12^n + 10)$

Đặt $A(n) = 12^n + 10$

* Khi $n = 1$. Ta có $A(1) = 12 + 10 = 22 : 11$

* Giả sử $A(k) = 12^k + 10$ chia hết cho 11

$$\begin{aligned}\text{Ta có } A(k+1) &= 12^{k+1} + 10 \\ &= 12(12^k + 10) - 10 = 12.A(k) - 110\end{aligned}$$

Do $A(k) : 11$ và $110 : 11$

Suy ra $A(k+1) : 11$

Theo đó $A(n) = (12^n + 10) : 11, \forall n \in \mathbb{N}$

Vậy $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ chia hết cho 11.

2. Chứng minh với mọi số nguyên dương n ; ta có:

a) $n^n \geq (n+1)^{n+1}$

b) $(n!)^2 \geq n^n (*)$

Giải

a) Ta có: $n^n \geq (n+1)^{n-1} \Leftrightarrow n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \quad (1)$

* Khi $n = 1$ ta có: $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^0 = 1 \leq 1$

Suy ra (1) đúng khi $n = 1$

* Giả sử $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k-1} \leq k$ đúng $\forall k > 1$

Ta có: $\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

$$\begin{aligned} \text{Và } \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \\ &= \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k-1} \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot k = k + 1 \end{aligned}$$

Suy ra: $\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k < k + 1$

Tức là (1) đúng khi $n = k + 1$

Vậy (1) được chứng minh

Hay: $n^n \geq (n+1)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) * Khi $n = 1$ ta có $(1!)^2 = 1 \geq 1^1$

Suy ra: (*) đúng với $n = 1$

* Giả sử $(k!)^2 \geq k^k$ đúng $\forall k > 1$

Ta có: $[(k+1)!]^2 = (k+1)^2 \cdot (k!)^2 \geq (k+1)^2 \cdot k^k$

Theo chứng minh câu a, ta có $k^k \geq (k+1)^{k-1}$

Suy ra: $[(k + 1)!]^2 \geq (k + 1)^2 \cdot (k + 1)^{k-1} = (k + 1)^{k+1}$

Suy ra: (*) đúng khi $n = k + 1$

Vậy $(n!)^2 \geq n^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Chứng minh với mọi số n nguyên dương, ta có:

a) $1.2 + 2.3 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

b) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2} \right)^2$ c) $\frac{2x - 1}{\sqrt{x|x| - 4}}$

2. Chứng minh với mọi số n nguyên dương, ta có:

a) $n^3 + 5n : 6$

b) $3^n + 2n - 1 : 4$

c) $5^n + 4n - 1 : 8$

3. Chứng minh với mọi số nguyên dương n , ta có

a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$

b) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

4. Chứng minh với mọi số nguyên dương n , ta có:

a) $10^n + 18n - 28$ chia hết cho 9

b) $n^n - 1$ chia hết cho $n - 1$ ($n > 2$)

5. Chứng minh với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$\text{a) } 2^n \geq n + 1 \qquad \text{b) } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

$$\text{c) } n + 1 \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

BÀI 3: TẬP HỢP

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Tập hợp và phần tử

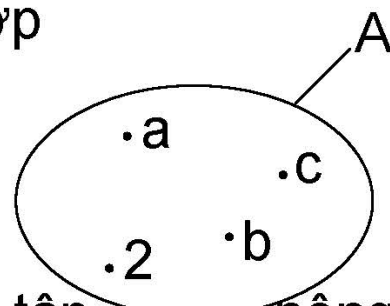
* Ta nói tập hợp A bao gồm các phần tử a, b, c, 2 được ghi là: $A = \{a, b, c, 2\}$

• Mỗi phần tử của tập hợp A được kí hiệu: $a \in A$, ... và đọc là: “a thuộc A”...

• x không là phần tử của A được kí hiệu: $x \notin A$ và đọc là: “x không thuộc A”.

* Biểu đồ Ven biểu diễn tập hợp

$$A = \{a, b, c, 2\}$$



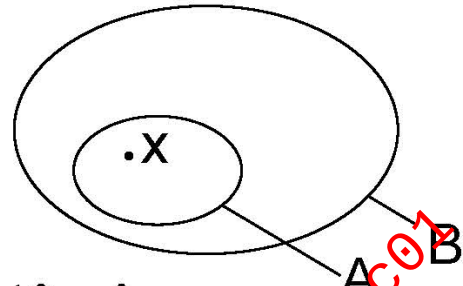
* Tập hợp rỗng: để chỉ loại tập hợp không có phần tử và kí hiệu là $\emptyset$

• Chẳng hạn: $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 = 0\}$ được gọi là tập rỗng

2. Tập hợp con – Tập hợp bằng nhau

a) Tập hợp con

$$* A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$



* $A \subset A$ với mọi tập A

* Quy ước: $\emptyset \subset A$, với mọi tập A

Theo đó ta cũng có: $\emptyset \subset \emptyset$

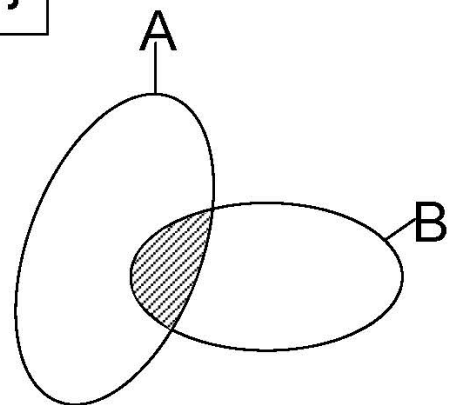
* Họ các tập hợp con của tập hợp X là tập hợp $P(X) = \{A / A \subset X\}$

b) Tập hợp bằng nhau $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
 $\Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$

3. Các phép toán về tập hợp

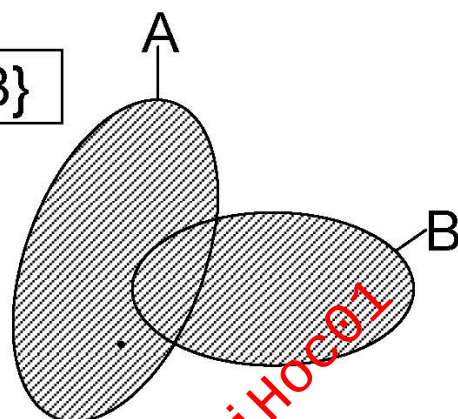
a) Phép giao

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

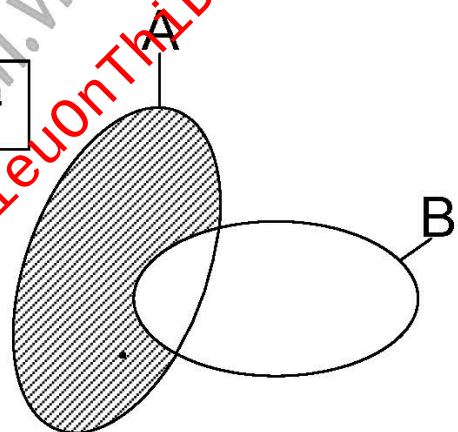


b) *Phép hợp*

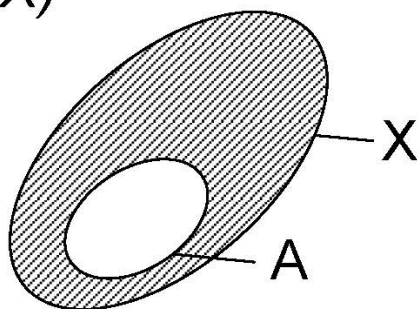
$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

c) *Hiệu của hai tập hợp*

$$A \setminus B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

d) *Phần bù của A trong X (A ⊂ X)*

$$C_X A = \{x \in X / x \notin A\}$$



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Vấn đề 1: XÁC ĐỊNH TẬP HỢP

a) **Ví dụ 1:** Xác định tập hợp bằng cách liệt kê phần tử

$$A = \{x \in \mathbb{N} / (2x^2 - 3x)(x^2 - x - 2)(3x^2 - 10x + 3) = 0\}$$

Giải

$$\text{Ta có: } (2x^2 - 3x)(x^2 - x - 2)(3x^2 - 10x + 3) = 0, x \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \vee x^2 - x - 2 = 0$$

$$\vee 3x^2 - 10x + 3 = 0, x \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{2} \vee x = -1 \vee x = 2$$

$$\vee x = \frac{1}{3} \vee x = 3, x \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = 3$$

$$\text{Vậy } A = \{0, 2, 3\}$$

b) **Ví dụ 2:** Xác định tập hợp bằng cách nêu tính chất

$$\bullet A = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\}$$

$$\bullet B = \{0, 3, 8, 15, 24\}$$

Giải

$$\bullet \text{Ta để ý mỗi phần tử của } A \text{ có dạng } \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{nên tập hợp } A \text{ có thể viết lại: } A = \{x / x = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\}$$

- Tập hợp B có thể viết lại dưới dạng:

$$B = \{x / x = n^2 - 1; n \in \mathbb{N}^* \wedge n \leq 5\}$$

- c) **Ví dụ 3:** Xác định $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $P(A)$
 Với $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 1, 2, 3\}$

Giải

- $A \cap B = \{-1, 1\}$
- $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
- $A \setminus B = \{-2, 0\}$
- $B \setminus A = \{2, 3\}$
- $P(A) = \{\emptyset, \{-2\}, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-2, -1\},$
 $\{-2, 0\}, \{-2, 1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\},$
 $\{0, 1\}, \{-2, -1, 0\}, \{-2, -1, 1\},$
 $\{-2, 0, 1\}, \{-1, 0, 1\}, \{-2, -1, 0, 1\}\}$

2. Vấn đề 2: CHỨNG MINH TẬP HỢP CON – TẬP HỢP BẰNG NHAU

- * Để chứng minh $A \subset B$, ta lấy x tùy ý trong A ($x \in A$) rồi chứng minh $x \in B$
- * Để chứng minh $A = B$, ta chứng minh $A \subset B$ và $B \subset A$ hay: $x \in A \Leftrightarrow x \in B$

- a) **Ví dụ 1:** Cho $C \subset A \cup B$

Chứng minh rằng, nếu $C \cap A = \emptyset$ thì $C \subset B$

Giải

Lấy x tùy ý thuộc C, ta phải chứng minh $x \in B$.
 Thật vậy, $x \in C$ do $C \subset A \cup B \Rightarrow x \in A \cup B$

$$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

+ Nếu $x \in A$ thì do $x \in C \Rightarrow x \in A \cap C$: điều này mâu thuẫn với giả thiết

$$C \cap A = \emptyset$$

+ Như vậy $x \in B$ suy ra $C \subset B$ (đpcm)

b) **Ví dụ 2:** Cho $A \subset X$. Chứng minh: $A \cup C_X A = X$

Giải

Ta phải chứng minh $A \cup C_X A \subset X$ và $X \subset A \cup C_X A$

i) $A \cup C_X A \subset X$

$$\text{Lấy tùy ý } x \in A \cup C_X A \Rightarrow (x \in A \vee x \in C_X A)$$

• Nếu $x \in A$ thì do $A \subset X \Rightarrow x \in X$

• Nếu $x \in C_X A \Rightarrow (x \in X \wedge x \notin A) \Rightarrow x \in X$

$$\text{Như vậy } A \cup C_X A \subset X \quad (1)$$

ii) $X \subset A \cup C_X A$

Lấy tùy ý $x \in X$, với $A \subset X$ ta xét hai khả năng là $x \in A \vee x \notin A$

$$\Leftrightarrow [x \in A \vee x \in C_X A] \Leftrightarrow x \in A \cup C_X A$$

$$\text{Như vậy ta cũng có } X \subset A \cup C_X A \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $A \cup C_X A = X$ (đpcm)

C. GIẢI BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Xác định tập hợp bằng cách liệt kê phần tử

$$a) A = \{x \in \mathbb{Q} / (x - 1)(3x^2 - 11x - 4) = 0\}$$

$$b) B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 > 6 \wedge x < 8\}$$

$$c) C = \{x \in \mathbb{N} / \sqrt{x} \leq 4 \wedge x \text{ là bội số của } 3\}$$

Giải

$$a) \text{ Ta có: } x \in \mathbb{Q}: (x-1)(3x^2-11x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}: x-1=0 \vee 3x^2-11x-4=0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}: x=1 \vee x=-\frac{1}{3} \vee x=4$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-\frac{1}{3} \vee x=4$$

$$\text{Vậy } A = \{-\frac{1}{3}, 1, 4\}$$

$$b) x \in \mathbb{N}: x^2 > 6 \wedge x < 8$$

$$\Leftrightarrow x=3 \vee x=4 \vee x=5 \vee x=6 \vee x=7$$

$$\text{Vậy } B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$c) x \in \mathbb{N}: \sqrt{x} \leq 4 \wedge x \text{ là bội số của } 3$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{N}: 0 \leq x \leq 16 \wedge x = 3k, k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow x=0 \wedge x=3 \vee x=6 \vee x=9$$

$$\vee x=12 \vee x=15$$

$$\text{Vậy } C = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$$

2. Xác định tập hợp bằng cách nêu tính chất

$$a) A = \{0, 2, 5\}$$

$$b) B = \{3, 9, 27, 81\}$$

$$c) C = \{4, 16, 36, 64, 100\}$$

Giải

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} / x(x^2 - 7x + 10) = 0\}$
 b) $B = \{x / x = 3^n, n \in \mathbb{N}^* \wedge n \leq 4\}$
 c) $C = \{x / x = 4n^2, n \in \mathbb{N}^* \wedge n \leq 5\}$

3. Cho $E = \{a, b, c, d\}$. Xác định $P(E)$. Nhận xét gì về số phần tử của $P(E)$.

Giải

$P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, E\}$

* **Nhận xét:** Số phần tử của $P(E)$ bằng 2 lũy thừa của số phần tử của E , và bằng $2^4 = 16$.

- Nếu E có n phần tử thì $P(E)$ có 2^n phần tử.

4. Xác định $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$, biết rằng:
 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}; B = \{x / x = 2^k, k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 3\}$

Giải

Trước tiên ta liệt kê các phần tử của tập B là
 $B = \{1, 2, 4, 8\}$ khi đó:

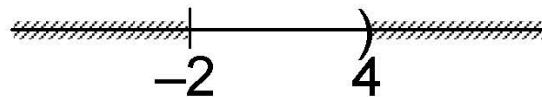
- $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$
- $A \cap B = \{1, 2, 4\}$
- $A \setminus B = \{0, 3\}$
- $B \setminus A = \{8\}$

5. Xác định $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, biết rằng:
 $A = [-2, 4)$ và $B = (0, 5]$

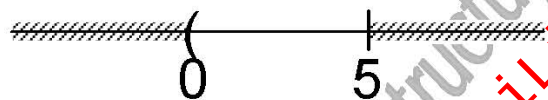
Giải

Ta có:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}: -2 \leq x < 4$$

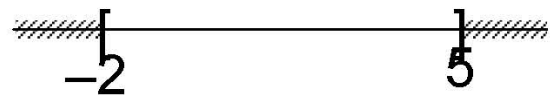


$$x \in B \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}: 0 < x \leq 5$$

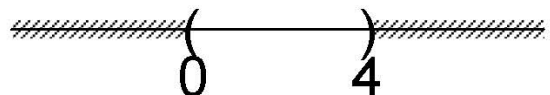


Theo đó:

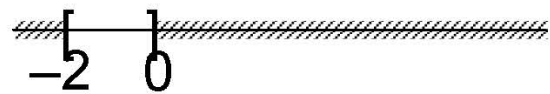
$$\bullet A \cup B = [-2, 5]$$



$$\bullet A \cap B = (0, 4)$$



$$\bullet A \setminus B = [-2, 0]$$



$$\bullet B \setminus A = [4, 5]$$



6. Xác định $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C_{\mathbb{R}}A$, $C_{\mathbb{R}}B$, biết rằng:

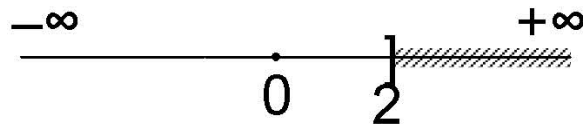
a) $A = (-\infty, 2]$, $B = (0, +\infty)$

b) $A = [-4, 0]$, $B = (1, 3]$

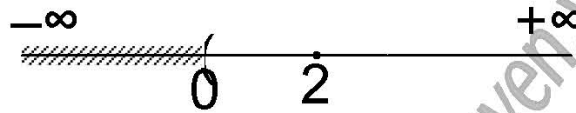
Giải

a) Ta có:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}: x \leq 2$$



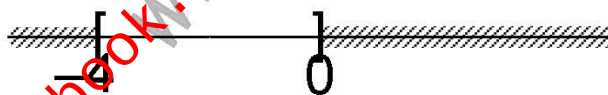
$$x \in B \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}: 0 < x$$



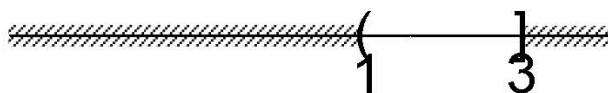
- $A \cup B = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
- $A \cap B = (0, 2]$
- $A \setminus B = (-\infty, 0]$
- $B \setminus A = (2, +\infty)$
- $C_{\mathbb{R}}A = (2, +\infty)$
- $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty, 0]$

b) Ta có:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}: -4 \leq x \leq 0$$



$$x \in B \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}: 1 < x \leq 3$$



- $A \cup B = [-4, 0] \cup (1, 3]$
- $B \setminus A = (1, 3]$

- $A \cap B = \emptyset$
- $C_R A = (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$
- $A \setminus B = [-4, 0]$
- $C_R B = (-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$

7. Cho $X = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 10\}$; $A, B \subset X$ sao cho:
 $A \cap B = \{4, 6, 9\}$; $A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$
 $B \cup \{4, 8\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 Xác định tập hợp A và B.

Giải

Ta có $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Do $A \cap B = \{4, 6, 9\}$

$\Rightarrow A = \{4, 6, 9\} \cup E$ và $B = \{4, 6, 9\} \cup F$

Với 3 tập $\{4, 6, 9\}$, E, F con của X và đôi một rời nhau

Khi đó:

• $\{4, 6, 9\} \cup E \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ hay
 $E \cup \{3, 5\} = \{1, 3, 5, 8\}$ (1)

• $\{4, 6, 9\} \cup F \cup \{4, 8\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ hay
 $F \cup \{8\} = \{2, 3, 5, 7, 8\}$ (2)

Từ (2) ta thấy F phải chứa 3, 5, nên theo (1)

và $E \cap F = \emptyset$ suy ra E không chứa 3, 5 tức là:

$E = \{1, 8\}$ theo đó $F = \{2, 3, 5, 7\}$

Vậy $A = \{1, 4, 6, 8, 9\}$

$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

8. Chứng minh:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $C_X(A \cap B) = C_X A \cup C_X B$

c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Giảia) Lấy x tùy ý, ta có:

$$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\text{Vậy } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

b) Lấy tùy ý $x \in X$. Ta có:

$$x \in C_X(A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B$$

$$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in C_X A \vee x \in C_X B$$

$$\Leftrightarrow x \in C_X A \cup C_X B$$

$$\text{Vậy } C_X(A \cap B) = C_X A \cup C_X B$$

c) Lấy x tùy ý, ta có:

$$x \in A \setminus (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A \setminus B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \wedge (x \in A \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \cap B$$

$$\text{Vậy } A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$$

d) Lấy x tùy ý, ta có:

$$x \in A \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$\text{Vậy } A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

9. Cho $A, B, C \subset X$. Chứng minh:

a) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

b) $P(A \cup B) \subset P(A) \cup P(B)$.

Cho ví dụ để $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$

c) $[(A \cup B) \cap C \subset A] \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

d) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subset C_X A$

e) $[(A \cup C) \subset (B \cup C) \wedge A \cap C = \emptyset] \Rightarrow A \subset B$

f) $A \subset B \Leftrightarrow [(A \cup C) \subset (B \cup C) \wedge (A \cap C) \subset (B \cap C)]$

Giải

a) Lấy X là tập hợp bất kì. Ta có:

$$X \in P(A \cap B) \Leftrightarrow X \subset A \cap B$$

$$\Leftrightarrow X \subset A \wedge X \subset B$$

$$\Leftrightarrow X \in P(A) \wedge X \in P(B)$$

$$\Leftrightarrow X \in P(A) \cap P(B)$$

$$\text{Vậy } P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

b) Lấy X là một tập tùy ý.

Ta có: $X \in P(A) \cup P(B)$

$$\Leftrightarrow X \in P(A) \vee X \in P(B) \Leftrightarrow X \subset A \vee X \subset B$$

• Nếu $X \subset A$ thì $X \subset A \cup B$

• Nếu $X \subset B$ thì $X \subset A \cup B$

Suy ra: $X \in P(A \cup B)$

Vậy $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

* Chọn $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$

Ta có: $P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$ (bạn đọc tự kiểm)

c) Để chứng minh $A \cap B = \emptyset$ ta lấy tùy ý $x \in A$ và cần chứng minh $x \notin B$

Thật vậy: với $x \in A$ do $A = (A \cup B) \cap C_x B$ suy ra

$$x \in A \cup B \wedge x \in C_x B \Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin B$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \text{ (đpcm)}$$

Vậy $A \cap B = \emptyset$

d) Lấy x tùy ý thuộc B .

Ta có: $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \notin A)$

$$\Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in C_x A) \Leftrightarrow B \subset C_x A \text{ (đpcm)}$$

e) Lấy tùy ý $x \in A \Rightarrow x \in A \cup C$

và $x \notin C$ (vì $A \cap C = \emptyset$)

do $A \cup C \subset B \cup C$ suy ra $x \in B \cup C$ mà $x \notin C$ nên $x \in B$

Vậy $A \subset B$

f) * Giả sử $A \subset B$

• Lấy $x \in A \cup C \Rightarrow x \in A \vee x \in C$

+ Nếu $x \in A$ thì do $A \subset B$ suy ra $x \in B$
 $\Rightarrow x \in B \cup C$

+ Nếu $x \in C$ thì hiển nhiên $x \in B \cup C$

Vậy $A \cup C \subset B \cup C$

• Lấy $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \wedge x \in C$

$\Rightarrow x \in B \wedge x \in C$ (do $A \subset B$) $\Rightarrow x \in B \cap C$

Vậy $A \cap C \subset B \cap C$

* Giả sử $A \cup C \subset B \cup C \wedge A \cap C \subset B \cap C$

Lấy $x \in A \Rightarrow x \in A \cup C$
 $\Rightarrow x \in B \cup C \Rightarrow x \in B \vee x \in C$

• Nếu $x \in B$ thì $A \subset B$

• Nếu $x \in C$ thì do $x \in A$ suy ra $x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subset B$

Vậy $A \subset B$

Tóm lại ta luôn có: $A \subset B$

$\Leftrightarrow [(A \cup C) \subset (B \cup C) \wedge (A \cap C) \subset (B \cap C)]$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Xác định tập hợp bằng cách liệt kê phần tử

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} / (x^3 - 3x)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 > 5 \wedge \sqrt{x} \leq 2\}$

c) $C = \{x / x = n^2 - 2n, n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5\}$

2. Xác định tập hợp bằng cách nêu tính chất

a) $A = \{-1, 0, 3, 8, 15, 24\}$

b) $B = \{1, 9, 25, 49, 81\}$

c) $C = \{1, 3, 6, 10, 15, 21\}$

3. Hãy xác định $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ biết rằng:

a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 2, 4\}$

b) $A = [-1, 2]$, $B = \{1, 2\}$. Hãy xác định.

4. Cho $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$. Hãy xác định $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$

5. Chứng minh:

a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

b) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

c) $A \subset B \Leftrightarrow C_X B \subset C_X A$. Với $A, B \subset X$

d) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

6. Chứng minh:

a) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

b) $P(A \setminus B) \subset P(A) \setminus P(B)$

c) $A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$

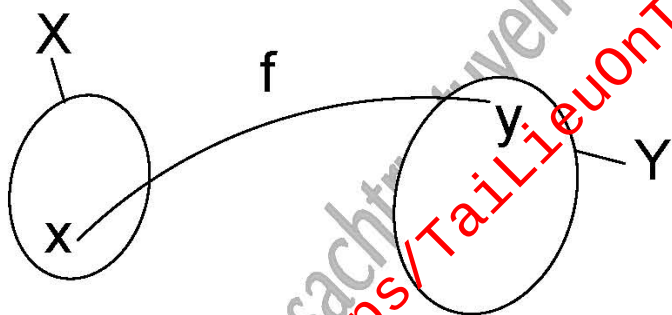
BÀI 4: ÁNH XẠ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa ánh xạ: Cho hai tập hợp X và Y , một ánh xạ f từ X đến Y là một qui tắc cho ứng với mỗi phần tử $x \in X$ một và chỉ một phần tử $y \in Y$

Kí hiệu: $f: X \rightarrow Y$

$$x \mapsto y = f(x)$$



- X gọi là tập nguồn, Y gọi là tập đích
- Phần tử y gọi là ảnh của phần tử x qua ánh xạ f

2. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh của ánh xạ

Cho ánh xạ $f: X \rightarrow Y$

a) f là đơn ánh $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow \forall y \in Y,$

có nhiều nhất một $x \in X$ sao cho $y = f(x)$

b) f là toàn ánh $\Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X: y = f(x)$

c) f là song ánh $\Leftrightarrow f$ là đơn ánh và toàn ánh

$\Leftrightarrow \forall y \in Y, \text{ có duy nhất một } x \in X \text{ sao cho } y = f(x)$

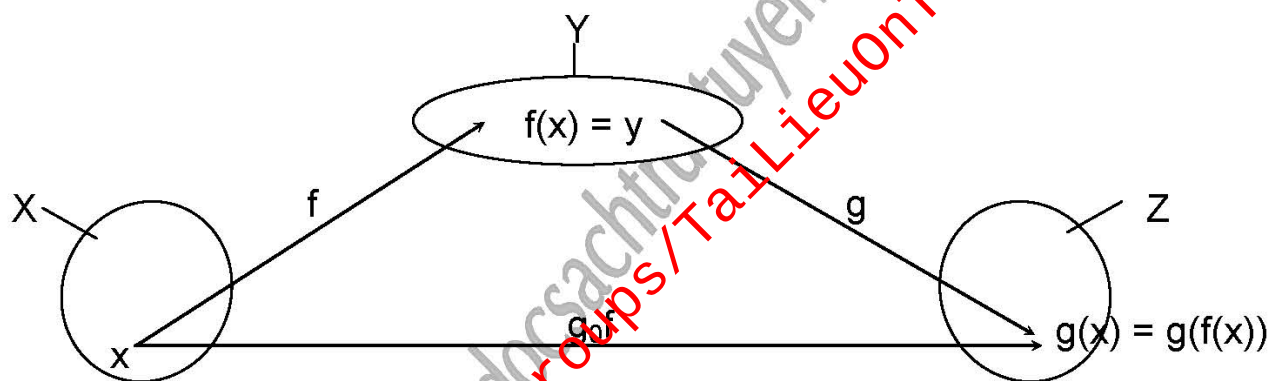
3. Ánh xạ ngược

Cho ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ là một song ánh. Ta nói ánh xạ ngược của f là một ánh xạ $f^{-1}: Y \rightarrow X$ sao cho $f^{-1}(y) = x$ với $f(x) = y$.

4. Ánh xạ tích

Cho hai ánh xạ: $f: X \rightarrow Y$ và $g: Y \rightarrow Z$

Ta nói tích của các ánh xạ f và g là một ánh xạ $g \circ f: X \rightarrow Z$ với $g \circ f(x) = g(f(x))$



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Vấn đề 1: CHỨNG MINH MỘT TƯƠNG ỨNG LÀ ÁNH XẠ

* Trong phần này ta thường xét các tương ứng có dạng $x \in X, y \in Y: F(x, y) = 0$ với $X, Y \subset \mathbb{R}$ tương ứng trên là ánh xạ nếu như $\forall x \in X$. Phương trình $F(x, y) = 0$ có duy nhất 1 nghiệm $y = f(x) \in Y$.

* **Ví dụ:** Trong các tương ứng sau tương ứng nào là ánh xạ

a) $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}: 2xy + 1 - x + y = 0$

b) $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}: x^2 + y^2 = 1$

Giải

a) Ta có: $2xy + 1 - x + y = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)y = x - 1$

Như vậy $\forall x \in \mathbb{Z}$ có duy nhất $y = \frac{x-1}{2x+1} \in \mathbb{R}$ nên

tương ứng này là ánh xạ

b) Từ $x^2 + y^2 = 1$ với $x = 0$ ta thấy phương trình $y^2 = 1$ có hai nghiệm $y = \pm 1 \in \mathbb{R}$ nên tương ứng này không là ánh xạ.

2. Vấn đề 2: XÉT TÍNH ĐƠN ÁNH, TOÀN ÁNH, SONG ÁNH CỦA ÁNH XẠ

Ví dụ: xét tính đơn ánh, toàn ánh, song ánh của ánh xạ sau:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = -x^2 + 2x$

b) $f: (-\infty, 1] \rightarrow (-\infty, 1]: f(x) = -x^2 + 2x$

Giải

a) * Đơn ánh

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ta có: $f(x_1) = f(x_2)$

$\Leftrightarrow -x_1^2 + 2x_1 = -x_2^2 + 2x_2$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 + x_2 - 2 = 0$

Dễ thấy với $x_1 = 0, x_2 = 2$ ta có:

$$x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2) = 0$$

Vậy f không đơn ánh

* Toàn ánh

$\forall y \in \mathbb{R}$. Ta có: $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow y = -x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + y = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) sẽ vô nghiệm nếu $\Delta' = 1 - y < 0$
hay $y > 1$

Vậy f không toàn ánh. Hiển nhiên theo trên f không song ánh

b) * Đơn ánh

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ ta có: $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = 1 \wedge x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Vậy f đơn ánh

* Toàn ánh

$\forall y \in (-\infty, 1]$. Ta có: $y = f(x) \Leftrightarrow y = -x^2 + 2x$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y = 0 \quad (1)$$

(1) có $\Delta' = 1 - y \geq 0$

nên có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{1 - y}$

Trong đó nghiệm $x = 1 - \sqrt{1 - y} \in (-\infty, 1]$

Vậy f là toàn ánh. Theo trên f là một song ánh

3. Vấn đề 3: XÁC ĐỊNH ÁNH XẠ NGƯỢC của ánh xạ $f: X \rightarrow Y$

* Ta chứng minh f là 1 song ánh

* Từ phương trình $y = f(x)$

ta tìm nghiệm $x = f^{-1}(y) \in X$

Suy ra ánh xạ ngược $f^{-1}: Y \rightarrow X$

$$x \mapsto f^{-1}(x)$$

Ví dụ: Xác định ánh xạ ngược

a) $f: [1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 1]: f(x) = -x^2 + 2x$

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}: f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

Giải

a) • $\forall y \in (-\infty, 1]$ phương trình $y = -x^2 + 2x$
hay $x^2 - 2x + y = 0$ có duy nhất một nghiệm

$$x = 1 + \sqrt{1-y} \in [1, +\infty). \text{ Vậy } f \text{ là song ánh}$$

• Ánh xạ ngược là: $f^{-1}: (-\infty; 1] \rightarrow [1, +\infty)$

$$x \mapsto 1 + \sqrt{1-x}$$

b) $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Ta có: $y = \frac{2x-1}{x-2} \Leftrightarrow xy - 2y = 2x - 1$

$$\Leftrightarrow (y-2)x = 2y-1$$

có nghiệm duy nhất $x = \frac{2y-1}{y-2} \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Vậy f là song ánh

Ánh xạ ngược là $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$x \mapsto \frac{2x-1}{x-2}$$

* Ở bài này ta thấy $f^{-1} = f$

4. Vấn đề 4: XÁC ĐỊNH ÁNH XẠ TÍCH

Với hai ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ và $g: Y \rightarrow Z$

Ta xác định được tích $g.f: X \rightarrow Z$

Với $g \circ f(x) = g[f(x)]$

Ví dụ: Cho $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $g(x) = x^2$

Xác định $g.f$ và $f \circ g$ và $f \circ f$

Giải

$$* g \circ f(x) = g[f(x)] = f^2(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)^2 = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$* f \circ g(x) = f[g(x)] = \frac{g(x)}{\sqrt{g^2(x)+1}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$$

$$* f \circ f(x) = f[f(x)]$$

$$= \frac{f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}+1}} = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

C. GIẢI BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Trong các tương ứng sau, tương ứng nào là ánh xạ:

a) $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}: 2x - 3y = 5$

b) $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}: 2xy + x - y + 3 = 0$

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, y \in \mathbb{R}: yx^2 - x - y = 0$

Giải

a) Ta có: $2x - 3y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{2x - 5}{3}$

Do đó $\forall x \in \mathbb{R}$ có duy nhất $y = \frac{2x - 5}{3} \in \mathbb{R}$ nên tương ứng này là ánh xạ

b) Ta có: $2xy + x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow (1 - 2x)y = x + 3$

Tại $x = \frac{1}{2}$ không xác định được y nên tương ứng này không là ánh xạ

c) Ta có: $yx^2 - x - y = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)y = x$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ta xác định được duy nhất $y = \frac{x}{x^2 - 1} \in \mathbb{R}$ nên tương ứng này là ánh xạ.

2. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ với $f(x) = -x^2 + 6x$

a) Tính $f(0), f(1), f(2a), f(a - 6), f(a^2)$

b) Xác định các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 5\}$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 10\}$$

$$C = \{y / y = f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

Giải

a) $f(0) = -0^2 + 6.0 = 0$

$$f(1) = -1^2 + 6.1 = 5$$

$$f(2a) = -(2a)^2 + 6(2a) = -4a^2 + 12a$$

$$f(a-6) = -(a-6)^2 + 6(a-6) = -a^2 + 18a - 72$$

$$f(a^2) = -(a^2)^2 + 6.a^2 = -a^4 + 6a^2$$

b) Ta có:

- $x \in A \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}: f(x) = 5$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}: -x^2 + 6x = 5$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}: x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$$

Vậy $A = \{1, 5\}$.

- $x \in B \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}: f(x) = 10$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}: -x^2 + 6x = 10$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}: x^2 - 6x + 10 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Vậy $B = \emptyset$

- $y = f(x), x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x^2 + 6x = y \Leftrightarrow x^2 - 6x + y = 0 \quad (1)$

(1) có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta' = 9 - y \geq 0$

$$\Leftrightarrow y \leq 9. \text{ Vậy } C = (-\infty, 9]$$

3. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ với $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

a) Tính $f(0)$, $f(a+1)$, $f\left(\frac{t-3}{t-2}\right)$

b) Tìm tập hợp $A = \{y / y = f(x), x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$

Giải

$$a) * f(0) = \frac{2 \cdot 0 + 3}{0 - 1} = -3$$

$$* f(a+1) = \frac{2(a+1)+3}{(a+1)-1} = \frac{2a+5}{a} \text{ với } a \neq 0$$

$$* f\left(\frac{t-3}{t-2}\right) = \frac{2\left(\frac{t-3}{t-2}\right)+3}{\frac{t-3}{t-2}-1} = 12-5t \text{ với } t \neq 2$$

$$b) y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x+3}{x-1} \Leftrightarrow xy - y = 2x + 3 \\ \Leftrightarrow (y-2)x = y+3 (*)$$

$$(*) \text{ có nghiệm } x \in \mathbb{R} \text{ và } x > 0 \text{ khi } \begin{cases} y-2 \neq 0 \\ \frac{y+3}{y-2} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+3 > 0 \\ y-2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y+3 < 0 \\ y-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow y > 2 \vee y < -3$$

$$\text{Vậy } A = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

4. Xét tính đơn ánh, toàn ánh, song ánh của các ánh xạ

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x^2 + x + 1$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x^3 + 1$

c) $f: [4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = -2x^2 + 2x + 3$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

e) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \frac{4x}{x-1}$

Giải

a) * Đơn ánh

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow x_1^2 + x_1 + 1 = x_2^2 + x_2 + 1 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

Chọn $x_1 = -1, x_2 = 0$ ta có $f(x_1) = f(x_2) = 1 \wedge x_1 \neq x_2$ nên f không đơn ánh

* Toàn ánh

Xét phương trình $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = y \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - y = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1 - y) = 4y - 3$$

Chọn $y = 0$ ta có $\Delta = -3 < 0$ nên phương trình $y = f(x)$ vô nghiệm. Vậy f không toàn ánh.

b) * Đơn ánh

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Vậy f đơn ánh

* Toàn ánh

$$\forall y \in \mathbb{R}: y = f(x) \Leftrightarrow x^3 + 1 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-1} \in \mathbb{R}$$

Vậy f toàn ánh

Theo trên f là song ánh

c) * Đơn ánh

$$\forall x_1, x_2 \in [4, +\infty): f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow -2x_1^2 + 2x_1 + 3 = -2x_2^2 + 2x_2 + 3$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ (vì } x_1, x_2 \geq 4 \text{) nên } x_1 + x_2 - 1 \neq 0)$$

Vậy f đơn ánh

* Toàn ánh

$$\forall y \in \mathbb{R}: y = f(x) \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 3 = y$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + y - 3 = 0$$

$$\Delta' = 1 - 2(y - 3) = 7 - 2y$$

Chọn $y = 4$ ta có $\Delta' < 0$ nên phương trình $y = f(x)$ vô nghiệm. Vậy f không toàn ánh

Theo trên f không song ánh

d) * Đơn ánh

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1^2 + 1} = \frac{x_2}{x_2^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2^2 + x_1 = x_1^2 x_2 + x_2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 1) = 0$$

Chọn $x_1 = \frac{1}{2} \neq x_2 = 2$ ta có $f(x_1) = f(x_2) = \frac{2}{5}$

Vậy f không đơn ánh.

* Toàn ánh

$\forall y \in \mathbb{R}$ xét phương trình $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow yx^2 - x + y = 0$$

$$\Delta = 1 - 4y^2$$

Chọn $y = 1$ ta có $\Delta = -3 < 0$ nên phương trình $y = f(x)$ vô nghiệm. Vậy f không toàn ánh.

e) * Đơn ánh

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}: f(x_1) = f(x_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{4x_1}{x_1 - 1} = \frac{4x_2}{x_2 - 1} \Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 = x_1x_2 - x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Vậy f đơn ánh.

* Toàn ánh

$\forall y \in \mathbb{R}$ xét phương trình $y = f(x) \Leftrightarrow y = \left| \begin{array}{cc} a & c \\ a' & c' \end{array} \right|$

$$\Leftrightarrow xy - 4x = y \Leftrightarrow (y - 4)x = y$$

Chọn $y = 4$ ta có phương trình $y = f(x)$ vô nghiệm
 Vậy f không toàn ánh.

5. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa tính chất

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}: x > x' \Rightarrow f(x) < f(x'). \text{ Cho } a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b.$$

Chứng minh f cũng là một ánh xạ từ khoảng (a, b) vào khoảng $(f(b), f(a))$ và f có là song ánh không?

Giải

$\forall x \in (a, b)$ ta có $a < x < b$ và do $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ nên ta xác định được duy nhất phần tử $y = f(x)$ do $a < x < b \Rightarrow f(a) > f(x) > f(b) \Rightarrow y \in (f(b), f(a))$

Vậy $f: (a, b) \rightarrow (f(b), f(a))$ là ánh xạ

* f chưa phải là song ánh

Thật vậy, ta xét ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Với } f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{nếu } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$$

Thỏa tính chất $\forall x, x' \in \mathbb{R}: x > x' \Rightarrow f(x) < f(x')$

Chọn $a = -1, b = 1$ ta có: $f(-1) = 2, f(1) = -1$

Khi đó ánh xạ $f: (-1, 1) \rightarrow (-1, 2)$ không phải toàn ánh

Vì $\exists y = \frac{1}{2} \in (-1, 2)$ nhưng phương trình:

$$+ -x + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ không có nghiệm âm}$$

$$+ -x^2 = \frac{1}{2}: \text{ không có nghiệm dương}$$

Tức là phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ không có nghiệm

$x \in (-1, 1)$

6. Cho $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

a) Định a để $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, a]$ là toàn ánh

b) Định b để $f: [b, +\infty) \rightarrow (-\infty, 3]$ là đơn ánh

Giải

a) • $\forall y \in (-\infty, a]$ ta có $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow y = -x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + y - 3 = 0 \quad (*)$$

$$(*) \text{ có } \Delta' = 1 - y + 3 = 4 - y$$

* Có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 4$

Như vậy ta phải chọn $a \leq 4$ thì $\forall y \in (-\infty, a]$ phương trình $y = f(x)$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$

• Và $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, a]$ là ánh xạ khi và chỉ khi

$$y = -x^2 - 2x + 3 \in (-\infty, a] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 \leq a, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + a - 4 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \geq 4$$

$$\underline{\text{Tóm lại:}} \quad f \text{ là ánh xạ, toàn ánh} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 4 \\ a \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = 4$$

b) • $f: [b, +\infty) \rightarrow (-\infty, 3]$ là ánh xạ khi và chỉ khi

$$y = -x^2 - 2x + 3 \in (-\infty, 3], \quad \forall x \in [b, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 \leq 3, \quad \forall x \in [b, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 0, \quad \forall x \in [b, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases}, \quad \forall x \in [b, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \vee x \leq -2, \forall x \in [b, +\infty)$$

Như vậy ta phải chọn $b \geq 0$ thì $f: [b, +\infty) \rightarrow (-\infty, 3]$ là ánh xạ

$$\bullet \forall x_1, x_2 \in [b, +\infty). \text{ Ta có: } f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow -x_1^2 - 2x_1 + 3 = -x_2^2 - 2x_2 + 3$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ (vì } x_1, x_2 \geq b \geq 0 \text{ nên } x_1 + x_2 + 2 > 0)$$

Tóm lại: $b \geq 0$ thì $f: [b, +\infty) \rightarrow (-\infty, 3]$ là một ánh xạ, đơn ánh.

7. Chứng minh f là song ánh và xác định ánh xạ ngược

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = 3 - 2x$

b) $f: (-\infty, 0] \rightarrow [4, +\infty): f(x) = x^2 + 4$

c) $f: [1, +\infty) \rightarrow [-1, +\infty): f(x) = x^2 - 2x$

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}: f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$

e) $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty): f(x) = \sqrt{x}$

Giải

a) $\bullet \forall x \in \mathbb{R}$ ta có duy nhất $y = 3 - 2x \in \mathbb{R}$

- $\forall y \in \mathbb{R}$ phương trình: $y = 3 - 2x$ có một nghiệm duy nhất $x = \frac{3 - y}{2} \in \mathbb{R}$

Vậy f là ánh xạ, song ánh

- Ánh xạ ngược $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3 - x}{2}$$

- b) • $\forall x \in (-\infty, 0]$ ta có duy nhất $y = x^2 + 4 \in [4, +\infty)$

- $\forall y \in [4, +\infty)$ phương trình $y = x^2 + 4$

$$\Leftrightarrow x^2 = y - 4 \geq 0 \text{ (do } y \geq 4)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{y - 4} \text{ có duy nhất một nghiệm}$$

$$x = -\sqrt{y - 4} \in (-\infty, 0]$$

Vậy $f: (-\infty, 0] \rightarrow [4, +\infty)$ là ánh xạ, song ánh

Ánh xạ ngược là:

$$f^{-1}: [4, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0]; x \mapsto -\sqrt{x - 4}$$

- c) • Ta có: $f(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$

Nên $\forall x \in [1, +\infty)$ có duy nhất $y = x^2 - 2x \in [-1, +\infty)$

- $\forall y \in [-1, +\infty)$ phương trình $y = x^2 - 2x$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - y = 0 \text{ có } \Delta' = 1 + y \geq 0 \text{ (do } y \geq -1)$$

nên có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{1 + y}$ và có duy nhất 1

nghiệm $x = 1 + \sqrt{1 + y} \in [1, +\infty)$

Vậy $f: [1, +\infty) \rightarrow [-1, +\infty)$ là ánh xạ song ánh

- Ánh xạ ngược: $f^{-1}: [-1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$

$$x \mapsto 1 + \sqrt{1+x}$$

- d) • $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ có duy nhất $y = \frac{3x+1}{x-1} \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

- $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ phương trình: $y = \frac{3x+1}{x-1}$

$$\Leftrightarrow xy - 3x = y + 1 \Leftrightarrow (y-3)x = y+1 \text{ có nghiệm duy nhất } x = \frac{y+1}{y-3} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Vậy $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$ là ánh xạ song ánh

- Ánh xạ ngược $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-3}$$

- e) • $\forall x \in [0; +\infty)$ có duy nhất $y = \sqrt{x} \in [0, +\infty)$

- $\forall y \in [0, +\infty)$ phương trình: $y = \sqrt{x}$ có nghiệm duy nhất $x = y^2 \in [0, +\infty)$

Vậy $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ là ánh xạ song ánh

- Ánh xạ ngược $f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

$$x \mapsto x^2$$

8. Hãy xác định $g \circ f$, $f \circ g$, $g \circ g$ trong các trường hợp sau:

a) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ với $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = x^2 + 1$

b) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ với $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$, $g(x) = x^3 - 4$

c) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ với $f(x) = \frac{2x+1}{3x^2+1}$, $g(x) = \frac{1}{3x^2+1}$

Giải

a) • $g \circ f(x) = g[f(x)] = f^2(x) + 1 = (2x - 4)^2 + 1$
 $= 4x^2 - 16x + 17$

• $f \circ g(x) = f[g(x)] = 2 \cdot g(x) - 4 = 2(x^2 + 1) - 4 = 2x^2 - 2$

• $g \circ g(x) = g[g(x)] = g^2(x) + 1$
 $= (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$

b) • $g \circ f(x) = g[f(x)] = f^3(x) - 4 = (\sqrt[3]{x^2 + 1})^3 - 4 = x^2 - 3$

• $f \circ g(x) = f[g(x)] = \sqrt[3]{g^2(x) + 1} = \sqrt[3]{(x^3 - 4)^2 + 1}$

• $g \circ g(x) = g[g(x)] = g^3(x) - 4 = (x^3 - 4)^3 - 4$

c) • $g \circ f(x) = g[f(x)] = \frac{1}{3f^2(x) + 1} = \frac{1}{3\left(\frac{2x+1}{3x^2+1}\right)^2 + 1}$

• $f \circ g(x) = f[g(x)] = \frac{2g(x) + 1}{3 \cdot g^2(x) + 1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3x^2+1} + 1}{3\left(\frac{1}{3x^2+1}\right)^2 + 1}$

$$= \frac{2(3x^2 + 1) + (3x^2 + 1)^2}{3 + (3x^2 + 1)^2}$$

9. Cho $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\text{Với } f(x) = 2x, g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{nếu } x \text{ chẵn} \\ \frac{x+1}{2} & \text{nếu } x \text{ lẻ} \end{cases}$$

- a) Xét tính toàn ánh, đơn ánh của f, g
 b) Xác định $g \circ f, f \circ g, g \circ g$

Giải

a) * Xét tính toàn ánh, đơn ánh của f

- $\forall x \in \mathbb{N}$ ta có duy nhất $y = 2x \in \mathbb{N}$, f là ánh xạ
- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}: f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Vậy f là đơn ánh

- Chọn $y = 5$ ta có $y = f(x) \Leftrightarrow 5 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$

Vậy f không toàn ánh

* Xét tính toàn ánh, đơn ánh của g

- $\forall x \in \mathbb{N}$

+ Nếu x chẵn có duy nhất $y = \frac{x}{2} \in \mathbb{N}$

+ Nếu x lẻ có duy nhất $y = \frac{x+1}{2} \in \mathbb{N}$

Vậy g là ánh xạ

- $\forall y \in \mathbb{N}$ xét phương trình $y = g(x)$

+ $y = \frac{x}{2}$ có nghiệm $x = 2y$ chẵn

+ $y = \frac{x+1}{2}$ có nghiệm $x = 2y - 1$ lẻ

Vậy g là toàn ánh

- Chọn $x_1 = 2, x_2 = 1$ ta có $x_1 \neq x_2 \wedge g(x_1) = g(x_2) = 1$

Vậy g không đơn ánh

b) • $g \circ f(x) = g[f(x)]$

Vì $f(x) = 2x$ chẵn $\forall x \in \mathbb{N}$ nên $g[f(x)] = \frac{f(x)}{2} = \frac{2x}{2} = x$

Vậy $g \circ f(x) = x$

- $f \circ g(x) = f[g(x)] = 2.g(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \text{ chẵn} \\ x+1 & \text{nếu } x \text{ lẻ} \end{cases}$

- $g \circ g(x) = g[g(x)] = \begin{cases} \frac{g(x)}{2} & \text{nếu } g(x) \text{ chẵn} \\ \frac{g(x)+1}{2} & \text{nếu } g(x) \text{ lẻ} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{nếu } x \text{ chia hết cho } 4 \\ \frac{x+1}{4} & \text{nếu } x \text{ chia cho } 4 \text{ dư } 3 \\ \frac{\frac{x}{2}+1}{2} = \frac{x+2}{4} & \text{nếu } x \text{ chia cho } 4 \text{ dư } 2 \\ \frac{\frac{x+1}{2}+1}{2} = \frac{x+3}{4} & \text{nếu } x \text{ chia cho } 4 \text{ dư } 1 \end{cases} \\
 & = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{nếu } x = 4k \\ \frac{x+1}{4} & \text{nếu } x = 4l + 3 \\ \frac{x+2}{4} & \text{nếu } x = 4m + 2 \\ \frac{x+3}{4} & \text{nếu } x = 4n + 1 \end{cases} \\
 & \text{Vậy } g \circ g(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{nếu } x = 4k \\ \frac{x+1}{4} & \text{nếu } x = 4l + 3 \\ \frac{x+2}{4} & \text{nếu } x = 4m + 2 \\ \frac{x+3}{4} & \text{nếu } x = 4n + 1 \end{cases} \\
 & (k, l, m, n \in \mathbb{N})
 \end{aligned}$$

10. Cho $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ với $f(x) = 2x - 4$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \geq 2 \\ x^2 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$$

Xác định $g \circ f$, $f \circ g$, $g \circ g$

Giải

$$\bullet g \circ f(x) = g[f(x)] = \begin{cases} 2f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 2 \\ f^2(x) & \text{nếu } f(x) < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2(2x-4) & \text{nếu } 2x-4 \geq 2 \\ (2x-4)^2 & \text{nếu } 2x-4 < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4x-8 & \text{nếu } x \geq 3 \\ (2x-4)^2 & \text{nếu } x < 3 \end{cases}$$

$$\bullet f \circ g(x) = f[g(x)] = 2g(x) - 4 = \begin{cases} 4x-4 & \text{nếu } x \geq 2 \\ 2x^2-4 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$$

$$\bullet g \circ g(x) = \begin{cases} 2g(x) & \text{nếu } g(x) \geq 2 \\ g^2(x) & \text{nếu } g(x) < 2 \end{cases}$$

$$* g(x) \geq 2 \Leftrightarrow (2x \geq 2 \wedge x \geq 2) \vee (x^2 \geq 2 \wedge x < 2)$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \vee (\sqrt{2} \leq x < 2 \vee x \leq -\sqrt{2})$$

$$* g(x) < 2 \Leftrightarrow (2x < 2 \wedge x \geq 2) \vee (x^2 < 2 \wedge x < 2)$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } g \circ g(x) = \begin{cases} 4x, x \geq 2 \\ 2x^2, x \leq -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} \leq x < 2 \\ x^4, -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Trong các tương ứng sau, tương ứng nào là ánh xạ

a) $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}: x^2y - x + y = 0$

b) $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Z}: 3x + 2y = 5$

c) $x \in \mathbb{R}, y \in [-1, +\infty): x^2 - 2x + y = 0$

d) $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}: 2xy + x - y = 3$

2. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ với $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

a) Tính $f(-1), f(1), f(t), f\left(\frac{1}{t}\right)$

b) Xác định các tập hợp

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) = \frac{4}{5}\right\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq 1\}$$

$$D = \{y / y = f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

3. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ với $f(x) = x^2 - 4x + 3$

a) Tính $f(a), f(4 - a)$

b) Tìm tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \leq 3\}$

$$B = \{y / y = f(x), x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 2\}$$

4. Xét tính đơn ánh, toàn ánh, song ánh của các ánh xạ

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x \cdot |x|$

c) $f: [-\infty, 1] \rightarrow (-\infty, 4]: f(x) = -x^2 + 2x + 3$

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow [2, +\infty): f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

e) $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty): f(x) = \sqrt{x^3}$

5. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Với $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $\forall x, x' \in \mathbb{R}: x > x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

b) Chứng minh $f: (-1, 1) \rightarrow (-1, 2)$ là ánh xạ và có là song ánh không?

6. Cho $f(x) = x^2 - 2x + 3$

a) Định a để $f: \mathbb{R} \rightarrow [a, +\infty)$ là toàn ánh

b) Định b để $f: [b, +\infty) \rightarrow [3, +\infty)$ là đơn ánh

7. Chứng minh f là song ánh và xác định ánh xạ ngược

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \frac{3 - 2x}{5}$

b) $f: [1, +\infty) \rightarrow [2, +\infty): f(x) = x^2 - 2x + 3$

$$c) f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}: f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$$

$$d) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x|x|$$

8. Xác định $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$ trong các trường hợp:

$$a) f, g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \text{ với } f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$$

$$b) f, g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ với } f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

$$c) f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ với } f(x) = x^2 \text{ và } g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ 1-x, & x < 0 \end{cases}$$

BÀI 5 : HÀM SỐ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa hàm số thực

Cho X, Y là hai tập con của $\mathbb{R}$

Ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ được gọi là hàm số thực

$$x \mapsto f(x)$$

- $x \in X$, x gọi là biến cố
- Tập X gọi là miền xác định hàm số
- $y = f(x)$ gọi là giá trị của hàm số tại x
- Tập $f(X) = \{y / y = f(x), x \in X\}$ gọi là miền giá trị hàm số

2. Tính đơn điệu của hàm số

Hàm f xác định trên khoảng (a, b)

và $x_1, x_2 \in (a, b): x_1 < x_2$

a) Nếu $f(x_1) < f(x_2)$ ta nói f tăng trên (a, b)

b) Nếu $f(x_1) > f(x_2)$ ta nói f giảm trên (a, b)

3. Tính chẵn, lẻ của hàm số

Hàm f xác định trên D sao cho $x \in D \Rightarrow -x \in D$

a) Nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in D$ ta nói f là hàm chẵn trên D

b) Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ ta nói f là hàm lẻ trên D

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Vấn đề 1: TÌM MIỀN XÁC ĐỊNH HÀM SỐ

a) Hàm số $y = \frac{1}{p(x)}$ có MXĐ: $D = \{x \in \mathbb{R} / p(x) \neq 0\}$

b) Hàm số $y = \sqrt[n]{p(x)}$ có MXĐ: $D = \{x \in \mathbb{R} / p(x) \geq 0\}$

c) Nếu f, g có MXĐ là D_f, D_g thì các hàm số
 $y = f(x) \pm g(x), y = f(x).g(x)$ có MXĐ:

$$D = D_f \cap D_g \text{ và hàm } y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

có MXĐ: $D = (D_f \cap D_g) \setminus \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\}$

Ví dụ: Tìm miền xác định các hàm số:

a) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

b) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x}$

c) $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

Giải

a) Vì $x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên MXĐ: $D = \mathbb{R}$

b) Hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x}$ xác định khi $x^2 - x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 1$$

Vậy MXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

c) $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ xác định khi:

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Vậy MXĐ: $D = [-1, 1]$

d) $y = \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ xác định khi $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) \geq 0 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x > -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x+1 \leq 0 \\ x > -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -1 \\ x > -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq -1 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1 \vee -2 < x \leq -1$$

Vậy MXĐ: $D = (-2, -1] \cup [1, +\infty)$

$$\Leftrightarrow D = (-2, -1] \cup [1, +\infty)$$

2. Vấn đề 2: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU HÀM SỐ

* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ giả sử $x_1 < x_2$

Lập hiệu $f(x_1) - f(x_2)$

- Nếu $f(x_1) - f(x_2) < 0$ thì f tăng trên (a, b)
- Nếu $f(x_1) - f(x_2) > 0$ thì f giảm trên (a, b)

* Ta có thể lập tỉ số: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

- $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ thì f tăng trên (a, b)
- $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ thì f giảm trên (a, b)

Ví dụ 1: chứng minh rằng:

a) $f(x) = x^2 - 2x$ giảm trên $(-\infty, 1)$ và tăng $(1, +\infty)$

b) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ tăng trên hai khoảng xác định

Giải

a) * $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 1): x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(x_1) - f(x_2) &= (x_1^2 - 2x_1) - (x_2^2 - 2x_2) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } x_1, x_2 < 1 \Rightarrow x_1 + x_2 - 2 < 0$$

$$\text{Suy ra: } f(x_1) - f(x_2) > 0$$

Vậy f giảm trên $(-\infty, 1)$

* $\forall x_1, x_2 \in (1, +\infty): x_1 - x_2 < 0$

$$\text{Ta có } x_1, x_2 > 1 \Rightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0$$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) < 0$$

Vậy f tăng trên $(1, +\infty)$

b) MXĐ: $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

• $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, -1) \vee x_1 - x_2 \in (-1, +\infty)$

$$\text{Ta có } f(x_1) - f(x_2) = \frac{2x_1 - 1}{x_1 + 1} - \frac{2x_2 - 1}{x_2 + 1} = \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$

$$x_1 > x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$

• Nếu $x_1, x < -1 \Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$

• Nếu $x_1, x > -1 \Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$

$$\text{Suy ra: } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

Vậy f tăng trên hai khoảng $(-\infty, -1)$ và $(-1, +\infty)$

Ví dụ 2: Tìm khoảng tăng của các hàm số

a) $f(x) = -x^2 + 4x$

b) $f(x) = x^3 + x$

Giải

a) MXĐ: $\mathbb{R}$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: x_1 < x_2$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f(x_1) - f(x_2) &= (-x_1^2 + 4x_1) - (-x_2^2 + 4x_2) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4) \end{aligned}$$

- Với $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 - 4 < 2x_2 - 4$

Chọn $x_2 < 2$ thì $x_1 < x_2 < 2 \Rightarrow x_1 + x_2 - 4 < 0$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$$

Vậy f tăng trên khoảng $(-\infty, 2)$

- Nếu $x_1, x_2 \in (2, +\infty): x_1 < x_2$

Ta có: $x_1 + x_2 - 4 > 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Rightarrow f$ giảm trên khoảng $(2, +\infty)$.

b) MXĐ: $\mathbb{R}$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_2$$

$$\text{Xét } f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 + x_1) - (x_2^3 + x_2)$$

$$= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 1 > 0 \quad \forall x_1, x_2$$

Vậy hàm số tăng trên $\mathbb{R}$.

3. Vấn đề 3: XÉT TÍNH CHẴN, LẼ CỦA HÀM SỐ

* Nếu $x \in D \Rightarrow -x \in D$ và

a) $f(-x) = f(x)$ thì f là hàm số chẵn trên D .

b) $f(-x) = -f(x)$ thì f là hàm số lẻ trên D .

* Nếu $\exists x_0 \in D$ mà $-x_0 \notin D$ hoặc $f(-x) \neq \pm f(x)$ thì f không là hàm số chẵn, lẻ trên D .

Ví dụ 1: Xét tính chẵn, lẻ các hàm số

a) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

b) $f(x) = \frac{x|x|}{x^2-1}$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2$

d) $f(x) = \frac{x^4}{x-1}$

Giải

a) MXĐ: $D = [-1, 1]$ dễ thấy nếu $x \in D$ thì $-x \in D$

Ta có $f(-x) = \sqrt{1-(-x)} + \sqrt{1+(-x)}$

$$= \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = f(x), \forall x \in D$$

Vậy f là hàm số chẵn trên D .

b) MXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ dễ thấy nếu $x \in D$ thì $-x \in D$

Ta có $f(-x) = \frac{(-x)|-x|}{(-x)^2-1} = \frac{-x|x|}{x^2-1} = -f(x), \forall x \in D$

Vậy f là hàm số lẻ trên D .

c) MXĐ: $\mathbb{R}$ nên nếu $x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$

Ta có $f(-1) = -4, f(1) = -2 \Rightarrow f(-1) \neq \pm f(1)$

Vậy f là hàm số không chẵn cũng không lẻ trên $\mathbb{R}$.

d) MXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $-1 \in D$ nhưng $1 \notin D$

Vậy f là hàm số không chẵn cũng không lẻ trên D .

Ví dụ 2: Cho hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$. Hãy xét tính chẵn, lẻ các hàm số

$$F(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ và hàm số } G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Giải

Hai hàm F và G có miền xác định là $\mathbb{R}$ nên với $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

$$* F(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy F là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

$$* G(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy G là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

C. GIẢI ĐÁP TẬP CƠ BẢN

1. Tìm miền xác định của hàm số

$$a) y = \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$$

$$b) y = \frac{x^2 - 4}{2x^2 - x - 3}$$

$$c) y = \frac{1}{x^2 + 4x + 6}$$

$$d) y = \sqrt{1 - 3x}$$

$$e) y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

$$f) y = \frac{1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$$

$$g) y = \frac{2x - 1}{\sqrt{x|x| - 4}}$$

$$h) y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$$

Giải

a) Vì $x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên MXĐ: $D = \mathbb{R}$

b) $y = \frac{x^2 - 4}{2x^2 - x - 3}$ xác định khi $2x^2 - x - 3 \neq 0$
 $\Leftrightarrow x \neq -1 \wedge x \neq \frac{3}{2}$

Vậy MXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -1, \frac{3}{2} \right\}$

c) Vì $x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên
 MXĐ: $D = \mathbb{R}$

d) $y = \sqrt{1 - 3x}$ xác định khi $1 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$

Vậy MXĐ: $D = \left(-\infty, \frac{1}{3} \right]$

e) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ xác định khi $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ x - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3 \vee x \leq 1$$

Vậy MXĐ: $D = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ xác định khi $3-2x-x^2 > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+3 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee -3 < x < 1$$

Vậy MXĐ: $D = (-3, 1)$

g) $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x|x|-4}}$ xác định khi $x|x|-4 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ |x| > 2 \end{cases} \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x > 2$$

Vậy MXĐ: $D = (2, +\infty)$.

h) $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên MXĐ: $D = \mathbb{R}$.

2. Tìm miền xác định của các hàm số:

a) $y = \sqrt{x+4} - \frac{4}{\sqrt{2-x}}$

b) $y = \sqrt{(x-1)(x+3)} + \frac{1}{x^2-4}$

$$c) y = \sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{2x-1}$$

$$d) y = \sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+2}$$

Giải

a) Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x < 2 \end{cases}$

Vậy MXĐ: $D = [-4, 2)$

b) Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} (x-1)(x+3) \geq 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x+3 \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq -3 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

Vậy MXĐ: $D = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty) \setminus \{2\}$

c) Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} \frac{x}{1-x} \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1-x} \geq 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$$

Vậy MXĐ: $D = \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$

d) $y = \sqrt{(\sqrt{x+2} - 1)^2}$

Xác định khi $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

Vậy MXĐ: $D = [-2, +\infty)$.

3. Định a để hàm số xác định với mọi $x > 0$

a) $y = \sqrt{x-a} + \sqrt{2x-a-1}$

b) $y = \sqrt{2x-3a+4} + \frac{x-a}{x+a-1}$

Giải

a) Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x-a \geq 0 \\ 2x-a-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \geq \frac{a+1}{2} \end{cases}$$

Như vậy để hàm số xác định với mọi $x > 0$ thì

$$\begin{cases} 0 \geq a \\ 0 \geq \frac{a+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ a \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq -1$$

Đáp số: $a \leq -1$

b) Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} 2x - 3a + 4 \geq 0 \\ x + a - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3a - 4}{2} \\ x \neq 1 - a \end{cases}$$

Để hàm số xác định với mọi $x > 0$ ta phải có

$$\begin{cases} 0 \geq \frac{3a - 4}{2} \\ 0 \geq 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{4}{3} \\ a \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq a \leq \frac{4}{3}$$

Đáp số: $1 \leq a \leq \frac{4}{3}$.

4. Định a để hàm số xác định trên khoảng $(0, 1)$

a) $y = \frac{x + 2a}{x - a + 1}$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{x - a}} + \sqrt{-x + 2a + 6}$

Giải

a) Hàm số xác định khi $x - a + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq a - 1$
để hàm số xác định trên khoảng $(0, 1)$, ta phải có
 $a - 1 \leq 0 \vee 1 \leq a - 1 \Leftrightarrow a \leq 1 \vee a \geq 2$

Vậy $a \leq 1 \vee a \geq 2$.

b) Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x - a > 0 \\ -x + 2a + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x \leq 2a + 6 \end{cases}$$

Để hàm số xác định trên khoảng $(0, 1)$, ta phải có

$$\begin{cases} a \leq 0 \\ 1 \leq 2a + 6 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq a \leq 0$$

Vậy $-\frac{5}{2} \leq a \leq 0$.

5. Chứng minh rằng hàm số

a) $y = x^2 - 4x$ giảm trên $(-\infty, 2)$ và tăng trên $(2, +\infty)$

b) $y = \frac{2x+1}{x+1}$ tăng trên mỗi khoảng xác định.

c) $y = x^3 - x^2 + x - 5$ tăng trên $\mathbb{R}$.

Giải

a) * $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 2) : x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(x_1) - f(x_2) &= (x_1^2 - 4x_1) - (x_2^2 - 4x_2) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4) \end{aligned}$$

Vì $x_1, x_2 < 2$ nên $x_1 + x_2 - 4 < 0$

Suy ra: $f(x_1) - f(x_2) > 0$

Vậy f giảm trên $(-\infty, 2)$

* Nếu $x_1, x_2 \in (2, +\infty) \Rightarrow x_1, x_2 > 2 \Rightarrow x_1 + x_2 - 4 > 0$

nên với $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$

Vậy f tăng trên $(2, +\infty)$

b) MXĐ: $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

$$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, -1) \text{ hoặc } x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$$

Ta có $f(x_1) - f(x_2)$

$$= \frac{2x_1 + 1}{x_1 + 1} - \frac{2x_2 + 1}{x_2 + 1} = \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$

$$* x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$

Dù $x_1, x_2 < -1$ hoặc $x_1, x_2 > -1$

$$\text{Ta luôn có } (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

Vậy f tăng trên mỗi khoảng xác định

c) MXĐ: $\mathbb{R}$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - x_2^3) - (x_1^2 - x_2^2) + (x_1 - x_2)$$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = ((x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - (x_1 + x_2) + 1)$$

$$= \left(x_1 + \frac{x_2 - 1}{2} \right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0. \text{ Vậy } f \text{ tăng trên } \mathbb{R}.$$

6. Tìm khoảng cách, giảm của các hàm số:

a) $y = \sqrt{x^2 + 3}$

b) $y = x^2 + 2x - 5$

c) $y = \frac{x+1}{x-3}$

d) $y = \frac{3}{x^2 + 1}$

Giảia) MXĐ: $\mathbb{R}$ Lấy $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Ta có: $f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1^2 + 3} - \sqrt{x_2^2 + 3}$

$$= \frac{x_1^2 + 3 - x_2^2 - 3}{\sqrt{x_1^2 + 3} + \sqrt{x_2^2 + 3}} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{\sqrt{x_1^2 + 3} + \sqrt{x_2^2 + 3}}$$

* Nếu $x_1 < x_2 < 0$ thì $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0$$

Vậy f giảm trên khoảng $(-\infty, 0)$

* Nếu $0 < x_1 < x_2$ thì $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$$

Vậy f tăng trên khoảng $(0, +\infty)$

b) MXĐ: $\mathbb{R}$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Ta có: $f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 - x_2^2) + (2x_1 - 2x_2)$

$$= (x_1 + x_2 + 2)(x_1 - x_2)$$

* Nếu $x_1 < x_2 < -1$ thì $(x_1 + x_2 + 2)(x_1 - x_2) > 0$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0$$

Vậy f giảm trên khoảng $(-\infty, -1)$

* Nếu $-1 < x_1 < x_2$ thì $(x_1 + x_2 + 2)(x_1 - x_2) < 0$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$$

Vậy f tăng trên khoảng $(-1, +\infty)$

c) MXĐ: $D = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 3)$ hoặc $x_1, x_2 \in (3, +\infty)$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1 + 1}{x_1 - 3} - \frac{x_2 + 1}{x_2 - 3} \\ &= \frac{-4(x_1 - x_2)}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-4}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)}$$

Dù $x_1, x_2 < 3$ hoặc $x_1, x_2 > 3$ ta luôn có:

$$(x_1 - 3)(x_2 - 3) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-4}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)} < 0$$

Vậy f giảm trên mỗi khoảng xác định

d) MXĐ: $\mathbb{R} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{3}{x_1^2 + 1} - \frac{3}{x_2^2 + 1} \\ &= \frac{-3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}\end{aligned}$$

* Nếu $x_1 < x_2 < 0$ thì $-3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$$

Vậy f tăng trên khoảng $(-\infty, 0)$

* Nếu $0 < x_1 < x_2$ thì $-3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0$$

Vậy f giảm trên khoảng $(0, +\infty)$.

7. Cho hàm số $f(x) = a\sqrt{x^2 + 4x + 4} + b\sqrt{x^2 + 2x - 1} + cx$ luôn tăng. Chứng minh $c > 0$.

Giải

Do $f(x) = a|x + 2| + b|x + 1| + cx$ xác định trên $\mathbb{R}$ và f tăng nên ta có:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(0) > f(-1) \\ f(-2) > f(-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b > a - c \\ b - 2c > a + 2b - 3c \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} c > -a - b \\ c > a + b \end{cases} \Rightarrow 2c > 0 \Rightarrow c > 0 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

8. Cho hàm số f tăng trên $\mathbb{R}$ và g giảm trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = g(x)$ có 1 nghiệm x_0 thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình.

Giải

Vì x_0 là nghiệm phương trình $f(x) = g(x)$ nên ta có:

$$f(x_0) = g(x_0) \quad (1)$$

* Nếu $x > x_0$ thì $f(x) > f(x_0) = g(x_0) > g(x)$

$$\Rightarrow f(x) > g(x) \quad (2)$$

* Nếu $x < x_0$ thì $f(x) < f(x_0) = g(x_0) < g(x)$

$$\Rightarrow f(x) < g(x) \quad (3)$$

Qua 3 trường hợp (1), (2), (3) suy ra x_0 là nghiệm duy nhất phương trình $f(x) = g(x)$ (đpcm).

9. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số

a) $y = f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^4}$

b) $f(x) = |x|^3 \cdot x$

c) $f(x) = |2x + 1| + |2x - 1|$

d) $f(x) = \frac{|x+1| + |x-1|}{|x+1| - |x-1|}$ e) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \leq -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ x^3 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

Giải

a) MXĐ: $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Dễ thấy nếu $x \in D$ thì $-x \in D$

Ta có: $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 4}{(-x)^4} = \frac{x^2 + 4}{x^4} = f(x), \forall x \in D$

Vậy f là hàm số chẵn trên R .

c) MXĐ: R nên $x \in R \Rightarrow -x \in R$

Ta có: $f(-x) = |-2x + 1| + |-2x - 1|$
 $= |2x - 1| + |2x + 1| = f(x), \forall x \in R$

Vậy f là hàm số chẵn trên R .

d) MXĐ: $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ dễ thấy nếu $x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \frac{|-x+1| + |-x-1|}{|-x+1| - |-x-1|} = \frac{|x-1| + |x+1|}{|x-1| - |x+1|}$

$$= \frac{|x+1| + |x-1|}{|x+1| - |x-1|} = -f(x), \forall x \neq 0$$

Vậy f là hàm số lẻ trên D .

e) MXĐ: $\mathbb{R}$ nên $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

Lấy $x \in \mathbb{R}$ ta xét các trường hợp sau:

* Nếu $x < -1 \Rightarrow -x > 1$

$$\text{Thì: } f(x) = x^3 + 1, f(-x) = (-x)^3 - 1 = -x^3 - 1$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

* Nếu $x > 1 \Rightarrow -x < -1$

$$\text{Thì: } f(x) = x^3 - 1, f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

* Nếu $x \in [-1, 1]$ thì $-x \in [-1, 1]$ và $f(-x) = -f(x) = 0$

$$\text{Tóm lại: } f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

10. Cho hàm số f xác định và vừa chẵn vừa lẻ trên $\mathbb{R}$. Hãy xác định f .

Giải

Dễ thấy với $x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$

Theo giả thiết ta có:
$$\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

• Ngược lại ta cũng dễ thấy $f(x) = 0$ xác định trên $\mathbb{R}$ và vừa chẵn, vừa lẻ trên D .

Vậy $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm miền xác định của các hàm số

$$a) y = \frac{x-1}{x^2-x+2}$$

$$b) y = \sqrt{x^2-3x+4}$$

$$c) y = \frac{2x-1}{x^3-4x}$$

$$d) y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$e) y = \sqrt{x^2-4} - \frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

$$f) y = \sqrt{x-2}\sqrt{x-1}$$

$$g) y = \sqrt{1-x|x|} + \frac{1}{x^2-1}$$

$$h) y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{x}$$

2. Định m để hàm số xác định với mọi $x > 0$

$$a) y = \sqrt{2x-m+3} + \sqrt{x+m-2}$$

$$b) y = \sqrt{3x-2m+5} - \frac{x}{x+2m-3}$$

3. Định m để hàm số xác định trên khoảng $(0, 1)$

$$a) y = \frac{x-1}{x-2m+3}$$

$$b) y = \sqrt{x-m+2} + \frac{x+1}{\sqrt{-x+2m-1}}$$

$$c) y = \sqrt{x-3m+5} - \frac{1}{\sqrt{m-x}}$$

4. Chứng minh hàm số

a) $y = 3x^2 - 6x + 1$ giảm trên $(-\infty, 1)$ và tăng trên $(1, +\infty)$

b) $y = \frac{x+2}{x-1}$ giảm trên mỗi khoảng xác định

c) $y = x^3 + 2x - 3$ tăng trên $\mathbb{R}$

5. Tìm khoảng tăng, giảm của hàm số

a) $y = -x^2 + 4x + 5$

b) $y = x\sqrt{x}$

c) $y = \frac{x-2}{x+1}$

d) $y = \frac{1}{x^2}$

6. Cho hàm f đơn điệu trên khoảng (a, b) và phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (a, b)$. Chứng minh x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình trên khoảng (a, b) .

7. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số

a) $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$

b) $y = x\sqrt{|x|}$

c) $y = |x-1| + |x+1|$

d) $y = \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + x}$

e) $y = \sqrt{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

f) $y = \begin{cases} 1; x > 0 \\ 0; x = 0 \\ -1; x < 0 \end{cases}$

$$\text{g) } y = \begin{cases} -x; x < -1 \\ x^2; -1 \leq x \leq 1 \\ x; x > 1 \end{cases} \quad \text{h) } y = \begin{cases} x + 1; x < -1 \\ x^3; -1 \leq x \leq 1 \\ x - 1; x > 1 \end{cases}$$

8. Cho hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ và không chẵn cũng không lẻ. Chứng minh rằng luôn tìm được duy nhất hai hàm F chẵn trên $\mathbb{R}$ và G lẻ trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(x) = F(x) + G(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

CHƯƠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

BÀI 1: PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. VẤN ĐỀ 1: GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

* Dạng cơ bản: $ax + b = 0$

Xét các trường hợp:

- $a \neq 0$: 1 nghiệm $x = -\frac{b}{a}$

- $a = 0 \wedge b = 0$: mọi nghiệm $x \in \mathbb{R}$

- $a = 0 \wedge b \neq 0$: vô nghiệm ($x \in \emptyset$)

* Dạng phương trình quy về bậc nhất:

- Đặt điều kiện ẩn số $x \in D$ (nếu có)

- Biến đổi phương trình về dạng $ax + b = 0$

- Biện luận như dạng cơ bản với điều kiện nghiệm phải thỏa $x \in D$.

Ví dụ 1: Giải và biện luận phương trình

$$\left(m - \frac{1}{m}\right)x = 1 + m \quad (*)$$

GIẢI

Ta xét các trường hợp:

$$a) \quad m - \frac{1}{m} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{m^2 - 1}{m} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \wedge m \neq \pm 1$$

$$(*) \text{ có 1 nghiệm } x = (1 + m) : \left(m - \frac{1}{m}\right) = \frac{m}{m-1}$$

$$b) \quad m - \frac{1}{m} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1 \wedge m \neq 0$$

$$\alpha) \quad m = 1: (*) \Leftrightarrow 0x = 2: \text{ vô nghiệm}$$

$$\beta) \quad m = -1: (*) \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\gamma) \quad m = 0: (*) \text{ vô nghiệm.}$$

Kết luận:

- $m \neq 0 \vee m \neq \pm 1: x = \frac{m}{m-1}$

- $m = -1 : x \in \mathbb{R}$

- $m = 0 \vee m = 1: x \in \emptyset$

Ví dụ 2: Giải và biện luận phương trình

$$\frac{x+1}{x-m} = \frac{x}{x-2} \quad (*)$$

GIẢI

Điều kiện: $x \neq 2 \wedge x \neq m$

Khi đó: (*) $\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = x(x - m)$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = x^2 - mx \Leftrightarrow (m - 1)x = 2 \quad (1)$$

a) $m \neq 1$: (1) $\Leftrightarrow x = \frac{2}{m-1}$. Đây là nghiệm của (*)

Nếu như: $\frac{2}{m-1} \neq 2 \wedge \frac{2}{m-1} \neq m$

$$\Leftrightarrow m - 1 \neq 1 \wedge m^2 - m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 \wedge m \neq -1$$

b) $m = 1$. (1) $\Leftrightarrow 0x = 2$ vô nghiệm

Kết luận:

$$* m \neq 1 \wedge m \neq -1 \wedge m \neq 2: x = \frac{2}{m-1}$$

$$* m = 1 \vee m = -1 \vee m = 2: x \notin \emptyset$$

2. Vấn đề 2. NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH THỎA ĐIỀU KIỆN ĐÃ CHO

Ví dụ 1: Định m để phương trình có nghiệm duy

$$\text{nhất } \frac{m^2 \cdot x + 1}{x + 1} = m \quad (*)$$

GIẢI

Điều kiện: $x \neq -1$

$$\text{Khi đó: } (*) \Leftrightarrow m^2 x + 1 = mx + m \Leftrightarrow (m^2 - m)x = m - 1$$

Như vậy (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \begin{cases} m^2 - m \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m \neq 0 \\ (m^2 - m)(-1) \neq m - 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \wedge m \neq 1 \\ m \neq \pm 1 \end{cases} &\Leftrightarrow m \neq 0 \wedge m \neq \pm 1 \end{aligned}$$

Vậy $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$

Ví dụ 2: Định a, b để phương trình

$$(2x - 1)a + 1 = bx \quad (*)$$

Nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$:

GIẢI

$$(*) \Leftrightarrow (2a - b)x = a - 1$$

(*) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \wedge b = 2$$

Ví dụ 3: Định m để phương trình sau vô nghiệm

$$m\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{x}{m\sqrt{x-1}} \quad (*)$$

GIẢI

Điều kiện: $x > 1$

$$\text{Khi đó: } (*) \Leftrightarrow m(x - 1) + 1 = \frac{x}{m}$$

$$\Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{m}\right)x = m - 1 \quad (1)$$

(*) vô nghiệm $\Leftrightarrow (1)$: vô nghiệm $\vee (1)$ có nghiệm $x \leq 1$

$$+ (1) \text{ vô nghiệm } \Leftrightarrow m = 0 \vee \begin{cases} m - \frac{1}{m} = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \vee m = -1$$

$$+ (1) \text{ có duy nhất 1 nghiệm } x \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m - \frac{1}{m} \neq 0 \\ x = \frac{m}{m+1} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \wedge m \neq \pm 1 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \wedge m \neq 1 \end{cases}$$

Tóm lại:

$$(*) \text{ vô nghiệm } \Leftrightarrow m = 0 \vee m = -1 \vee \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \wedge m \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \geq -1 \wedge m \neq 1$$

$$\text{Vậy } -1 \leq m \neq 1$$

3. Vấn đề 3: GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

$$\text{DẠNG } \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

a) Cách giải 1: Bằng phương pháp cộng đại số hoặc phương pháp thế ta khử một qui về biện luận phương pháp bậc nhất một ẩn

b) Cách giải 2: phương pháp Crame

Ta tính: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b;$

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}; D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

* $D \neq 0$: hệ có nghiệm duy nhất: $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}.$

* $D = 0$: hệ xảy ra 1 trong 2 dạng

i) $\begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = c \end{cases} \Leftrightarrow ax + by = c$

• $a = b = 0 \wedge c \neq 0$: vô nghiệm

• Các trường hợp còn lại: hệ có vô số nghiệm.

ii) $\begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = c'' \end{cases} (c \neq c'')$: hệ vô nghiệm.

Ví dụ: giải và biện luận hệ phương trình

a) $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = 2m + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax - by = a + 1 \\ bx + ay = b + 1 \end{cases}$

GIẢI

a) Ta có: $D = m^2 - 1, D_x = m - 1,$
 $D_y = 2m^2 + m - 3 = (m - 1)(2m + 3)$

$$* D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$$

Hệ có nghiệm duy nhất: $x = \frac{1}{m+1}, y = \frac{2m+3}{m+1}$

$$* D = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

• $m = 1$ hệ có dạng $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 3$

Có vô số nghiệm $x \in \mathbb{R}, y = 3 - x$

• $m = -1$ hệ có dạng $\begin{cases} -x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$ vô nghiệm

b) Ta có: $D = a^2 - b^2, D_x = (a - b)(a + b + 1),$
 $D_y = a - b$

$$* D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm b$$

Hệ có nghiệm duy nhất: $x = \frac{a+b+1}{a+b}, y = \frac{1}{a+b}$

$$* D = 0 \Leftrightarrow a = \pm b$$

• $a = b$: Hệ có dạng $\begin{cases} ax + ay = a + 1 \\ ax + ay = a + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow ax + ay = a + 1$$

+ $a = 0$: Hệ vô nghiệm

+ $a \neq 0$: Hệ vô nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 1 - x + \frac{1}{a} \end{cases}$

• $a = -b$: Hệ có dạng $\begin{cases} ax - ay = a + 1 \\ ax - ay = a - 1 \end{cases}$, vô nghiệm

4. Vấn đề 4: HỆ CÓ NGHIỆM THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Ví dụ 1: định m để hệ sau vô nghiệm

$$\begin{cases} (m-1)x - (m-4)y = 1 \\ mx + (m+2)y = m \end{cases}$$

GIẢI

Ta có $D = (m-1)(m+2) + m(m-4) = 2m^2 - 3m - 2$

Hệ vô nghiệm thì $D = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$

- $m = -\frac{1}{2}$: Hệ có dạng: $\begin{cases} x - 3y = -\frac{2}{3} \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ vô nghiệm
- $m = 2$: Hệ có dạng: $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ vô số nghiệm

Vậy hệ vô nghiệm khi $m = -\frac{1}{2}$

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ (1-2m)x + (1+m-m^2)y = 1 \end{cases}$$

- Định m để hệ có nghiệm duy nhất (x, y). Hãy tìm hệ thức liên hệ giữa x, y độc lập đối với m.
- Tìm $m \in \mathbb{Z}$ sao cho nghiệm (x, y) là nghiệm

GIẢI

a) Ta có: $D = m^2 + 1$, $D_x = 1 - m^2$, $D_y = 2m$ do $D \neq 0$
 $\forall m$ nên hệ có nghiệm duy nhất $\forall m$ đó là:

$$x = \frac{1-m^2}{1+m^2}, y = \frac{2m}{1+m^2}$$

• Dễ thấy: $x^2 + y^2 = \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2 + \left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2 = 1, \forall m$

Vậy hệ thức độc lập là: $x^2 + y^2 = 1$

b) Ta có: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2, y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x, y \leq 1$
 Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$

• $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Theo đó $\frac{1-m^2}{1+m^2} = -1 \wedge \frac{2m}{1+m^2} = 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset$

• $x = 1 \Rightarrow y = 0$

Theo đó $\frac{1-m^2}{1+m^2} = 1 \wedge \frac{2m}{1+m^2} = 0 \Leftrightarrow m = 0$

• $x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$

Theo đó $\frac{1-m^2}{1+m^2} = 0 \wedge \frac{2m}{1+m^2} = \pm 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Vậy $m \in \{-1, 0, 1\}$ thì hệ có nghiệm nguyên.

Ví dụ 3: Định a, b để hệ sau có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x - (a-1)y = b \\ ax - 2y = b^2 + 1 \end{cases}$$

GIẢI

Ta có $D = a^2 - a - 2$

Hệ có vô số nghiệm thì $D = 0 \Leftrightarrow a = -1 \vee a = 2$

- $a = -1$: Hệ có dạng:
$$\begin{cases} x + 2y = b \\ x + 2y = -b^2 - 1 \end{cases}$$

Hệ này có vô số nghiệm khi $b = -b^2 - 1$

$$\Leftrightarrow b^2 + b + 1 = 0 \Leftrightarrow b \in \emptyset.$$

Trường hợp này không xảy ra

- $a = 2$: Hệ có dạng:
$$\begin{cases} a - y = b \\ x - y = \frac{b^2 + 1}{2} \end{cases}$$

và có vô số nghiệm khi: $b = \frac{b^2 + 1}{2}$

$$\Leftrightarrow (b - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow b = 1$$

Đáp số: $a = 2 \wedge b = 1$.

B. GIẢI BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Giải và biện luận các phương trình

a) $3(m + 1)x + 4 = 2x + 5(m + 1)$

b) $m^2(x + 1) = x + m$

c) $mx + 2(x - m) = (m + 1)^2 + 3$

GIẢI

a) Phương trình $\Leftrightarrow (3m + 1)x = 5m + 1$

- $m \neq -\frac{1}{3}$: 1 nghiệm $x = \frac{5m + 1}{3m + 1}$
- $m = -\frac{1}{3}$: Phương trình có dạng: $0x = -\frac{2}{3}$: vô nghiệm

b) Phương trình $\Leftrightarrow (m^2 - 1)x = m - m^2$

- $m \neq \pm 1$: 1 nghiệm $x = \frac{m - m^2}{m^2 - 1} = \frac{-m}{m + 1}$
- $m = 1$: Phương trình có dạng: $0x = 0$ nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$
- $m = -1$: Phương trình có dạng: $0x = -2$: vô nghiệm

c) Phương trình $\Leftrightarrow (m + 2)x = (m + 2)^2$

- $m \neq -2$: 1 nghiệm $x = m + 2$
- $m = -2$: Phương trình có dạng: $0x = 0$: nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$

2. Giải và biện luận

a) $a(ax + 2b^2) - a^3 = b^2(x + a)$

b) $(a + b)^2x + 2a^2 = 2a(a + b) + (a^2 + b^2)x$

c) $a(ax + 2b^2) - a^2 = b^2(x + a)$

GIẢI

a) Phương trình $\Leftrightarrow (a^2 - b^2)x = a(a^2 - b^2)$

* $a \neq \pm b$: 1 nghiệm: $x = a$

* $a = \pm b$: $x \in \mathbb{R}$

b) Phương trình $\Leftrightarrow 2abx = 2ab$

* $ab \neq 0$: 1 nghiệm $x = 1$

* $ab = 0$: $x \in \mathbb{R}$

c) Phương trình $\Leftrightarrow (a^2 - b^2)x = a^2 - ab^2$

* $a \neq \pm b$: 1 nghiệm; $x = \frac{a^2 - ab^2}{a^2 - b^2}$

* $a = b$: Phương trình có dạng:

$$0x = a^2 - a^3 \Leftrightarrow 0x = a^2(1 - a)$$

• $a = 0 \vee a = 1$: nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$

• $a \neq 0 \wedge a \neq 1$: vô nghiệm

* $a = -b$: Phương trình có dạng: $0x = a^2(1 - a)$

• $a = 0 \vee a = 1$: nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$

• $a \neq 0 \wedge a \neq 1$: vô nghiệm

Kết luận:

- $a \neq \pm b$: $x = \frac{a^2 - ab^2}{a^2 - b^2}$
- $a = b = 0 \vee a = \pm b = 1$: $x \in \mathbb{R}$
- $a = \pm b \neq 0 \wedge a \neq 1$: vô nghiệm

3. Giải và biện luận các phương trình

$$a) \frac{x-m}{x-2} + \frac{x-3}{x} = 2$$

$$b) \frac{x-m}{x-1} + \frac{x-1}{x-m} = 2$$

$$c) \frac{a-x}{x-1} + \frac{x-b}{1+x} = \frac{b(x-1)-2}{1-x^2}$$

$$d) \frac{ax-1}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x^2+1)}{x^2-1}$$

GIẢI

a) Điều kiện: $x \neq 0 \wedge x \neq 2$

Phương trình $\Leftrightarrow (m+1)x = 6$ (1)

• $m \neq -1$: (1) $\Leftrightarrow x = \frac{6}{m+1}$ là nghiệm phương trình

khi và chỉ khi: $\frac{6}{m+1} \neq 0 \wedge \frac{6}{m+1} \neq 2 \Leftrightarrow m \neq 2$

• $m = -1$: (1) $\Leftrightarrow 0x = 6$: vô nghiệm

Kết luận:

- $m \neq -1 \wedge m \neq 2$: $x = \frac{6}{m+1}$
- $m = -1 \vee m = 2$: vô nghiệm

b) Điều kiện: $x \neq 1 \wedge x \neq m$

Phương trình $\Leftrightarrow 0x = (m-1)^2$

• $m \neq 1$: $x \in \emptyset$

• $m = 1$: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

c) Điều kiện: $x \neq \pm 1$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (a - 2)x = 2 - a \quad (1)$$

• $a \neq 2$: $(1) \Leftrightarrow x = -1$ không thỏa điều kiện: vô nghiệm

• $a = -2$: $(1) \Leftrightarrow 0x = 0$: có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

d) Điều kiện: $x \neq \pm 1$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (a + b - 1)x = a + b + 1 \quad (1)$$

* $a + b - 1 \neq 0$: $(1) \Leftrightarrow x = \frac{a+b+1}{a+b-1}$ là nghiệm của

phương trình khi và chỉ khi: $\frac{a+b+1}{a+b-1} \neq \pm 1 \Leftrightarrow a +$

$b \neq 0$

* $a + b - 1 = 0$: $(1) \Leftrightarrow 0x = 2$: vô nghiệm

Kết luận:

- $a + b \neq 0 \wedge a + b \neq 1$: $x = \frac{a+b+1}{a+b-1}$
- $a + b = 0 \vee a + b = 1$: $x \in \emptyset$

4. Định m để phương trình vô nghiệm

a) $(m + 1)^3 x + 1 - m = (7m - 5)x$

b) $\frac{x+m}{x+1} + \frac{x-2}{x} = 2$

GIẢI

a) Phương trình $\Leftrightarrow (m^2 - 5m + 6)x = m - 1$

Phương trình vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \vee m = 3$$

b) Điều kiện: $x \neq -1 \wedge x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow (m - 3)x = 2$ vô nghiệm khi và chỉ khi

$$m = 3 \vee \begin{cases} m \neq 3 \\ (m - 3)(-1) = 2 \\ (m - 3)(0) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 3 \vee \begin{cases} m \neq 3 \\ m = 1 \vee m \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow m = 3 \vee m = 1$$

5. Định điều kiện để phương trình có tập hợp nghiệm là R

a) $m^2x = 9x + m^2 - 4m + 3$

b) $m^3x = mx + m^2 - m$

c) $(x - 1)a + (2x + 1)b = x + 2$

GIẢI

a) Phương trình $\Leftrightarrow (m^2 - 9)x = m^2 - 4m + 3$

Phương trình có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m^2 - 4m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

b) Phương trình $\Leftrightarrow (m^3 - m)x = m^2 - m$

Phương trình có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - m = 0 \\ m^2 - m = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m = 0 \vee m = 1$

c) Phương trình $\Leftrightarrow (a + 2b - 1)x = a - b + 2$

Phương trình có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - 1 = 0 \\ a + 2 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1 \wedge b = 1$

6. Định m để phương trình có nghiệm

a) $m^2(x - 1) = 4x - 3m + 2$ với $x > 0$

b) $2(|x| + m - 1) = |x| - m + 3$

c) $\frac{3x - m}{\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x - 2} = \frac{2x + 2m - 1}{\sqrt{x - 2}}$

d) $\frac{(2m + 1)x + 3}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{(2m + 3)x + m - 2}{\sqrt{4 - x^2}}$

GIẢI

a) Phương trình $\Leftrightarrow (m^2 - 4)x = m^2 - 3m + 2$

• Nếu $\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 2$

Thì phương trình có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ nên có nghiệm $x > 0$.

• Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$ thì phương trình có

nghiệm: $x = \frac{m-1}{m+2}$

và $x > 0 \Leftrightarrow \frac{m-1}{m+2} > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m+2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m-1 < 0 \\ m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1 \vee m < -2$

Tóm lại: phương trình có nghiệm $x > 0$

$\Leftrightarrow m = 2 \vee \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ m < -2 \vee m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2 \vee m > 1$

Vậy $m < -2 \vee m > 1$

b) Phương trình $\Leftrightarrow |x| = 5 - 3m$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $5 - 3m \geq 0$

$\Leftrightarrow m \leq \frac{5}{3}$

Vậy $1 < m \leq \frac{5}{3}$.

7. Giải và biện luận các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} mx - y + 1 = 0 \\ x + my + 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx + (m+2)y = 2 \\ x + my = m \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = 2ab \end{cases}$

d) $\begin{cases} ax - 1y = a^2 \\ bx - y = b^2 \end{cases}$

GIẢI

a) Ta có: $D = m^2 + 1$, $D_x = -m - 2$, $D_y = 1 - 2m$

Vì $D = m^2 + 1 \neq 0 \forall m$

Nên hệ luôn có 1 nghiệm: $x = \frac{-m-2}{m^2+1}$, $y = \frac{1-2m}{m^2+1}$

b) Ta có: $D = (m+1)(m-2)$, $D_x = -m^2$, $D_y = m^2 - 2$

• $m \neq -1 \wedge m \neq 2$ hệ có nghiệm duy nhất

• $x = \frac{-m^2}{(m+1)(m-2)}$, $y = \frac{m^2-2}{(m+1)(m-2)}$

• $m = -1$. Hệ có dạng: $\begin{cases} x - y = -2 \\ x - y = -1 \end{cases}$ vô nghiệm

• $m = 2$: Hệ có dạng: $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ Vô nghiệm

c) Ta có: $D = a^2 - b^2$, $D_x = a(a^2 - b^2)$, $D_y = b(a^2 - b^2)$

• $a \neq \pm b$: Hệ có 1 nghiệm: $x = a$, $y = b$

• $a = b$: Hệ có dạng: $\begin{cases} ax + ay = 2a^2 \\ ax + ay = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow ax + ay = 2a^2$

* $a = 0$: Hệ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

* $a \neq 0$: Hệ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$, $y = x - 2a$

d) Ta có: $D = -a + b$, $D_x = -a^2 + b^2$, $D_y = ab(b - a)$

• $a \neq b$: Hệ có 1 nghiệm: $x = a + b$, $y = ab$

- $a = b$: Hệ có dạng: $\begin{cases} ax - y = a^2 \\ ax - y = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow ax - y = a^2$

Hệ có nghiệm: $x \in \mathbb{R}, y = ax - a^2$

e) Ta có: $D = b^2(1 - a), D_x = b^2(b + 4 - a^2),$
 $D_y = b(b + 4a - a^2)$

- * $b \neq 0 \wedge a \neq 1$: Hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{b + 4 - a^2}{1 - a}, y = \frac{b + 4a - a^2}{b(1 - a)}$$

- * $b = 0$: Hệ có dạng: $\begin{cases} ax = a^2 \\ 0x - 0y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow ax = a^2$

- $a = 0$: Hệ có nghiệm: $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

- $a \neq 0$: Hệ có nghiệm: $x = a, y \in \mathbb{R}$

- * $a = 1$: Hệ có dạng: $\begin{cases} x - by = 1 - b \\ bx - b^2y = 4b \end{cases}$

- $b = 0$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 0x - 0y = 0 \end{cases} \neq \begin{cases} x = 1 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

- $b \neq 0$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1x - by = 1 - b \\ x - by = 4 \end{cases}$

+ $1 - b = 4 \Leftrightarrow b = -3$:

Hệ có nghiệm: $\begin{cases} x = 4 - 3y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

+ $1 - b \neq 4 \Leftrightarrow b \neq -3$: Hệ vô nghiệm.

Kết luận:

- $a \neq 1 \wedge b \neq 0: x = \frac{b+4-a^2}{1-a}, y = \frac{b+4a-a^2}{b(1-a)}$
- $a = 1 \wedge b = -3: x = 4 - 3y, y \in \mathbb{R}$
- $a = 1 \wedge b \neq 0 \wedge b \neq -3: \text{ vô nghiệm}$
- $a = b = 0: x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
- $a \neq 0 \wedge b = 0: x = a, y \in \mathbb{R}$

8. Định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất

a)
$$\begin{cases} (m+1)x + 8y - 4m = 0 \\ mx + (m+3)y + 1 - 3m = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (m+1) \cdot \frac{2}{x} + m \cdot \frac{1}{y} = m \\ (m-2) \cdot \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 2(m-1) \end{cases}$$

GIẢI

a) Ta có $D = (m+1)(m+3) - 8m = m^2 - 4m + 3$
 Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D = m^2 - 4m + 3 \neq 0$
 $\Leftrightarrow m \neq 1 \wedge m \neq 3$

b) Ta có: Hệ dạng bậc nhất theo hai biến $\frac{2}{x}$ và $\frac{1}{y}$

$$D = (m+1) \cdot 2 - (m-2) \cdot m = -m^2 + 4m + 2$$

$$D_{\frac{2}{x}} = 2m - 2m(m - 1) = 2m(2 - m)$$

$$D_{\frac{1}{y}} = 2(m - 1)(m + 1) - m(m - 2) = m^2 + 2m - 2$$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (D \neq 0 \wedge D_2 \neq 0 \wedge D_{\frac{1}{y}} \neq 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 2 \neq 0 \\ 2m(2 - m) \neq 0 \\ m^2 + 2m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2, -1 \pm \sqrt{3}, 2 \pm \sqrt{6}\}$$

Vậy $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2, -1 \pm \sqrt{3}, 2 \pm \sqrt{6}\}$

9. Định m để hệ phương trình vô nghiệm

$$\text{a) } \begin{cases} 2m^2x + 3(m - 1)y = 3 \\ m(x + y) - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} ax + by = a + b \\ bx + ay = a - b \end{cases}$$

GIẢI

$$\text{a) Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2x + 3(m - 1)y = 3 \\ mx + (m - 2)y = 2 \end{cases}$$

Ta có: $D = m(2m - 1)(m - 3)$

Hệ vô nghiệm thì $D = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = \frac{1}{2} \vee m = 3$

* $m = 0$: Hệ có dạng: $\begin{cases} 0x - 3y = 3 \\ 0x - 2y = 2 \end{cases}$ có nghiệm là

$x \in \mathbb{R}, y = -1$

* $m = \frac{1}{2}$: Hệ có dạng $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$ vô nghiệm

* $m = 3$: Hệ có dạng: $\begin{cases} 3x + y = \frac{1}{2} \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy $m = \frac{1}{2} \vee m = 3$

b) Ta có: $D = a^2 - b^2$

Hệ vô nghiệm thì $D = 0 \Leftrightarrow a = \pm b$

* $a = b$: Hệ có dạng: $\begin{cases} ax + ay = 2a \\ ax + ay = 0 \end{cases}$

• $a = 0$: Hệ $\Leftrightarrow 0x + 0y = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

• $a \neq 0$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ Vô nghiệm

* $a = -b$: Hệ có dạng: $\begin{cases} ax - ay = 0 \\ ax - ay = -2a \end{cases}$

• $a = 0$: Hệ $\Leftrightarrow 0x - 0y = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

• $a \neq 0$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = -2 \end{cases}$ Vô nghiệm

Vậy $a = \pm b \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.

10. Định điều kiện để hệ có vô số nghiệm

$$\begin{aligned} &14x + my = 1 + m \\ \text{a)} \quad &(m + 6)x + 2y = 3 + m \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} (1 + a)x + (a + b)y = b - a \\ (5 + a)x + 2(a + b)y = b - 1 \end{cases}$$

GIẢI

$$\text{a)} \quad \text{Ta có: } D = -m^2 - 6m - 8$$

$$\text{Hệ có vô số nghiệm thì } D = 0 \Leftrightarrow m = -4 \vee m = -2$$

$$* \quad m = -4: \text{ Hệ có dạng: } \begin{cases} x + y = \frac{3}{4} \\ x + y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

$$* \quad m = -2: \text{ Hệ có dạng: } \begin{cases} -4x - 2y = -1 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2y = 1 \text{ có vô số nghiệm. Vậy } m = -2$$

$$\text{b)} \quad \text{Ta có: } D = (a - 3)(a + b)$$

$$\text{Hệ có vô số nghiệm thì } D = 0 \Leftrightarrow a = 3 \vee a = -b$$

$$* \quad a = 3: \text{ Hệ có dạng: } \begin{cases} 4x + (3 + b)y = b - 3 \\ 4x + (3 + b)y = \frac{b - 1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Và có vô số nghiệm khi: } b - 3 = \frac{b - 1}{2} \Leftrightarrow b = 5$$

* $a = -b$: Hệ có dạng:
$$\begin{cases} (1-b)x + 0y = 2b \\ (5-b)x + 0y = b-1 \end{cases}$$

Và có vô số nghiệm khi: $\frac{2b}{1-b} = \frac{b-1}{5-b} \Leftrightarrow b^2 - 8b$

$-1 = 0 \Leftrightarrow b = 4 \pm \sqrt{17}$

Vậy $a = 3, b = 5 \vee a = -b = -4 \pm \sqrt{17}$

11. Định m nguyên để hệ có nghiệm nguyên

a)
$$\begin{cases} (m+1)x - 2y = m-1 \\ m^2m - y = m^2 + 2m \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = 2m+1 \end{cases}$$

GIẢI

a) Ta có: $D = (m-1)(2m+1), D_x = (m+1)(2m+1), D_y = 2m(2m+1)$

Ta xét các trường hợp:

* $m = 1$: Hệ có dạng:
$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \text{vô nghiệm (loại)}$$

* $m = -\frac{1}{2}$: Hệ có dạng:
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - 2y = -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4}x - y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x - 4y + 3 = 0$ phương trình này có nghiệm nguyên nhưng $m = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ nên loại.

* $m \neq 1 \wedge m = -\frac{1}{2}$: Hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{m+1}{m-1}, y = \frac{2m}{m-1}$$

Ta có: $x = \frac{m+1}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1}, y = \frac{2m}{m-1} = 2 + \frac{2}{m-1}$

• $m \in \mathbb{Z}; x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2}{m-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m-1 \in \{\pm 1, \pm 2\}$

$\Rightarrow m \in \{-1, 0, 2, 3\}$.

Vậy $m \in \{-1, 0, 2, 3\}$ thì hệ có nghiệm nguyên.

b) Ta có: $D = m^2 - 1, D_x = m - 1, D_y = (m - 1)(2m + 3)$

* $m = -1$: Hệ có dạng:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ x - y = -1 \end{cases} \text{ vô nghiệm (loại)}$$

* $m = 1$: Hệ có dạng: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x + y = 3$ có vô số nghiệm nguyên: $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y = 3 - x \end{cases}$

* $m \neq \pm 1$ hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{1}{m+1}, y = \frac{2m+3}{m+1} = 2 + \frac{1}{m+1}$$

$m, x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow m+1 = \pm 1 \Rightarrow m = 0 \vee m = -2$

Vậy $m \in \{-2, 0, 1\}$ thì hệ có nghiệm nguyên.

12. Định m, n để hai hệ phương trình cùng vô nghiệm

$$\begin{cases} (m+1) + (2n+1)y = 5n-1 \\ (m-1)x + ny = 2 \end{cases}, \begin{cases} (m+1)x + my = n \\ 3x + (4-m)y = 2n-1 \end{cases}$$

GIẢI

Ta có: $D_1 = n(m+1) - (m-1)(2n+1)$; $D_2 = 4 - m^2$

Nếu cả hai hệ cùng vô nghiệm thì: $D_1 = D_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} n(m+1) - (m-1)(2n+1) = 0 \\ 4 - m^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} n = -\frac{3}{5} \\ m = -2 \end{cases}$$

* Nếu $n = 1$, $m = 2$ thì hai hệ có dạng:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \text{ vô nghiệm; } \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \text{ vô số nghiệm}$$

trường hợp này không thỏa yêu cầu nên loại.

* Nếu $n = -\frac{3}{5}$, $m = -2$ thì hai hệ có dạng:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{5}y = 4 \\ x + \frac{1}{5}y = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ vô nghiệm; } \begin{cases} x + 2y = \frac{3}{5} \\ x + 2y = -\frac{11}{15} \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

Vậy $n = -\frac{3}{5}$, $m = -2$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải và biện luận các phương trình.

a) $mx + 2 = x + m$

b) $m^2(x + 1) = x + m$

c) $\frac{ax}{b} + b = \frac{bx}{a} + a$

d) $\frac{ax + b^3}{b} = \frac{bx + a^3}{a}$

2. Giải và biện luận các phương trình

a) $m + 2 + \frac{2m - 5}{x - 3} = 0$

b) $\frac{x - 3}{x - 1} + \frac{x - a}{x - b} = 2$

c) $-\frac{x - a}{b + c} + \frac{x - b}{c + a} + \frac{x - c}{a + b} = 3$

d) $\frac{a\sqrt{x}}{b} + \frac{b^2}{\sqrt{x}} = \frac{b\sqrt{x}}{a} + \frac{a^3}{\sqrt{x}}$

3. Định m để phương trình vô nghiệm

a) $m(x - 1) = 1 + \frac{x}{m}$

b) $\frac{x - m}{x} + \frac{x + 1}{x - 1} = 2$

4. Định m để phương trình có nghiệm

a) $m^2(x - 1) + 2m = x + 1$ b) $m(1 + |x|) = \frac{|x|}{m} + 1$

c) $m^2\sqrt{x + 1} = \frac{x + m}{\sqrt{x + 1}}$

5. Tìm điều kiện để phương trình có tập hợp nghiệm là R

a) $m^2(x - 1) = 2(2x - m)$ b) $a(x + b) = bx + 1$

6. Định $m \in \mathbb{Z}$ sao cho phương trình có nghiệm duy nhất $x \in \mathbb{Z}$

a) $2m(x - 1) = x + 2$ b) $m(2x - 1) = x + 1$

c) $2x = m(3x - 1)$

d) $n(3m^2 - 1) + x = m(m + 4x)$

7. Giải và biện luận các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax + by = a + 1 \\ bx + ay = b + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (m+1)\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = m-1 \\ \frac{m^2}{x} - \frac{1}{y} = m^2 + 2m \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = a + b \\ \frac{b}{x} + \frac{a}{y} = a - b \end{cases}$

8. Định m để hệ có nghiệm duy nhất

a) $\begin{cases} (m-1)x + (4-m)y = 1 \\ mx + (m+2)y = m \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{m}{x} + y = 3m \\ \frac{1}{x} + my = 2m + 1 \end{cases}$

9. Định điều kiện để hệ phương trình vô nghiệm

$$a) \begin{cases} x + (1-a)y = b \\ ax - 2y = b^2 + 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = a \\ (2a-b)x + (2a+b)y = b \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} mx + \frac{1}{y} = 2m \\ x + \frac{m}{y} = m + 1 \end{cases}$$

10. Định điều kiện để hệ có vô số nghiệm

$$a) \begin{cases} ax + by = a^2 - b \\ bx + b^2y = 4b \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} mx + 2y = n^2 + 1 \\ x + (m-1)y = n \end{cases}$$

11. Định m nguyên để hệ có nghiệm x, y nguyên

$$a) \begin{cases} mx + 2y = 2m \\ 3x + (m+1)y = m + 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} mx + (m+1)y = 1 \\ 2x + (2m-1)y = m-1 \end{cases}$$

12. Định a, b, c để đồng thời 3 hệ sau vô nghiệm

$$(I): \begin{cases} ax - y = 1 \\ bx + ay = c \end{cases}; (II): \begin{cases} x - by = a \\ cx + ay = -1 \end{cases}; (III): \begin{cases} cx + y = b \\ x + cy = a \end{cases}$$

13. Cho hệ:
$$\begin{cases} ax + y = 3a + b - c \\ x + ay = 2a + b - c^2 + 1 \end{cases}$$

a) Định a, b, c sao cho $x = 3, y = 2$ là nghiệm.

b) Cho $b = c = 0$. Hãy giải và biện luận hệ theo a .

c) Định b sao cho mọi $a \in \mathbb{R}$ ta luôn tìm được c tương ứng để hệ có nghiệm.

14. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, c ($abc \neq 0$) để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$$

Hãy xác định nghiệm duy nhất đó.

BÀI 2: DẤU NHỊ THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

I. Vấn đề 1:

XÉT DẤU, GIẢI PHƯƠNG TRÌNH DẠNG TÍCH, THƯƠNG CÁC NHỊ THỨC

a) Dấu nhị thức: $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f(x)	Trái dấu a	0	Cùng dấu a

Dấu biểu thức có dạng tích, thương các nhị thức:
Ta xét dấu từng nhị thức rồi suy ra dấu biểu thức.

* Lưu ý: Biểu thức có dạng $(ax + b)^{2n}$ không bị đổi dấu

– biểu thức có dạng $(ax + b)^{2n+1}$ cùng dấu với nhị thức: $ax + b$.

b) Giải bất phương trình có dạng $F(x) > 0$ (hay $F(x) < 0$) trong đó $F(x)$ có dạng tích, thương các nhị thức. ta xét dấu $F(x)$ rồi chọn nghiệm x:
 $|F(x) > 0$ (hay $F(x) < 0$).

Ví dụ 1: xét dấu biểu thức

a) $f(x) = (1 - 2x)(x + 1)^2(x - 1)^3$

b) $g(x) = \frac{x(2x - 3)(x - 1)^2}{(x + 1)(x - 2)^3}$

GIẢI

a)

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	+	
$1 - 2x$	+	+	0	-	-	
	+	0	+	+	+	
	-	-	-	0	+	
	-	-	0	+	0	-

b)

x	$-\infty$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
x	-	+	0	+	+	+	+
$2x - 3$	-	-	-	-	0	+	+
$(x - 1)^2$	+	+	+	+	+	+	+
$x + 1$	-	0	+	+	+	+	+
$(x - 2)$	-	-	-	-	-	0	+
g(x)	+	+	0	+	+	-	+

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x+1} > \frac{2}{x^2+x}$ (*)

GIẢI

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x+1} - \frac{2}{x^2+x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1+x(x-1)-2}{x(x+1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0, x \neq -1, x \neq 0$$

x	$-\infty$	-	-1	-	0	+	1	+	$+\infty$
$x-1$		-		-		-	0	+	
$\frac{x-1}{x}$		+		+		-	0	+	

Vậy $x < -1 \vee -1 < x < 0 \vee 1 < x$

II. Vấn đề 2: GIẢI VÀ BIỆN LUẬN BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

$$ax + b > 0; ax + b < 0; ax + b \geq 0; ax + b \leq 0$$

Ta biện luận theo dấu của hệ số a.

Ví dụ 1: Giải và biện luận bất phương trình

$$m^2(x-1) > x-m \quad (*)$$

GIẢI

$$(*) \Leftrightarrow (m^2 - 1)x > m^2 - m$$

$$\text{Hệ số } a = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$$

m	$-\infty$	-1	-1	+	$+\infty$
m - 1	-	-	0	+	
m + 1	+	0	+	+	
a	+	0	-	0	

• $m < -1 \vee m > 1: (*) \Leftrightarrow x > -\frac{m}{m+1}$

• $-1 < m < 1: (*) \Leftrightarrow x < \frac{m}{m+1}$

• $m = -1: (*) \Leftrightarrow 0x > 2: \text{vô nghiệm}$

• $m = 1: (*) \Leftrightarrow 0x > 0: \text{vô nghiệm}$

Ví dụ 2: Giải và biện luận bất phương trình

$$\frac{m}{x-1} \geq 1 \quad (*)$$

GIẢI

$$(*) \Leftrightarrow \frac{m}{x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+m+1}{x-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-(m+1)}{x-1} \leq 0 \text{ ta cần so sánh } m+1 \text{ với } 1$$

• $m+1 < 1 \Leftrightarrow m < 0$. Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	m + 1	1	$+\infty$
x - (m + 1)	-	0	+	+
x - 1	-	-	0	+

$$\frac{x - (m + 1)}{x - 1}$$

+ 0 - || +

(*) có nghiệm là: $m + 1 \leq x < 1$

• $m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$

(*) $\Leftrightarrow \frac{x + 1}{x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 1 \leq 0 \end{cases}$ vô nghiệm

• $m + 1 > 1 \Leftrightarrow m > 0$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	$m + 1$	$+\infty$
$x - (m + 1)$	-	-	0	+
$x - 1$	-	0	+	+
$\frac{x - (m + 1)}{x - 1}$	+		- 0	+

(*) có nghiệm là: $1 < x \leq m + 1$

Ví dụ 3: Định m để bất phương trình

$$M^2(x - 1) + 2(mx + 2) > 0 \quad (*)$$

a) Vô nghiệm

b) Có tập nghiệm là R.

GIẢI

(*) $\Leftrightarrow (m^2 + 2m)x > m^2 - 4$

a) (*) Vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m = 0 \\ m^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$

b) (*) Có tập nghiệm R $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m = 0 \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$

Ví dụ 4: Tìm điều kiện để hai bất phương trình tương đương: $a_1x + b_1 > 0$ (1); $a_2x + b_2 > 0$ (2)

Gọi S_1, S_2 lần lượt là tập hợp nghiệm của (1) và (2)

* (1) và (2) tương đương $\Leftrightarrow S_1 = S_2$

Ta biết bất phương trình $ax + b > 0$ có tập nghiệm là

$$S = \emptyset \vee S = \mathbb{R} \vee S = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) \vee S = \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$$

Như vậy, các trường hợp để có $S_1 = S_2$ là:

$$a) S_1 = S_2 = \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = 0 \\ b_1 > 0 \wedge b_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$b) S_1 = S_2 = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = 0 \\ b_1 \leq 0 \wedge b_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$c) S_1 = S_2 = (-\infty, x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 < 0 \wedge a_2 < 0 \\ -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2} = x_0 \end{cases}$$

$$d) S_1 = S_2 = (x_0, +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \wedge a_2 > 0 \\ -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2} = x_0 \end{cases}$$

Tóm lại:

* $(a_1 = a_2 = 0, b_1 = b_2 = 0) \vee (a_1 = a_2 = 0, b_1 b_2 > 0)$

$$* a_1 a_2 > 0, \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$$

III. Vấn đề 3: HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

- dạng cơ bản:
$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ a'x + b' > 0 \end{cases}$$

Ta biện luận theo dấu của:

$$a; a'; x_1 - x_2 = \frac{-b}{a} - \frac{-b'}{a'}$$

Ví dụ 1: giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} (m-1)x - m > 0 \\ mx - m - 1 > 0 \end{cases}$$

GIẢI

Ta có: $a = m - 1$, $a' = m$,

$$x_1 - x_2 = \frac{m}{m-1} - \frac{m+1}{m} = \frac{1}{m(m-1)}$$

m	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$a = m - 1$	-	-	0	+
$a' = m$	-	0	+	+
$x_1 - x_2 = \frac{1}{m(m-1)}$	+	-	-	+

- $m < 0$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{m+1}{m}$

- $m = 0$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -x > 0 \\ 0x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$
- $0 < m < 1$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$
- $m = 1$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0x - 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$
- $m > 1$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x > x_1 \\ x > x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{m}{m-1}$

Ví dụ 2: Định m để hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} (1-2m)x + m \leq 0 & (1) \\ mx - m + 2 \leq 0 & (2) \end{cases}$$

GIẢI

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hệ tương

đương với một trong hai dạng $\begin{cases} x \leq x_1 \\ x \geq x_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq x_1 \\ x \leq x_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$

Tức là: ta phải có:

$$\begin{cases} (1-2m).m < 0 \\ \frac{m}{1-2m} = \frac{m-2}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2m)m < 0 \\ m = 1 \vee m = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \vee m = \frac{2}{3}$$

- $m = 1$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$
- $m = \frac{2}{3}$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$

Vậy $m = 1 \vee m = \frac{2}{3}$.

B. GIẢI BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Xét dấu các biểu thức:

a) $f(x) = 3x(2x + 7)(9 - 3x)$

b) $g(x) = \frac{(x^2 - 5x + 6)(2x - 1)}{4 - 3x}$

c) $h(x) = (x^2 - 2x + 3)^2 - (x^2 + x - 3)^2$

GIẢI

a)

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	0	3	$+\infty$
3x	-	-	0	+	+
2x + 7	-	0	+	+	+
9 - 3x	+	+	+	0	-
f(x)	+	0	-	0	-

b) $g(x) = \frac{(x^2 - 5x + 6)(2x - 1)}{4 - 3x} = \frac{(x - 2)(x - 3)(2x - 1)}{4 - 3x}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	0	3	$+\infty$	
$x - 2$	-	-	-	0	+	+	
$x - 3$	-	-	0	+	-	0	+
$2x - 1$	-	0	+	+	+	+	
$4 - 3x$	+	+	0	-	-	-	
$g(x)$	-	0	+	0	+	0	-

c) $h(x) = (2x^2 - x)(-3x + 6) = x(2x - 1)(-3x + 6)$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
x	-	0	+	+	+
$2x - 1$	-	-	0	+	+
$-3x + 6$	+	+	+	0	-
$h(x)$	+	0	-	0	-

2. Giải các bất phương trình

a) $\frac{x+9}{x-1} > 5$

b) $\frac{x^2 + 2x + 5}{x+1} \geq x - 3$

c) $\frac{x^2 + 3x - 1}{2 - x} > -x$

d) $\frac{x+2}{3x+1} > \frac{x-2}{2x-1}$

e) $x + \frac{9}{x+2} \geq 4$

f) $\frac{(x-1)^3(x+2)^4(x+6)}{(x-7)^3 \cdot (x-2)^2} \leq 0$

GIẢI

$$a) \frac{x+9}{x-1} > 5 \Leftrightarrow \frac{x+9-5(x-1)}{x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x+14}{x-1} > 0 \quad (1)$$

x	$-\infty$	1	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$-4x+14$	+	0	+	-
$x-1$	-	0	+	+
(1)	-		+	-

(1) có nghiệm: $1 < x < \frac{7}{2}$

$$b) \frac{x^2+2x+5}{x+1} \geq x-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+5-(x+1)(x-3)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x+8}{x+1} \geq 0 \quad (2)$$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$4x+8$	-	0	+	+
$x+1$	-	-	0	+
(2)	+	0		+

(2) có nghiệm: $x \leq -2 \vee -1 < x$.

$$c) \frac{x^2+3x-1}{2-x} > -x \Leftrightarrow \frac{x^2+3x-1+x(2-x)}{2-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-1}{2-x} > 0 \quad (3)$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	2	$+\infty$
5x - 1	-	0	+	+
2 - x	+	+	0	-
(3)	-	0	+	-

(3) có nghiệm: $\frac{1}{5} < x < 2$

$$d) \frac{x+2}{3x+1} > \frac{x-2}{2x-1} \Leftrightarrow \frac{(x+2)(2x-1) - (x-2)(3x+1)}{(3x+1)(2x-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(8-x)}{(3x+1)(2x-1)} > 0 \quad (4)$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	8	$+\infty$			
x	-	-	0	+	+	+			
$8 - x$	+	+	+	+	0	-			
$3x + 1$	-	0	+	+	+	+			
$2x - 1$	-	-	-	0	+	+			
(4)			+	0	-		+	0	-

(4) có nghiệm: $-\frac{1}{3} < x < 0 \vee \frac{1}{2} < x < 8$

$$e) \quad x + \frac{9}{x+2} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{x(x+2) + 9 - 4(x+2)}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x+2} \geq 0 \quad (5)$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	0	+
$x+2$	-	0	+	+
(5)	-		+	+

(5) có nghiệm: $x > -2$

f)

x	$-\infty$	-6	-2	1	2	7	$+\infty$
$(x-1)^3$	-	-	0	+	+	+	+
$(x+2)^1$	+	+	0	+	+	+	+
$x+6$	-	0	+	+	+	+	+
$(x-7)^3$	-	-	-	-	-	0	+
$(x-2)^2$	+	+	+	+	0	+	+
(6)	-	0	+	0	+	0	+

(6) có nghiệm: $x \leq 6 \vee x = -2 \vee 1 \leq x < 2 \vee 2 < x < 7$

3. Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $m(x+4) > 3mx + 2$

b) $mx + 1 \leq 2x + m$

c) $x(1-m)^2 > 1 - 2mx$

$$d) \frac{mx+1}{m-1} > \frac{mx-1}{m+1} \quad (m \neq \pm 1)$$

$$e) x+1 > \frac{bx}{a} + \frac{a}{b} \quad (a, b > 0)$$

$$f) x + \frac{x-1}{a} > \frac{x+1}{a} - (a+1)x \quad (a \neq 0)$$

GIẢI

$$a) \quad m(x+4) > 3mx+2 \Leftrightarrow mx < 2m-4 \quad (1)$$

- $m > 0$: (1) có nghiệm: $x < 2 - \frac{4}{m}$

- $m = 0$: (1) $\Leftrightarrow 0x < -4 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

- $m < 0$: (1) có nghiệm: $x > 2 - \frac{4}{m}$

$$b) \quad mx+1 \leq 2x+m \Leftrightarrow (m-2)x \leq m-1 \quad (2)$$

- $m > 2$: (2) có nghiệm: $x \leq \frac{m-1}{m-2}$

- $m = 2$: (2) $\Leftrightarrow 0x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

- $m < 2$: (2) có nghiệm: $x \geq \frac{m-1}{m-2}$

$$c) \quad x(1-m)^2 > 1-2mx \Leftrightarrow (m^2+1)x > 1$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{m^2+1}$$

$$d) \frac{mx+1}{m-1} > \frac{mx-1}{m+1} \Leftrightarrow \frac{m}{m^2-1} (x+1) > 0 \quad (4)$$

Ta xét dấu: $\frac{m}{m^2-1} = \frac{m}{(m-1)(m+1)}$

m	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
m	-	-	0	+	+	
m - 1	-	-	-	0	+	
m + 1	-	0	+	+	+	
$\frac{m}{m^2 - 1}$	-		+	0		+

- $m < -1 \vee 0 < m < 1$: (4) có nghiệm: $x < -1$
- $-1 < m < 0 \vee 1 < m$: (4) có nghiệm: $x > -1$
- $m = \pm 1$: (4) vô nghiệm
- $m = 0$: (4) vô nghiệm

$$e) x+1 > \frac{bx}{a} + \frac{a}{b} \Leftrightarrow b(a-b)x > a(a-b) \quad (5)$$

- $a > b > 0$: (5) có nghiệm: $x > \frac{a}{b}$
- $a = b > 0$: (5) vô nghiệm
- $0 < a < b$: (5) có nghiệm: $x < \frac{a}{b}$

$$f) x + \frac{x-1}{a} > \frac{x+1}{a} - (a+1)x \Leftrightarrow (a+2)x > \frac{2}{a} \quad (6)$$

- $-2 < a \neq 0$: (6) có nghiệm: $x > \frac{2}{a(a+2)}$
- $a < -2$: (6) có nghiệm: $x < \frac{2}{a(a+2)}$
- $a = -2$: (6) $\Leftrightarrow 0x > -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
- $a = 0$: vô nghiệm

4. Giải và biện luận các bất phương trình

a) $\frac{2x+m-1}{x+1} > 0$

b) $\frac{mx-m+1}{x-1} < 0$

c) $(x-m+2)\sqrt{x-1} > 0$

d) $m^2x^2 < (x+1)^2$

GIẢI

a) • $2x+m-1=0 \Leftrightarrow x=x_1=\frac{1-m}{2}$

• $x+1=0 \Leftrightarrow x=x_2=-1$

Xét $x_1 - x_2 = \frac{1-m}{2} + 1 = \frac{3-m}{2}$

• $m > 3$

x	$-\infty$	$\frac{1-m}{2}$	-1	$+\infty$
$2x+m-1$	-	0	+	+
$x+1$	-	-	0	+
(1)	+	0	-	+

(1) có nghiệm: $x < \frac{1-m}{2} \vee x > -1$

• $m = 3$: (1) $\Leftrightarrow 2 > 0, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• $m < 3$: (1) có nghiệm: $x < -1 \vee x > \frac{1-m}{m}$

b) • $mx - m + 1 = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{m-1}{m}$

• $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = x_2 = 1$

Ta phải xét dấu m và $x_1 - x_2 = \frac{m-1}{m} - 1 = -\frac{1}{m}$

* $m > 0$

x	$-\infty$	$\frac{m-1}{m}$	1	$+\infty$
$mx - m + 1$	-	0	+	+
$x - 1$	-	-	0	+
(2)	+	0	-	+

(2) có nghiệm: $\frac{m-1}{m} < x < 1$

* $m < 0$

x	$-\infty$	1	$\frac{m-1}{m}$	$+\infty$
$mx - m + 1$	+	+	0	-
$x - 1$	-	0	+	+
(2)	-	+	0	-

(2) có nghiệm: $x < 1 \vee x > \frac{m-1}{m}$

* $m = 0$: (2) $\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} < 0$: có nghiệm $x < 1$

c) $(x - m + 2)\sqrt{x-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > m-2 \end{cases} \quad (3)$

* $m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = 3$: (3) có nghiệm $x > 1$

* $m - 2 > 1 \Leftrightarrow m > 3$: (3) có nghiệm $x > m - 2$

* $m - 2 < 1 \Leftrightarrow m < 3$: (3) có nghiệm $x > 1$

d) $m^2x^2 < (x+1)^2 \Leftrightarrow (mx - x - 1)(mx + x + 1) < 0$
 $\Leftrightarrow [(m-1)x - 1] \cdot [(m+1)x + 1] < 0 \quad (4)$

Ta cần xét dấu $m-1$; $m+1$;

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{m-1} - \frac{-1}{m+1} = \frac{2m}{(m-1)(m+1)}$$

m	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$m-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$m+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2m$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x_1 - x_2$	$-$	$+$	0	$-$	$+$

Biện luận

- $m < -1$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{m-1}$	$\frac{-1}{m+1}$	$+\infty$
$(m-1)x - 1$	+	0	-	-
$(m+1)x + 1$	+	+	0	+
(4)	+	0	-	+

(4) có nghiệm: $\frac{1}{m-1} < x < \frac{-1}{m+1}$

- $m = -1$: $(4) \Leftrightarrow (-2x - 1)(1) < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

- $-1 < m < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{m+1}$	$\frac{1}{m-1}$	$+\infty$
$(m-1)x - 1$	+	+	0	-
$(m+1)x + 1$	-	0	+	+
(4)	-	0	+	-

(4) có nghiệm: $x < \frac{-1}{m+1} \vee x > \frac{1}{m-1}$

- $m = 0$: $(4) \Leftrightarrow 0 < (x+1)^2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $0 < m < 1$

x	$-\infty$	$\frac{1}{m-1}$	$\frac{-1}{m+1}$	$+\infty$
$(m-1)x-1$	+	0	-	-
$(m+1)x+1$	-	-	0	+
(4)	-	0	+	0

(4) có nghiệm: $x < \frac{1}{m-1} \vee x > \frac{-1}{m+1}$

• $m = +1$: $(4) \Leftrightarrow (-1)(2x+1) < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

• $m > 1$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{m+1}$	$\frac{1}{m-1}$	$+\infty$	
$(m-1)x-1$	-	-	0	+	
$(m+1)x+1$	-	0	+	+	
(4)	+	0	-	0	+

(4) có nghiệm: $\frac{-1}{m+1} < x < \frac{1}{m-1}$

5. Định m để bất phương trình

a) $m(x+1) + m^2x \leq 1$ + m có tập nghiệm R.

b) $m^2(mx-1) < m(1-m)x$ vô nghiệm

c) $(m+1)x - m^2 + m + 6 > 0$ có tập nghiệm là: $(0, +\infty)$

GIẢI

$$a) \quad m(x+1) + m^2x \leq 1 + m \Leftrightarrow (m^2 + m)x \leq 1 \quad (1)$$

$$(1) \text{ có tập nghiệm } R \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1 \vee m = 0$$

$$b) \quad m^2(mx-1) < m(1-m)x \Leftrightarrow (m^3 + m^2 - m)x < m^2 \quad (2)$$

$$(2) \text{ vô nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + m^2 - m = 0 \\ m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy $m = 0$.

$$c) \quad (m+1)x - m^2 + m + 6 > 0 \text{ có tập nghiệm là } (0, +\infty)$$

$$\text{Khi và chỉ khi: } \begin{cases} m+1 > 0 \\ -m^2 + m + 6 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m = -2 \vee m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3. \text{ Vậy } m = 3.$$

6. Giải các hệ bất phương trình:

$$a) \begin{cases} 3x + 1 \geq 2x + 7 \\ 4x + 3 < 2x + 19 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6} \\ \frac{3x+5}{4} - 1 \leq \frac{x-2}{3} + x \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{2x+3}{x-1} \geq 1 \\ \frac{(x+2)(2x-4)}{x-1} \leq 0 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x+3 \leq 4+2x \\ 5x-3 < 4x-1 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

GIẢI

$$a) \begin{cases} 3x + 1 \geq 2x + 7 \\ 4x + 3 < 2x + 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x < 8$$

$$b) \begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6} \\ \frac{3x+5}{4} - 1 \leq \frac{x-2}{3} + x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0x < 13 \\ 11 \leq 7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \leq \frac{11}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{11}{7}$$

$$c) \begin{cases} \frac{2x+3}{x-1} \geq 1 \\ \frac{(x+2)(2x-4)}{x-1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+4}{x-1} \geq 0 \quad (1) \\ \frac{2(x+2)(x-2)}{x-1} \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x+4$		-	0	+		+	
$x-1$		-		-	0	+	
(1)		+	0	-		+	

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x+2$		-	0	+		+		+	
$x-2$		-		-		-	0	+	
$x-1$		-		-	0	+		+	
(2)		-	0	+		-	0	+	

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \vee x > 1 \\ x \leq -2 \vee 1 < x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -4 \vee 1 < x \leq 2$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 3 \leq 4 + 2x \\ 5x - 3 < 4x - 1 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$$

7. Định m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} \frac{x-1}{x-2} \leq 0 \\ 4x+1 \leq m \end{cases}$

a) Vô nghiệm

b) Có 1 nghiệm duy nhất.

GIẢI

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ x \leq \frac{m-1}{4} \end{cases}$$

a) Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{m-1}{4} < 1 \Leftrightarrow m < 5$

b) Hệ có 1 nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{m-1}{4} = 1 \Leftrightarrow m = 5$

8. Định m để hệ bất phương trình vô nghiệm

$$\begin{cases} 3x + 5 \geq x - 1 \\ (x+2)^2 \leq (x-1)^2 + 9 \\ m^2 \cdot x + 1 > m + (3m-2)x \end{cases}$$

GIẢI

$$\text{Hệ bất phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 1 \\ (m^2 - 3m + 2)x > m - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 & (1) \\ (m-1)(m-2)x < m-1 & (2) \end{cases}$$

m	$-\infty$	1	2	$+\infty$
m - 1	-	0	+	+
m - 2	-		0	+
(m - 1)(m - 2)	+	0	-	+

$$* m < 1 \vee m > 2: (2) \Leftrightarrow x > \frac{1}{m-2}$$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x > \frac{1}{m-2} \end{cases}$$

$$\text{Hệ vô nghiệm} \Leftrightarrow \frac{1}{m-2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-3}{m-2} \leq 0 \Leftrightarrow 2 < m \leq 3$$

$$* 1 < m < 2: (2) \Leftrightarrow x < \frac{1}{m-2}$$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x < \frac{1}{m-2} \end{cases}$$

$$\text{Hệ vô nghiệm} \Leftrightarrow \frac{1}{m-2} \leq -3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3m-5}{m-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq m < 2$$

$$* m = 1: \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ 0x < 0 \end{cases} : \text{vô nghiệm}$$

$$* m = 2: \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ 0x > 1 \end{cases} : \text{vô nghiệm}$$

Tóm lại: hệ vô nghiệm khi:

$$\begin{cases} m < 1 \vee m > 2 \\ 2 < m \leq 3 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 < m < 2 \\ \frac{5}{3} \leq m < 2 \end{cases} \vee m = 1 \vee m = 2$$

$$\Leftrightarrow 2 < m \leq 3 \vee \frac{5}{3} \leq m < 2 \vee m = 1 \vee m = 2$$

$$\text{Vậy: } \frac{5}{3} \leq m \leq 3 \vee m = 1.$$

9. Giải và biện luận hệ bất phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} mx - 1 > 0 \\ (3m - 2)x - m > 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } (a - 2)x \leq a^2 - 2a \leq ax$$

GIẢI

a) Ta xét dấu:

$$m, 3m - 2, x_1 - x_2 = \frac{1}{m} - \frac{m}{3m - 2} = \frac{(1 - m)(m - 2)}{m(3m - 2)}$$

m	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	1	2	$+\infty$		
m	-	0	+	+	+	+		
$3m - 2$	-	-	+	+	+	+		
$1 - m$	+	+	0	0	-	-		
$m - 2$	-	-	-	-	0	+		
$x_1 - x_2$	-		+		0	+	0	-

$$\bullet m < 0: \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{1}{m}$$

$$\bullet m = 0: \text{Hệ có dạng} \begin{cases} 0x - 1 > 0 \\ -2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$\bullet 0 < m < \frac{2}{3}: \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x > x_1 \\ x < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$\bullet m = \frac{2}{3}: \text{Hệ có dạng} \begin{cases} \frac{2}{3}x - 1 > 0 \\ 0x - \frac{2}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$\bullet \frac{2}{3} < m < 1 \vee m > 2$$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x > x_1 \\ x > x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{m}{3m-2}$$

$$\bullet m = 1: \text{Hệ có dạng} \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

$$\bullet 1 < m < 2: \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x > x_1 \\ x > x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{m}$$

$$\text{b) } (a-2)x \leq a^2 - 2a \leq ax \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)x \leq a^2 - 2a \\ ax \geq a^2 - 2a \end{cases}$$

Ta xét dấu: $a, a-2, x_1 - x_2 = a - (a-2) = 2 > 0$

a	$-\infty$	0	2	$+\infty$
a		0	$+$	$+$
$a-2$		$-$	$-$	0

$$\bullet a < 0: \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq x_1 \\ x \leq x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$\bullet a = 0: \text{Hệ có dạng} \begin{cases} -2x \leq 0 \\ 0x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\bullet 0 < a < 2: \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq x_1 \\ x \geq x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq a$$

$$* a = 2: \text{Hệ có dạng } \begin{cases} 0x \leq 0 \\ 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$* a > 2: \text{Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x_1 \\ x \geq x_2 \end{cases} \Leftrightarrow a - 2 \leq x \leq a$$

10. Định m để hai bất phương trình tương đương

a) $(m - 1)x + 3 - m > 0; (m + 1)x + 2 - m > 0$

b) $mx - m - 1 > 0; (m - 2)x + m < 0$

GIẢI

Lời giải chi tiết bạn đọc xem lại ví dụ 4

$$a) \begin{cases} (m - 1)(m + 1) > 0 \\ \frac{m - 3}{m - 1} = \frac{m - 2}{m + 1} \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$$

$$b) \begin{cases} m(m - 2) < 0 \\ \frac{m + 1}{m} = \frac{m}{2 - m} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

11. Định m để hàm số sau xác định khi $x \geq 1$:

$$Y = \sqrt{mx - 2m + 1} + \sqrt{2x + m - 2}$$

GIẢI

Hàm số xác định khi $\begin{cases} mx - 2m + 1 \geq 0 \\ 2x + m - 2 \geq 0 \end{cases} (*)$

Ta cần tìm m để hệ (*) có tập nghiệm chứa khoảng $[1, +\infty)$

$$* m = 0: \text{Hệ (*)} \begin{cases} 0x + 1 \geq 0 \\ 2x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ thỏa yêu cầu}$$

* $m > 1$: Hệ (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2m-1}{m} \\ x \geq \frac{2-m}{2} \end{cases} \text{ tập nghiệm này chứa } [1, +\infty)$$

$$\text{khi } \begin{cases} 1 \geq \frac{2m-1}{m} \\ 1 \geq \frac{2-m}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < m \leq 1$$

$$* m < 0: \text{Hệ (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2m-1}{m} \quad (1) \\ x \geq \frac{2-m}{2} \end{cases}$$

Từ (1) ta thấy tập nghiệm của hệ không chứa được khoảng $[1, +\infty)$ nên không thỏa yêu cầu.

Tóm lại: $0 \leq m \leq 1$.

12. Giải và biện luận phương trình

a) $m^2x + 4m - 3 = x + m^2$

b) $(a + b)^2x + 2a^2 = 2a(a + b) + (a^2 + b^2)x$

$$c) a^2x + 2ab = b^2x + a^2 + b^2$$

$$d) a(ax + b) = 4ax + b^2 - 5$$

GIẢI

$$a) m^2x + 4m - 3 = x + m^2 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = m^2 - 4m + 3$$

$$* m \neq \pm 1: 1 \text{ nghiệm } x = \frac{m-3}{m+1}$$

$$* m = 1: \text{phương trình có dạng: } 0x = 0: \text{nghiệm, } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$* m = -1: \text{phương trình có dạng: } 0x = 8: \text{vô nghiệm}$$

$$b) (a+b)^2x + 2a^2 = 2a(a+b) + (a^2 + b^2)x$$

$$\Leftrightarrow 2abx = 2ab$$

$$* ab \neq 0: 1 \text{ nghiệm } x = 1$$

$$* ab = 0: 0x = 0: \text{nghiệm } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$c) a^2x + 2ab = b^2x + a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)x = (a - b)^2$$

$$* a \neq \pm b: 1 \text{ nghiệm: } x = \frac{a-b}{a+b}$$

$$* a = b: 0x = 0: \text{nghiệm } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$* a = -b: 0x = 4a^2$$

$$\bullet a = 0: \text{nghiệm } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet a \neq 0: \text{vô nghiệm}$$

$$d) a(ax + b) = 4ax + b^2 - 5 \Leftrightarrow (a^2 - 4a)x = b^2 - ab - 5$$

$$* a \neq 0 \wedge a \neq 4: 1 \text{ nghiệm: } x = \frac{b^2 - ab - 5}{a^2 - 4a}$$

* $a = 0: 0x = b^2 - 5$

• $b = \pm\sqrt{5}$: nghiệm $x \in \mathbb{R}$

• $b \neq \pm\sqrt{5}$: vô nghiệm

* $a = 4: 0x = b^2 - 4b - 5$

• $b = -1 \vee b = 5$: nghiệm $x \in \mathbb{R}$

• $b \neq -1 \wedge b \neq 5$: vô nghiệm

13. Định m để phương trình có nghiệm

a) $\frac{2x+m}{x-1} - \frac{x+m-1}{x} = 1 \quad (1)$

b) $\frac{mx^2}{|x|-1} - m|x| = 2m+1 \quad (2)$

c) $\frac{2mx-1}{\sqrt{x-1}} - 2\sqrt{x-1} = \frac{m+1}{\sqrt{x-1}} \quad (3)$

d) $|x-1| + 2x \cdot 3 = m \quad (4)$

GIẢI

a) Điều kiện: $x \neq 1 \wedge x \neq 0 \quad (1) \Leftrightarrow \frac{1-m}{3}$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{1-m}{3} \neq 1 \wedge \frac{1-m}{3} \neq 0$

$\Leftrightarrow m \neq -2 \wedge m \neq 1.$

b) Điều kiện: $|x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

(2) $\Leftrightarrow (m+1) \cdot |x| = 2m+1$

* $m = -1$: $0 \cdot |x| = -1$: vô nghiệm

* $m \neq -1$: $(2) \Leftrightarrow |x| = \frac{2m+1}{m+1}$

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{2m+1}{m+1} \geq 0 \wedge \frac{2m+1}{m+1} \neq 1$

m	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2m+1$	-	-	0	+
$m+1$	-	0	+	+
$\frac{2m+1}{m+1}$	+		0	+

Vậy: $m < -1 \vee -\frac{1}{2} \leq m \neq 0$

c) Điều kiện: $x > 1$

$(3) \Leftrightarrow 2mx - 1 - 2(x - 1) = m + 1 \Leftrightarrow 2(m - 1)x = m$

* $m = 1$: $0x = 1$: vô nghiệm

* $m \neq 1$: $(3) \Leftrightarrow x = \frac{m}{2(m-1)}$

(3) có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{m}{2(m-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{m-2}{m-1} < 0$

m	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$m-2$	-	-	0	+
$m-1$	-	0	+	+

$\frac{m-2}{m-1}$	+	-	0	+
-------------------	---	---	---	---

Vậy $1 < m < 2$

d) * $x \geq 1$: (4) $\Leftrightarrow x - 1 + 2x - 3 = m \Leftrightarrow x = \frac{m+4}{3}$

* $x < 1$: (4) $\Leftrightarrow 1 - x + 2x - 3 = m \Leftrightarrow x = m + 2$

Như vậy (4) có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{m+4}{3} \geq 1 \vee m+2 < 1$

$\Leftrightarrow m \geq -1 \vee m < -1$

Vậy $m \in \mathbb{R}$.

14. Tìm hệ thức giữa x, y độc lập với a . Định $a \in \mathbb{Z}$ để hệ có nghiệm nguyên

a)
$$\begin{cases} ax + 2y = a + 1 \\ 2x + ay = 2a - 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} ax + y = 3a \\ x + ay = 2a + 1 \end{cases}$$

GIẢI

a) Ta có: $D = a^2 - 4$, $D_x = (a - 1)(a - 2)$,

$D_y = (2a + 1)(a - 2)$

* $a = -2$: Hệ có dạng $\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 2x - 2y = -5 \end{cases}$ vô nghiệm

* $a = 2$: Hệ có dạng $\begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + 2y = 3$ có

$$\text{nghiệm} \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

* $a \neq \pm 2$: Hệ có 1 nghiệm duy nhất

$$x = \frac{a-1}{a+2} = 1 - \frac{3}{a+2}, y = \frac{2a+1}{a+2} = 2 - \frac{3}{a+2}$$

Suy ra: $x - y = -1$

i) Hệ thức liên hệ giữa x, y độc lập với a là:

$$2x + 2y = 3 \vee x - y + 1 = 0$$

ii) • $a = 2 \in \mathbb{Z}$. Ta có: $2x + 2y = 3$ với $x, y \in \mathbb{Z}$ thì $2x + 2y$ là số chẵn nên $2x + 2y = 3$ không có nghiệm nguyên

• $a \neq \pm 2$: Hệ có nghiệm duy nhất

$$x = 1 - \frac{3}{a+2}, y = 2 - \frac{3}{a+2}$$

$$a, x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{3}{a+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+2 \in \{\pm 3, \pm 1\}$$

$$\Rightarrow a \in \{-5, -3, -1, 1\}$$

b) Ta có: $D = a^2 - 1, D_x = (a-1)(3a+1), D_y = 2a(a-1)$

* $a = -1$: Hệ có dạng $\begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$ vô nghiệm

* $a = 1$: Hệ có dạng $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 3$ có

$$\text{nghiệm } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3 - x \end{cases}$$

* $a \neq \pm 1$: Hệ có một nghiệm duy nhất

$$x = \frac{3a+1}{a+1} = 3 - \frac{2}{a+1}, y = \frac{2a}{a+1} = 2 - \frac{2}{a+1}$$

Suy ra: $x - y = 1$

i) Hệ thức liên hệ giữa x, y độc lập với a là:

$$x + y = 3 \vee x - y = 1$$

ii) * $a = 1 \in \mathbb{Z}$ hệ $\Leftrightarrow x + y = 3$ có vô số nghiệm nguyên: $x \in \mathbb{Z}, y = 3 - x \in \mathbb{Z}$

* $a \neq \pm 1$: Hệ có 1 nghiệm duy nhất

$$x = 3 - \frac{2}{a+1}, y = 2 - \frac{2}{a+1}$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+1 \in \{\pm 2, \pm 1\} \Rightarrow a \in \{-3, -2, 0\}$$

Vậy $a \in \{-3, -2, 0, 1\}$.

15. Định a để hệ có nghiệm x, y thỏa $x^2 + y^2$ nhỏ

$$\text{nhất } \begin{cases} x - 2y = 4 - a \\ 2x + y = 3a + 3 \end{cases}$$

GIẢI

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 4 - a \\ 2(2y + 4 - a) + y = 3a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2 \\ y = a - 1 \end{cases}$$

$$\bullet x^2 + y^2 = 2a^2 + 2a + 5 = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}$$

$$\text{Suy ra: } (x^2 + y^2)_{\min} = \frac{9}{2} \text{ tại } a = -\frac{1}{2}$$

16. Định a để hệ có nghiệm x, y thỏa xy lớn nhất

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y - x = 10a + 5 \end{cases}$$

GIẢI

$$\text{Hệ có nghiệm } \begin{cases} x = 1 - 2a \\ y = 4a + 3 \end{cases}$$

$$\bullet xy = -8a^2 - 2a + 3 = -2\left(2a + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{8} \leq \frac{25}{8}$$

$$\text{Vậy } (xy)_{\max} = \frac{25}{8} \text{ tại } a = -\frac{1}{8}$$

17. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 2 \\ x + 4y = a \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y = 3 \\ mx - (m + 1)y = 3m \\ x - 2my = m + 2 \end{cases}$$

GIẢI

$$\text{a) Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = \frac{11}{5} \\ a = \frac{11}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = 3 \end{cases}$$

* Nếu $a = 3$ thì hệ có một nghiệm $\begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$

* Nếu $a \neq 3$ thì hệ vô nghiệm

$$\text{b) Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ (m-1)y = 0 \\ 2(m-1)y = 1-m \end{cases}$$

* $m = 1$: Hệ có dạng $\begin{cases} x = 2y + 3 \\ 0y = 0 \end{cases}$ có vô số nghiệm:

$$x = 2y + 3, \forall y \in \mathbb{R}$$

* $m \neq 1$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ y = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ vô nghiệm

18. Cho hệ
$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$$
 có nghiệm

Chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

GIẢI

Giả sử (x_0, y_0) là nghiệm của hệ

Ta có:
$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = c(1) \\ bx_0 + cy_0 = a(2) \\ cx_0 + ay_0 = b(3) \end{cases}$$

Nhân (1) hai vế với ab , nhân (2) hai vế với bc , nhân (3) hai vế với ca rồi cộng vế theo vế, ta được:

$$a^2bx_0 + ab^2y_0 + b^2cx_0 + bc^2y_0 + c^2ax_0 + ca^2y_0 = 3abc$$

$$\Rightarrow a^2(bx_0 + cy_0) + b^2(cx_0 + ay_0) + c^2(ax_0 + by_0) = 3abc$$

$$\Rightarrow a^2 \times a + b^2 \times b + c^2 \times c = 3abc$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{ (đpcm).}$$

19. Giải bất phương trình:

a) $(3x + 2)(3x^2 - 2) < (3x + 2)(2x^2 + 2)$

b) $\frac{3x(x+1)}{x-1} - \frac{2x(x-1)}{x+1} > \frac{x^3}{x^2-1}$

c) $x^4 \geq (x^2 + 4x + 2)^2$

GIẢI

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & (3x + 2)(3x^2 - 2) < (3x + 2)(2x^2 + 2) \\
 \Leftrightarrow & (3x + 2)(3x^2 - 2 - 2x^2 - 2) < 0 \\
 \Leftrightarrow & (3x + 2)(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow (3x + 2)(x - 2)(x + 2) < 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$3x + 2$	-	-	0	+	+
$x + 2$	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	0	+
(1)	-	0	+	0	+

(1) có nghiệm: $x < -2 \vee -\frac{2}{3} < x < 2$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \frac{3x(x+1)}{x-1} - \frac{2x(x-1)}{x+1} > \frac{x^3}{x^2-1} \\
 \Leftrightarrow & \frac{3x(x+1)^2 - 2x(x-1)^2 - x^3}{(x-1)(x+1)} > 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(10x+1)}{(x-1)(x+1)} > 0 \quad (2)$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{10}$	0	1	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+
$10x + 1$	-	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	-	0	+

$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$			
(2)	$+$	$ $	$-$	0	$+$	0	$-$	$ $	$+$

(2) có nghiệm là: $x < -1 \vee -\frac{1}{10} < x < 0 \vee 1 < x$

c) $x^4 \geq (x^2 + 4x + 2)^2$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 2)^2 - (x^2)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (4x + 2)(2x^2 + 4x + 2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(2x + 1)(x + 1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 \leq 0 \vee (x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \vee x = 1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

20. Giải và biện luận bất phương trình:

a) $(m - x)^2 < (1 - mx)^2$

b) $(2 - mx)^2 + m^2 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2$

$$c) \frac{mx^2 + m - 4}{x - 2} < 0 \quad (3)$$

d) $\sqrt{1-x}(mx-2) < 0$

GIẢI

a) $(m - 1)^2 < (1 - mx)^2$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m-1)(x+1)(x-1) > 0 \quad (1)$$

m	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$m + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$m - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$m^2 - 1$	$+$	0	0	$+$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$x^2 - 1$	$+$	0	0	$+$

* $m < -1 \vee m > 1$

$$(1) \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$

* $m = \pm 1$

(1) có dạng: $0(x + 1)(x - 1) > 0$: vô nghiệm.

* $-1 < m < 1$:

$$(1) \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

b) $(2 - mx)^2 \leq m^2 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow m(m + 4)x \leq \frac{(m + 4)(4 - m)}{4} \quad (2)$$

m	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
m	$-$	$-$	0	$+$
$m + 4$	$-$	0	$+$	$+$
$m(m + 4)$	$+$	0	$-$	$+$

* $m < -4 \vee m > 0$: (2) có nghiệm: $x \leq \frac{4-m}{4m}$

* $-4 < m < 0$: (2) có nghiệm: $x \geq \frac{4-m}{4m}$

* $m = -4$: (2) có dạng: $0x \leq 0$: nghiệm $x \in \mathbb{R}$

* $m = 0$: (2) có dạng: $0x \leq 4$: nghiệm $x \in \mathbb{R}$

c) Ta có: $mx - m - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m+4}{m} \quad (m \neq 0)$

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Ta xét dấu: m và $x_1 - x_2 = \frac{m+4}{m} - 2 = \frac{-m+4}{m}$

m	$-\infty$	0	4	$+\infty$
m		$-$	$+$	$+$
$-m+4$	$+$	$+$	0	$-$
$x_1 - x_2$	$-$	$ $	$+$	0

• **Biên luận.**

* $m < 0$:

	$-\infty$	$\frac{m+4}{m}$	2	$+\infty$
$mx - m - 4$	$+$	0	$-$	$-$
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$
(3)	$-$	0	$ $	$-$

(3) có nghiệm: $x < \frac{m+4}{m} \vee x > 2$

* $m = 0$: (3) có dạng: $\frac{-4}{x-2} < 0 \Leftrightarrow x > 2$

* $0 < m < 4$

x	$-\infty$	2	$\frac{m+4}{m}$	$+\infty$
$mx - m - 4$	-	-	0	+
$x - 2$	-	0	+	+
(3)	+		0	+

(3) có nghiệm: $2 < x < \frac{m+4}{m}$

* $m = 4$: (3) có dạng: $\frac{4x-8}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 4 < 0 \end{cases}$ vô nghiệm

* $m > 4$:

x	$-\infty$	$\frac{m+4}{m}$	2	$+\infty$
$mx - m - 4$	-	0	+	+
$x - 2$	-	-	0	+
(3)	+	0	-	+

(3) có nghiệm: $\frac{m+4}{m} < x < 2$

$$d) \sqrt{1-x}(mx-2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ mx-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ mx < 2 \end{cases} \quad (4)$$

Ta xét dấu: m và $x_1 - x_2 = 1 - \frac{2}{m} = \frac{m-2}{m}$

m	$-\infty$	0	2	$+\infty$
m	$-$	0	$+$	$+$
$m-2$	$-$	$-$	0	$+$
$x_1 - x_2$	$+$	$ $	$-$	$+$

• Biên luận

$$* m < 0: (4) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{2}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{m} < x < 1$$

$$* m = 0: (4) \text{ có dạng } \begin{cases} x < 1 \\ 0x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1$$

$$* 0 < m < 2: (4) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < \frac{2}{m} \end{cases} \Leftrightarrow x < 1$$

$$* m = 2: (4) \text{ có dạng } \begin{cases} x < 1 \\ 2x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1$$

$$* m > 2: (4) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < \frac{2}{m} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{2}{m}$$

21. Cho hai bất phương trình $m(x - 1) + 2 \geq 0$ (1)

$m(x + 1) \leq (m - 1)(x - 2)$ (2). Định m để:

- a) Mọi $x \in \mathbb{R}$ là nghiệm của ít nhất 1 trong 2 bất phương trình trên.
 b) Hệ (1) và (2) có nghiệm duy nhất
 c) $x \in [0, 1)$ là nghiệm của hệ (1) và (2)

GIẢI

$$(1) \Leftrightarrow mx + 2 - m \geq 0$$

$$(2) \Leftrightarrow x + 3m - 2 \leq 0$$

a) Gọi S_1, S_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2)

Ta cần tìm m để: $S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$

Trong đó: $S_2 = (-\infty, 2 - 3m]$ nên các trường hợp của S_1 có thể là: $S_1 = \mathbb{R}$ hoặc $S_1 \supset [2 - 3m, +\infty)$

* Nếu $m = 0$: (1) $\Leftrightarrow 0x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Vậy $S_1 = \mathbb{R}$ thỏa yêu cầu

* Nếu: $m < 0$: (1) $\Leftrightarrow x \leq \frac{m-2}{m}$ không thỏa yêu cầu

* Nếu: $m > 0$: (1) $\Leftrightarrow x \geq \frac{m-2}{m}$: $S_1 = \left[\frac{m-2}{m}, +\infty \right)$

Để $S_1 \supset [2 - 3m, +\infty)$ ta phải có:

$$\frac{m-2}{m} \leq 2 - 3m \Leftrightarrow \frac{(m-1)(3m+2)}{m} \leq 0 (*)$$

m	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	0	1	$+\infty$
$m - 1$	-	-	-	0	+
$3m + 2$	-	0	+	+	+
m	-	-	0	+	+
(*)	-	0	+	0	+

Do $m > 0$ nên (*) $\Leftrightarrow 0 < m \leq 1$. Tóm lại: $0 < m \leq 1$.

b) Hệ (1) và (2):

$$\begin{cases} mx + 2 - m \geq 0 \\ x + 3m - 2 \leq 0 \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất khi và chỉ}$$

$$\text{khi } \begin{cases} m > 0 \\ \frac{m-2}{m} = 2-3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m = -\frac{2}{3} \vee m = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 1. \text{ vậy } m = 1.$$

c) Ta cần tìm m để: $[0, 1) \subset S_1 \cap S_2$

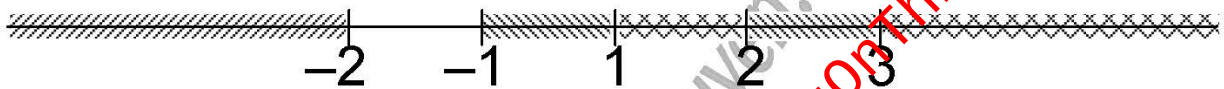
* $m = 0$: $S_1 = \mathbb{R}$, $S_2 = (-\infty, 2] \Rightarrow S_1 \cap S_2 = (-\infty, 2]$ thỏa yêu cầu.

$$* m < 0: S_1 = \left(-\infty, \frac{m-2}{m}\right], S_2 = (-\infty, 2-3m]$$

$$\text{Để } [0, 1) \subset S_1 \cap S_2 \text{ ta phải có: } \begin{cases} 1 \leq \frac{m-2}{m} \\ 1 \leq 2-3m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{m} \leq 0 \\ m \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

$$\bullet m > 0: S_1 = \left[\frac{m-2}{m}, +\infty \right), S_2 = (-\infty, 2-3m]$$



$$\text{Để } [0, 1) \subset S_1 \cup S_2 \text{ ta phải có } \begin{cases} \frac{m-2}{m} \leq 0 \\ 2 \leq 2-3m \end{cases}$$

$$\text{Do } m > 0 \text{ nên suy ra } \begin{cases} m > 0 \\ m-2 \leq 0 \\ m \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Tóm lại: } m = 0 \vee m < 0 \vee 0 < m \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy: } m \leq \frac{1}{3}$$

22. Giải và biện luận hệ bất phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} (x-1)(x+2) < 0 \\ mx+1 < 2x+m \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x+1}{x-2} < \frac{x+4}{x+1} \\ 2x+m > 4 \end{cases}$$

GIẢI

$$\text{a) Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) < 0 & (1) \\ (m-2)x < m-1 & (2) \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+
(1)	+	0	-	+

$$\text{Hệ (1) và (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 1 \\ (m-2)x < m-1 \end{cases}$$

$$\text{Ta xét dấu: } m-2, \frac{m-1}{m-2} + 2 = \frac{3m-5}{m-2},$$

$$\frac{m-1}{m-2} - 1 = \frac{1}{m-2}$$

m	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	2	$+\infty$
$m-2$	-	-	+	+
$3m-5$	-	0	+	+

$\frac{m-1}{m-2} + 2$	+ 0 -			+
$\frac{m-1}{m-2} - 1$	-	-		+

• **Biên luận:**

$$* m \leq \frac{5}{3}: \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 1 \\ x > \frac{m-1}{m-2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{m-1}{m-2} < x < 1$$

$$* \frac{5}{3} < m < 2: \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 1 \\ x > \frac{m-1}{m-2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 1$$

$$* m = 2: \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 1$$

$$* m > 2: \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 1 \\ x < \frac{m-1}{m-2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 1$$

KẾT LUẬN:

$$\bullet m \leq \frac{5}{3} : \frac{m-1}{m-2} < x < 1$$

$$\bullet m > \frac{5}{3} : -2 < x < 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Hệ } &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{(x-2)(x+1)} < 0 \\ x > \frac{4-m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1) < 0 \\ x > \frac{4-m}{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \\ x > \frac{4-m}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

* Nếu $\frac{4-m}{2} \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 6$ thì hệ có nghiệm:

$$-1 < x < 2$$

* Nếu $-1 < \frac{4-m}{2} < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 6$ thì hệ có

nghiệm: $\frac{4-m}{2} < x < 2$

* Nếu $\frac{4-m}{2} \geq 2 \Leftrightarrow m \leq 0$ thì hệ vô nghiệm

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Xét dấu các biểu thức

a) $f(x) = (4x^2 - 1)(x + 2)$

b) $g(x) = x(x - 1)(x^2 + x - 2)$

$$c) h(x) = \frac{(x+1)(x^2 - x - 2)}{(x-1)^2(x^2 - 4x + 3)}$$

$$d) k(x) = \frac{x^2(x^2 - 3x)(x^2 + x - 6)}{(x^2 - 3x + 2)(x+1)}$$

2. Giải các bất phương trình

$$a) \frac{2x-3}{x+1} \geq 1$$

$$b) \frac{x^2 - 3x - 2}{x-1} < 2x + 2$$

$$c) \frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1} \geq \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$d) x + \frac{3}{x+1} < 3$$

$$e) \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} \leq \frac{3}{x}$$

3. Giải và biện luận bất phương trình

$$a) m^2(x-1) + 6 > m(2x+1)$$

$$b) \frac{x-1}{mx-m+1} \geq 0$$

$$c) \frac{(m+2)x-m}{mx-1} < 0$$

$$d) (mx-2m+1)\sqrt{x-1} \leq 0$$

$$e) x^2 \geq (mx+1)^2$$

4. Định m để hai bất phương trình tương đương

$$a) (1-3m)x - 1 + m > 0 \text{ và } (m+3)x - 1 > 0$$

$$b) (2m-1)x + m > 0 \text{ và } mx - m + 2 > 0$$

5. Cho bất phương trình: $m(1 - 2x) < 1$

a) Giải và biện luận

b) Định m để bất phương trình nghiệm đúng mọi $x \leq 2$

6. Cho bất phương trình: $(m + 3)x - 1 > 0$ (1) và $(3m - 1)x - m + 1 > 0$ (2)

a) Định m sao cho (1) vô nghiệm và (2) có tập nghiệm R .

b) Định m sao cho mọi nghiệm của (1) đều lớn hơn mọi nghiệm của (2)

7. Giải các hệ bất phương trình

a)
$$\begin{cases} 3x - 5 \geq 7x + 3 \\ 7 - 4x < x + 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{2x + 1}{3} > \frac{3x + 2}{4} \\ \frac{3x - 4}{3} \leq x + \frac{2x - 3}{2} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{x - 3}{2 - 2x} \leq 0 \\ \frac{1 - x^2}{x} < 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 2x + 1 > \frac{x}{2} \\ x \leq 1 + \frac{3x}{5} \end{cases}$$

8. Giải và biện luận hệ bất phương trình

a)
$$\begin{cases} (2m - 1)x + m \geq 0 \\ mx + 2 - m \leq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (m + 3)x > 1 \\ (1 - 3m)x + m > 1 \end{cases}$$

9. Định m để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất

a)
$$\begin{cases} mx \geq 1 \\ (m+2)x \geq m \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (3m+7)x \leq m+1 \\ (m-1)x \geq 1 \end{cases}$$

10. Định m để hàm số sau xác định với mọi $x \geq 1$

$$y = \sqrt{mx - 2m + 3} + \sqrt{(m-2)x + 2}$$

www.facebook.com/groups/TaiLieuOnThiDaiHoc01

CHƯƠNG 3: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

I. Vấn đề 1: GIẢI VÀ BIỆN LUẬN: $ax^2 + bx + c = 0$

1. xét riêng trường hợp $a = 0$

2. $a \neq 0$. Ta xét dấu $\Delta = b^2 - 4ac$ (hay $\Delta' = b'^2 - ac$)

a) $\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$): $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \left(\frac{-b' \pm \sqrt{\Delta}}{a} \right)$

b) $\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$): $x_1 = x_2 = \frac{b}{2a} \left(-\frac{b'}{a} \right)$

c) $\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$): vô nghiệm

Ví dụ: Giải và biện luận phương trình:

a) $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + 3m-4 = 0$

b) $\frac{a-3}{x} - \frac{1}{x-1} = a$

GIẢI

a) * $m = 1$: phương trình có dạng: $2x - 1 = 0$ có một nghiệm (đơn): $x = \frac{1}{2}$

$$* m \neq 1. \Delta' = (m - 2)^2 - (m - 1)(3m - 4) = m(3 - 2m)$$

m	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
m	-	0	+	+	+
3 - 2m	+	+	+	0	-
Δ'	-	0	+	+	0

• $m < 0 \vee m > \frac{3}{2}$: vô nghiệm

• $0 < m < 1 \vee 1 < m < \frac{3}{2}$: 2 nghiệm;

$$x_{1,2} = \frac{m - 2 \pm \sqrt{3m - 2m^2}}{m - 1}$$

• $m = 0$: nghiệm kép: $x_0 = 2$

• $m = \frac{3}{2}$: nghiệm kép: $x_0 = -1$

b) Điều kiện: $x \neq 0 \wedge x \neq 1$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow ax^2 - 2(a - 2)x + a - 3 = 0$$

* $a = 0$: phương trình có dạng: $4x - 3 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ có một nghiệm } x = \frac{3}{4}.$$

* $a \neq 0$: đặt $f(x) = ax^2 - 2(a - 2)x + a - 3$

$$\text{Ta có: } \Delta' = 4 - a, f(0) = a - 3, f(1) = 1 \neq 0$$

• $a = 3$: phương trình có dạng: $3x^2 - 2x = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại)} \vee x = \frac{2}{3}.$$

Phương trình có nghiệm $x = \frac{2}{3}$

• $a \neq 3$

a	$-\infty$	0	3	4	$+\infty$
$4 - a$	+	+	+	0	-
Δ'	+	+	+	0	-

+ $a > 4$: phương trình vô nghiệm.

+ $a = 4$: phương trình có nghiệm kép:

$$x_0 = \frac{a-2}{a} = \frac{1}{2}$$

+ $a < 0 \vee 0 < a < 3 \vee 3 < a < 4$

Phương trình có 2 nghiệm: $x_{1,2} = \frac{a-2 \pm \sqrt{4-a}}{a}$

Kết luận:

• $a > 4$: vô nghiệm

• $a = 4$: $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

• $a = 3$: $x = \frac{2}{3}$

• $a = 0$: $x = \frac{3}{4}$

- $a < 0 \vee 0 < a < 3 \vee 3 < a < 4$:

$$x_{1,2} = \frac{a - 2 \pm \sqrt{4 - a}}{a}$$

II. Vấn đề 2: ĐỊNH LÝ VI-ET

1. Định lý thuận:

Nếu phương trình bậc 2: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có 2 nghiệm x_1, x_2 thì

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} ; P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

a) các biểu thức đối xứng giữa x_1, x_2 .

$$* x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$$

$$* x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S^3 - 3PS$$

$$* |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{S^2 - 4P}$$

b) hệ thức liên hệ x_1, x_2 độc lập với tham số.

+ Ta tính S, P theo tham số

+ khử tham số ta được hệ thức độc lập

c) Hai nghiệm x_1, x_2 thỏa điều kiện $F(x_1, x_2) > 0$ cho trước

$$\text{Ta giải hệ: } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \\ F(x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

bằng cách khử x_1, x_2 ta tìm được điều kiện của tham số

2. Định lý đảo:

Nếu có 2 số x_1, x_2 biết $S = x_1 + x_2, P = x_1x_2$ với $S^2 - 4P \geq 0$ thì x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$.

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 - (m - 2)x + m + 1 = 0$.
Định m sao cho phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

a) $x_1^2 + x_2^2 = 9$

b) $3x_1 - x_2 = 1$

GIẢI

a) Ta có: $\Delta = m^2 - 8m$

m	$-\infty$	0	8	$+\infty$
m	-	+	+	
m - 8	-	-	0	+
Δ	+	0	0	+

• Điều kiện có nghiệm là: $m \leq 0 \vee m \geq 8$ (1)

• $x_1^2 + x_2^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9$

$\Leftrightarrow (m - 2)^2 - 2(m + 1) = 9$

$\Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 = 0$

$\Leftrightarrow m = -1 \vee m = 7$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $m = -1$. Vậy $m = -1$

b) Ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 2 & (a) \\ x_1 x_2 = m + 1 & (b) \\ 3x_1 - x_2 = 1 & (c) \end{cases}$$

Từ (a) và (c) cho ta: $x_1 = \frac{m-1}{4}$, $x_2 = \frac{3m-7}{4}$ theo

(b) suy ra:

$$\frac{m-1}{4} \times \frac{3m-7}{4} = m+1 \Leftrightarrow 3m^2 - 26m - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{3} \vee m = 9 \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra: $m = -\frac{1}{3} \vee m = 9$.

Vậy $m = -\frac{1}{3} \vee m = 9$

Ví dụ 2: Giải sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $(m-1)x^2 - (3m+2)x + m+5 = 0$ ($m \neq 1$)

a) Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập với m .

b) Tìm $m \in \mathbb{Z}$ sao cho $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

GIẢI

Ta có:
$$S = \frac{3m+2}{m-1} = 3 + \frac{5}{m-1};$$

$$P = \frac{m+5}{m-1} = 1 + \frac{6}{m-1}$$

a) Suy ra: $6S - 5P = 13$. Vậy $6(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 = 13$

b) $x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1 + x_2 = S \in \mathbb{Z}, x_1x_2 = P \in \mathbb{Z}$

Với $m \in \mathbb{Z}$ và $P, S \in \mathbb{Z}$ suy ra $m - 1$ là ước số chung của 5 và 6, suy ra

$$m - 1 = \pm 1 \Rightarrow m = 0 \vee m = 2$$

* Khi $m = 0$: phương trình có dạng: $x^2 + 2x - 5 = 0$ có hai nghiệm

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6} \notin \mathbb{Z} \text{ nên loại.}$$

* Khi $m = 2$: phương trình có dạng: $x^2 - 8x + 7 = 0$ có hai nghiệm:

$$x_1 = 1 \in \mathbb{Z}, x_2 = 7 \in \mathbb{Z}. \text{ Vậy } m = 2.$$

Ví dụ 3: Cho phương trình: $x^2 - (m - 2)x + m - 5 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Hãy lập phương trình bậc

hai có hai nghiệm: $y_1 = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}, y_2 = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}$

GIẢI

$$\text{Ta có: } y_1 + y_2 = \frac{2x_1x_2 - 2}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1};$$

$$y_1y_2 = \frac{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1}$$

Với $x_1 + x_2 = m - 2$ và $x_1x_2 = m - 5$

Suy ra: $y_1 + y_2 = -m + 6, y_1y_2 = 3 - m$

phương trình cần lập là: $y^2 - (-m + 6)y + 3 - m = 0$

hay: $y^2 + (m - 6)y - m + 3 = 0$

III. Vấn đề 3: DẤU CỦA NGHIỆM SỐ

$$1. x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$$

$$2. 0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow (\Delta \geq 0 \wedge S > 0 \wedge P > 0)$$

$$3. x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow (\Delta \geq 0 \wedge S < 0 \wedge P > 0)$$

Ví dụ: Cho phương trình:

$$(m - 1)x^2 - (2m - 3)x + m - 3 = 0$$

Định m để phương trình có:

a) 2 nghiệm trái dấu

b) 2 nghiệm dương phân biệt

c) Đúng một nghiệm dương

GIẢI

a) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow P = \frac{m-3}{m-1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$$

b) Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2m-3)^2 - 4(m-1)(m-3) > 0 \\ S = \frac{2m-3}{m-1} > 0 \\ P = \frac{m-3}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{4} \\ m < 1 \vee m > \frac{3}{2} \\ m < 1 \vee m > 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} < m < 1 \vee m > 3$$

c) Ta xét các trường hợp

* $m = 1$: phương trình có dạng: $x - 2 = 0$ có đúng 1 nghiệm dương $x = 2$ (thỏa).

* $m \neq 1$: $\Delta = 4m - 3$

• $m = \frac{3}{4}$: phương trình có nghiệm kép:

$$x_0 = \frac{2m - 3}{2(m - 1)} = 3 > 0 \text{ nên thỏa yêu cầu}$$

• $m > \frac{3}{4}$: phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1 ,

x_2 nên có đúng 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow x_1 < 0 < x_2$

$$\Leftrightarrow P < 0 \vee \begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{m - 3}{m - 1} < 0 \vee \begin{cases} m - 3 = 0 \\ \frac{2m - 3}{m - 1} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 < m < 3 \vee m = 3 \Leftrightarrow 1 < m \leq 3 \text{ (thỏa } m > \frac{3}{4} \text{)}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{3}{4} \vee 1 \leq m \leq 3.$$

IV. Vấn đề 4:

DẠNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 QUI VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

1. Dạng 1:

Phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$)

Đặt $x^2 = t \geq 0$

Ví dụ: Chứng minh với mọi m , phương trình:
 $mx^4 - 3(m-2)x^2 + m-3 = 0$ luôn có nghiệm.

GIẢI

Đặt $x^2 = t$. Ta cần chứng minh phương trình
 $mt^2 - 3(m-2)t + m-3 = 0$ luôn có nghiệm $t \geq 0$

* $m = 0$: Ta có: $6t - 3 = 0$ có nghiệm $t = \frac{1}{2} > 0$

* $m \neq 0$: $\Delta = 9(m-2)^2 - 4m(m-3)$
 $= m^2 + 4(m-3)^2 > 0 \quad \forall m$

Giả sử $t_1 < t_2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{3(m-2)}{m} < 0 \\ P = \frac{m-3}{m} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 < m < 2 \\ m < 0 \vee m > 3 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset$

Như vậy phương trình: $mt^2 - 3(m-2)t + m-3 = 0$
 luôn có nghiệm $t \geq 0$

Hay phương trình: $mx^4 - 3(m-2)x^2 + m-3 = 0$
 luôn có nghiệm (đpcm).

2. Dạng 2:

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e, (a+b = c+d = k)$

Khai triển: $(x^2 + kx + ab)(x^2 + kx + cd) = e$

Đặt: $t = x^2 + kx$.

Ví dụ: Giải bất phương trình:

$$(x - 5)(x + 3)(x^2 - 16) = 180$$

GIẢI

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (x - 5)(x + 4)(x - 4)(x + 3) = 180$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 20)(x^2 - x - 12) = 180$$

Đặt $x^2 - x = t$. Ta có phương trình

$$(t - 20)(t - 12) = 180 \Leftrightarrow t^2 - 32t + 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2 \vee t = 30$$

$$* t = 2, \text{ ta được: } x^2 - x = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

$$* t = 30, \text{ ta được: } x^2 - x = 30$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 30 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 6$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: $\{-5, -1, 2, 6\}$

3. Dạng 3:

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = Ax^2 \text{ với } ab = cd = k$$

• Khai triển:

$$[x^2 + (a + b)x + k].[x^2 + (c + d)x + k] = Ax^2$$

• Chia hai vế cho x^2 :

$$\left(x + \frac{k}{x} + a + b\right)\left(x + \frac{k}{x} + c + d\right) = A$$

• Đặt $x + \frac{k}{x} = t$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$(x - 1)(x + 2)(x + 3)(x - 6) + 20x^2 = 0$$

GIẢI

Phương trình

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 6)(x + 2)(x + 3) + 20x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 7x + 6)(x^2 + 5x + 6) + 20x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2 - 7x + 6}{x} \right) \cdot \left(\frac{x^2 + 5x + 6}{x} \right) + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x} - 7 \right) \left(x + \frac{6}{x} + 5 \right) + 20 = 0$$

Đặt $x + \frac{6}{x} = t$. Ta có phương trình:

$$(t - 7)(t + 5) + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \vee t = 5$$

* Khi $t = -3$ suy ra: $x + \frac{6}{x} = -3 \Leftrightarrow x^2 + 6 = -3x$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 6 = 0 \quad \Delta = 9 - 24 < 0$$

* Khi $t = 5$ suy ra: $x + \frac{6}{x} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = 2 \vee x = 3$.

4. Dạng 4: $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

$$\text{Đặt } t = \frac{(x + a) + (x + b)}{2} = x + \frac{a + b}{2}.$$

Ta được phương trình:

$$(t - \alpha)^4 + (t + \alpha)^4 = c \text{ hay: } 2t^4 + 12\alpha^2 t^2 + 2\alpha^4 - c = 0$$

Ví dụ: Giải phương trình: $(x - 1)^4 + (x - 3)^4 = 16$

GIẢI

$$\text{Đặt } t = \frac{x - 1 + x - 3}{2} = x - 2 \Rightarrow x = t + 2$$

Ta được phương trình: $(t + 1)^4 + (t - 1)^4 = 16$

$$\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 16 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1 \vee t^2 = -7 \text{ (Loại)} \Leftrightarrow t = \pm 1$$

- $t = 1$ suy ra: $x = 1 + 2 = 3$

- $t = -1$ suy ra: $x = -1 + 2 = 1$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = 1 \vee x = 3$

5. Dạng 5: $ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0 \text{ (} a \neq 0 \text{)}$

- Chia 2 vế cho x^2 ta được: a

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x \pm \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

$$\text{Đặt } t = x \pm \frac{1}{x}$$

Ví dụ: Giải các phương trình

a) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$

GIẢI

a) • Cho 2 vế phương trình cho x^2 :

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

• Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

• Ta có phương trình: $6(t^2 - 2) + 5t - 38 = 0$

$$\Leftrightarrow 6t^2 + 5t - 50 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{10}{3} \vee t = \frac{5}{2}$$

* Khi $t = -\frac{10}{3}$. Ta có: $x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 2$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: $\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -3, 2\right\}$

b) • Chia 2 vế phương trình cho x^2 :

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$$

• $t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$

Ta có phương trình:

$$6(t^2 + 2) - 25t + 12 = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 25t + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \vee t = \frac{8}{3}$$

* Khi $t = \frac{3}{2}$. Ta có: $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$$

* Khi $t = \frac{8}{3}$. Ta có: $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = 3$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: $\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 2, 3\right\}$

6. Dạng 6: phương trình bậc 4 có chứa tham số bậc 2.

Ví dụ: Chứng minh với mọi m phương trình

$$x^4 + x^3 - 2x^2 + 3mx - m^2 = 0 \text{ luôn có nghiệm}$$

GIẢI

Xem phương trình bậc 2 theo biến m:

$$x^2 - 3x.m - x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$$

$$\Delta_m = 9x^2 + 4x^4 + 4x^3 - 8x^2 = (2x^2 + x)^2$$

$$\text{Suy ra: } m = \frac{3x + 2x^2 + x}{2} \vee m = \frac{3x - 2x^2 - x}{2}$$

$$\text{Hay: } x^2 + 2x - m = 0 \quad (1) \vee x^2 - x + m = 0 \quad (2)$$

$$\Delta_1 = 4 + 4m$$

$$\text{Ta có: } \Delta_1 + \Delta_2 = 5 > 0 \quad \forall m$$

$$\text{Suy ra: } \Delta_1 > 0 \vee \Delta_2 > 0 \quad \forall m$$

Theo đó, một trong hai phương trình (1), (2) phải có nghiệm $\forall m$.

Vậy phương trình: $x^4 + x^3 - 2x^3 + 3mx - m^2 = 0$ luôn có nghiệm (đpcm).

B. GIẢI BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Giải các phương trình sau

$$\text{a) } (x^2 - 4x + 3)^2 - (x^2 - 6x + 5)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{b) } (4 + x)^2 - (x - 1)^3 = (1 - x)(x^3 - 2x + 17) \quad (2)$$

$$\text{c) } 1 + \frac{2}{x-2} + \frac{-10}{x+3} + \frac{50}{(2-x)(x+3)} = 0 \quad (3)$$

GIẢI

$$\text{a) } (1) \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3 - x^2 + 6x - 5)$$

$$(x^2 - 4x + 3 + x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 2)(2x^2 - 10x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$$

$$\text{b) } (2) \Leftrightarrow 16 + 8x + x^2 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

$$= x^2 - 2x + 17 - x^3 + 2x^2 - 17x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 24x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -24$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (3) &\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+3) + 2(x+3) + 10(x-2) + 50}{(x-2)(x+3)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+3)(x+10)}{(x-2)(x+3)} = 0 \Leftrightarrow x+10=0 \Leftrightarrow x=-10 \end{aligned}$$

2. Định m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt

a) $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0$

b) $mx^2 - (2m+1)x + m - 5 = 0$

c) $x^2 - (m+1)x + 2m - 4 = 0$

GIẢI

a) Điều kiện: $\Delta' = 2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

b) Điều kiện: $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 24m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{24} < m \neq 0$

c) Điều kiện: $\Delta = m^2 - 6m + 17 > 0$
 $\Leftrightarrow (m-3)^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$

3. Giải và biện luận các phương trình:

a) $x^2 + (1-m)x - m = 0$

b) $(m-3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0$

c) $m^2x^2 - m(5m+1)x - (5m+2) = 0$

GIẢI

a) $x^2 + (1-m)x - m = 0$ (dạng $a - b + c = 0$)

Có nghiệm: $x = -1 \vee x = m$

- $m = -1$: nghiệm kép: $x = -1$

- $m \neq -1$: 2 nghiệm: $x = -1 \vee x = m$

b) $(m - 3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0$

* $m = 3$: phương trình có dạng: $-6x - 3 = 0$ có một nghiệm: $x = -\frac{1}{2}$

* $m \neq 3$: $\Delta' = m^2 - (m - 3)(m - 6) = 9m - 18$

- $m < 2$: vô nghiệm

- $m > 2$: 2 nghiệm: $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{9m - 18}}{m - 3}$

- $m = 2$: 1 nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -2$

c) $m^2x^2 - m(5m + 1)x - (5m + 2) = 0$

* $m = 0$: phương trình có dạng $0x = 2$: vô nghiệm

* $m \neq 0$: $\Delta = m^2(5m + 3)^2$

- $m = -\frac{3}{5}$: 1 nghiệm $x_0 = \frac{5}{3}$

- $m \neq -\frac{3}{5}$: 2 nghiệm: $x_1 = -\frac{1}{m}$; $x_2 = \frac{5m + 2}{m}$

4. Giải và biện luận phương trình sau:

$$\frac{2x}{x+m} - \frac{x}{m-x} = \frac{m^2}{4(x^2 - m^2)}$$

GIẢI

Điều kiện: $x \neq \pm m$

Khi đó, phương trình $\Leftrightarrow 12x^2 - 4mx - m^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{m}{6} \vee x = \frac{m}{2}$$

Ta có: $-\frac{m}{6} \neq \pm m \Leftrightarrow m \neq 0$; $\frac{m}{2} \neq \pm m \Leftrightarrow m \neq 0$

Vậy: * $m = 0$: vô nghiệm

* $m \neq 0$: 2 nghiệm $x = -\frac{m}{6}$; $x = \frac{m}{2}$

5. Giải và biện luận phương trình theo a, b

$$(a + b)x^2 - (a^2 + 4ab + b^2)x + 2ab(a + b) = 0$$

GIẢI

* $a + b = 0 \Rightarrow a = -b$

Phương trình có dạng: $2b^2 \cdot x = 0$

- $b = 0$: nghiệm $x \in \mathbb{R}$
- $b \neq 0$: 1 nghiệm $x = 0$

* $a + b \neq 0$:

$$\Delta = (a^2 + 4ab + b^2)^2 - 8ab(a + b)^2 = (a^2 + b^2)^2 > 0$$

Phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = \frac{2ab}{a + b}$; $x_2 = a + b$

Kết luận: • $a = 0 \wedge b = 0 : x \in \mathbb{R}$

• $a = -b \neq 0 : x = 0$

• $a + b \neq 0 : x_1 = \frac{2ab}{a + b}$; $x_2 = a + b$

6. Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh phương trình:

$$c^2x^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

GIẢI

$$\begin{aligned} \Delta &= (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 \\ &= (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) \\ &= [a^2 - (b + c)^2][a^2 - (b - c)^2] \\ &= (a + b + c)(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c) \end{aligned}$$

Vì a, b, c : cạnh tam giác nên: $a + b + c > 0$, $a - b - c < 0$, $a + b - c > 0$, $a - b + c > 0$. Suy ra: $\Delta < 0$.

Vậy phương trình vô nghiệm.

7. Tính $\cos 2m$ biết m là nghiệm số phương trình:

$$\operatorname{tg}^2 m - a \cdot \operatorname{tg} m + 1 = 0 \text{ với } 0 < m < \frac{\pi}{4}, a > 0$$

GIẢI

$$\text{Điều kiện: } \Delta = a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2) > 0$$

$$\text{Do } a > 0 \text{ nên } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 2$$

$$\text{Với } 0 < m < \frac{\pi}{4} \text{ suy ra: } 0 < \operatorname{tg} m < 1$$

$$\text{Vì } S = a > 0 \text{ và } P = 1 \text{ nên với } a \geq 2$$

$$\text{Phương trình: } \operatorname{tg}^2 m - a \operatorname{tg} m + 1 = 0 \text{ có một}$$

$$\text{nghiệm } \operatorname{tg} m = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \in (0, 1)$$

Khi đó: $\cos 2m = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 m}{1 + \operatorname{tg}^2 m} = \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{a} \quad (a > 2)$

* Cách giải khác bằng lượng giác

Từ: $\operatorname{tg}^2 m - a \operatorname{tg} m + 1 = 0 \Rightarrow a \operatorname{tg} m = 1 + \operatorname{tg}^2 m$

$\Rightarrow \sin 2m = \frac{2 \operatorname{tg} m}{1 + \operatorname{tg}^2 m} = \frac{2}{a}$ do $0 < m < \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \cos 2m > 0$

và $\cos 2m = \sqrt{1 - \sin^2 2m} = \sqrt{1 - \frac{4}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{a}$
 $(a > 2)$

8. Giải và biện luận phương trình

$$\left(\frac{a+x}{a-x} \right)^2 = 1 + bx \quad (*)$$

GIẢI

Điều kiện: $x \neq a$.

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow x(bx^2 - 2abx + a^2b - 4a) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ bx^2 - 2abx + a^2b - 4a = 0 \quad (1) \end{cases}$

* $b = 0$: $(*)$ có dạng: $\begin{cases} x = 0 \\ 0x = 4a \end{cases}$

• $a = 0$: nghiệm $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

• $a \neq 0$: 1 nghiệm $x = 0$

- * $b \neq 0$: (1) có $\Delta' = 4ab$
 - $a = 0$: (1) có nghiệm kép $x = 0$
- * $\Leftrightarrow x = 0$ không thỏa điều kiện $x \neq a$ nên phương trình vô nghiệm.
 - $ab < 0$: (1) vô nghiệm $\Rightarrow (*)$ có nghiệm $x = 0$
 - $ab > 0$: (1) có 2 nghiệm $x = \frac{ab \pm 2\sqrt{ab}}{b}$

Kết luận

- * $b = 0 = a$: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- * $b = 0 \neq a$: $x = 0$
- * $b \neq 0 = a$: vô nghiệm
- * $ab < 0$: $x = 0$
- * $ab > 0$: $x = 0 \vee x = \frac{ab \pm 2\sqrt{ab}}{b}$

9. Gọi x_1, x_2 là nghiệm phương trình: $x^2 - x - 5 = 0$

a) Tính: $A = x_1^2 + x_2^2$, $B = |x_1 - x_2|$, $C = x_1^3 + x_2^3$

$$D = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}, \quad E = (2x_1 + x_2)(2x_2 + x_1)$$

b) Hãy lập phương trình bậc 2 có nghiệm:

$$y_1 = 2x_1 + x_2; y_2 = 2x_1 + x_1$$

GIẢI

Từ phương trình: $x^2 - x - 5 = 0$

Ta có: $x_1 + x_2 = 1$; $x_1 x_2 = -5$

$$a) A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 + 10 = 11$$

$$B = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 + 20} = \sqrt{21}$$

$$C = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) \\ = 1 + 15 = 16$$

$$D = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = -\frac{11}{5}$$

$$E = (2x_1 + x_2)(2x_2 + x_1) = 5x_1x_2 + 2(x_1^2 + x_2^2) \\ = -25 + 22 = -3$$

$$b) \text{ Ta có: } y_1 + y_2 = 2x_1 + x_2 + 2x_2 + x_1 = 3(x_1 + x_2) = 3$$

$$y_1y_2 = (2x_1 + x_2)(2x_2 + x_1) = E = -3$$

$$\text{Vậy phương trình cần lập là: } y^2 - 3y - 3 = 0$$

10. Cho phương trình:

$$x^2 - 2(1 + 2m)x + 3 + 4m = 0 \quad (1)$$

a) Định m để (1) có 2 nghiệm x_1, x_2

b) Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập với m

c) Tính $A = x_1^3 + x_2^3$ theo m

d) Định m để (1) có một nghiệm gấp 3 lần nghiệm còn lại

e) Viết phương trình bậc 2 có nghiệm là $x_1^2; x_2^2$

GIẢI

a) Điều kiện có 2 nghiệm: $\Delta' = (1 + 2m)^2 - 3 - 4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Theo Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = 2(2m + 1)$, $x_1x_2 = 4m + 3$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A &= x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) \\ &= 8(2m + 1)^3 - 6(4m + 3)(2m + 1)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = 2(2m + 1)(16m^2 + 4m - 5)$$

c) Ta có: $S = 4m + 2$; $P = 4m + 3$

$$\Rightarrow S - P = 4m + 2 - 4m - 3 = -1.$$

$$\text{Vậy } x_1 + x_2 - x_1x_2 + 1 = 0$$

d) Điều kiện: $x_1 = 3x_2 \vee x_2 = 3x_1$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 3x_2)(x_2 - 3x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 10x_1x_2 - 3(x_1^3 + x_2^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x_1x_2 - 3(x_1 + x_2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16(4m + 3) - 3(4m + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12m^2 - 4m - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1 \pm 2\sqrt{7}}{6} \text{ thỏa điều kiện: } |m| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{1 \pm 2\sqrt{7}}{6}$$

e) Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$$= (4m + 2)^2 - 2(4m + 3)$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 2(8m^2 + 4m - 1) \text{ và } x_1^2 \cdot x_2^2 = (4m + 3)^2$$

Vậy phương trình cần lập;

$$x^2 - 2(8m^2 + 4m - 1)X + (4m + 3)^2 = 0$$

- 11.** Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m = 0$ (1)
- a) Định m để phương trình có 1 nghiệm $x = 0$.
Tìm nghiệm còn lại.
- b) Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 là nghiệm của (1) độc lập với m.
- c) Định m để $x_1^2 + x_2^2 = 8$

GIẢI

- a) • $x = 0$ là nghiệm của (1)

$$\Rightarrow m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m = 0 \vee m = 3$$

- Nghiệm còn lại là $x' = S - 0 = 2m - 2$

$$+ m = 0 \Rightarrow x' = -2$$

$$+ m = 3 \Rightarrow x' = 4$$

- b) Ta có: $x_1 + x_2 = 2m - 2, x_1x_2 = m^2 - 3m$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{S+2}{2} \\ P = m^2 - 3m \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{S+2}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{S+2}{2}$$

$$\Rightarrow 4P = S^2 - 2S - 8$$

Vậy hệ thức độc lập:

$$4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2) - 8$$

- c) * Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 8$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 - m^2 + 3m \geq 0 \\ S^2 - 2P = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \geq 0 \\ (2m-2)^2 - 2(m^2 - 3m) = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m = -1 \vee m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \vee m = 2$$

12. Cho phương trình: $x^2 + (m^2 - 3m)x + m^3 = 0$

- a) Định m để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm kia.
 b) Định m để phương trình có 1 nghiệm $x_1 = 1$.
 Tìm nghiệm x_2 ?

GIẢI

a) Điều kiện:

$$\begin{cases} \Delta = m^2(m^2 - 10m + 9) \geq 0 \\ x_1 + x_2 = 3m - m^2 \\ x_1 x_2 = m^3 \\ x_1 = x_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq 1 \vee m \geq 9 \\ x_2^2 + x_2 = 3m - m^2 \\ x_2^3 = m^3 \\ x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \leq 1 \vee m \geq 9 \\ m^2 + m = 3m - m^2 \\ x_1 = m^2, x_2 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq 1 \vee m \geq 9 \\ m = 0 \vee m = 1 \end{cases}$$

Vậy $m = 0 \vee m = 1$

b) $x_1 = 1 \Rightarrow 1 + m^2 - 3m + m^3 = 0$
 $\Rightarrow m^3 + m^2 - 3m + 1 = 0$

$$\Rightarrow (m^3 - m) + (m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (m-1)(m^2 + m + m - 1) = 0$$

$$\Rightarrow m - 1 = 0 \vee m^2 + 2m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow m = 1 \vee m = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\bullet x_2 = \frac{P}{x_1} = m^3$$

$$+ m = 1 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$+ m = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = (-1 + \sqrt{2})^3 = 5\sqrt{2} - 7$$

$$+ m = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = (-1 - \sqrt{2})^3 = -5\sqrt{2} - 7$$

$$+ m = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = (-1 - \sqrt{2})^3 = -5\sqrt{2} - 7$$

- 13.** Cho phương trình: $2x^2 + 2x \cdot \sin \alpha = 2x + \cos^2 \alpha$
- a) Chứng minh phương trình có nghiệm với mọi α .
- b) Định α để tổng bình phương các nghiệm đạt giá trị lớn nhất – nhỏ nhất.

GIẢI

- a) Phương trình: $2x^2 + 2(\sin \alpha - 1)x - \cos^2 \alpha = 0$ có

$$\Delta' = (\sin \alpha - 1)^2 + 2\cos^2 \alpha \geq 0 \quad \forall \alpha$$

Vậy phương trình luôn có nghiệm với α

- b) Ta có: $x_1 + x_2 = 1 - \sin \alpha, x_1 x_2 = -\frac{1}{2} \cos^2 \alpha$

$$\Rightarrow A = x_1^2 + x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 (1 - \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow A = 2(1 - \sin \alpha)$$

$$\text{Do: } -1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sin \alpha \geq 0 \\ 1 - \sin \alpha \leq 2 \end{cases}$$

Suy ra: $0 \leq A \leq 4$

$$\text{Vậy: } A_{\min} = 0 \text{ khi } \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$A_{\max} = 4 \text{ khi } \sin \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

14. Cho phương trình:

$$x^3 - (2\sin \alpha - 1)x + 6\sin^2 \alpha - \sin \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha: \text{tham số và } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

a) Tìm α để phương trình có nghiệm

b) Gọi x_1, x_2 là nghiệm phương trình. Tìm giá trị lớn nhất của $y = x_1^2 + x_2^2$

GIẢI

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } \Delta &= (2\sin \alpha - 1)^2 - 4(6\sin^2 \alpha - \sin \alpha - 1) \\ &= 5(1 - 4\sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow 1 - 4\sin^2 \alpha \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Do: } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ nên: } \left(-\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6} \right)$$

Vậy $-\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$ thì phương trình có nghiệm.

b) Ta có: $x_1 + x_2 = 2\sin\alpha - 1$, $x_1x_2 = 6\sin^2\alpha - \sin\alpha - 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= (2\sin\alpha - 1)^2 - 2(6\sin^2\alpha - \sin\alpha - 1) \\ &= -8\sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 3 \\ &= -2\left(2\sin\alpha + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{8} \leq \frac{25}{8} \end{aligned}$$

Vậy $y_{\max} = \frac{25}{8}$ khi $\sin\alpha = -\frac{1}{8}$.

15. Định m để phương trình: $x^2 - 6x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

GIẢI

$$\text{Điều kiện: } 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - m + 2 > 0 \\ S = 6 > 0 \\ P = m - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2 < m < 11$$

16. Cho phương trình: $mx^2 + 2(m + 3)x + m = 0$

Định m để phương trình có:

- a) 2 nghiệm phân biệt cùng dấu
- b) 2 nghiệm âm phân biệt

GIẢI

a) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - m^2 > 0 \\ \frac{m}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Vậy $-\frac{3}{2} < m \neq 0$

b) Phương trình có:

$$x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m < -3 \vee m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m > 0. \text{ Vậy } m > 0.$$

17. Định m để phương trình:

$$(m-4)x^2 - 2(m-2)x + m-1 = 0$$

Có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ |x_1| > x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ -x_1 > x_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

Với $S = \frac{2(m-2)}{m-4}$ và $P = \frac{m-1}{m-4}$ ($m \neq 4$)

Suy ra: $\frac{m-1}{m-4} < 0 \wedge \frac{m-2}{m-4} < 0$

$$\Leftrightarrow 1 < m < 4 \wedge 2 < m < 4 \Leftrightarrow 2 < m < 4$$

18. Định m để phương trình:

$mx^2 - 2(m-3)x + m-4 = 0$ có đúng một nghiệm dương.

GIẢI

* $m = 0$: phương trình có dạng: $6x - 4 = 0$ có đúng 1 nghiệm dương là: $x = \frac{2}{3}$

* $m \neq 0$: $\Delta' = 9 - 2m$

• $m = \frac{9}{2}$ phương trình có nghiệm kép:

$$x = \frac{m-3}{m} = \frac{1}{3} > 0$$

• $m < \frac{9}{2}$ điều kiện: $x_1 \leq 0 < x_2$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 < x_2 \vee x_1 x_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 = 0 \\ \frac{m - 3}{m} > 0 \end{cases} \vee \frac{m - 4}{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 4 \vee 0 < m < 4 \Leftrightarrow 0 < m \leq 4$$

$$\text{Vậy } 0 < m \leq 4 \vee m = \frac{9}{2}.$$

19. Định m để phương trình:

$$(m - 1)x^4 + 2(m - 3)x^2 + m + 3 = 0 (*)$$

vô nghiệm.

GIẢI

Đặt $x^2 = t \geq 0$

Ta có phương trình:

$$(m - 1)t^2 + 2(m - 3)t + m + 3 = 0 (1)$$

* $m = 1$: (1) có dạng: $-4t + 4 = 0$ có nghiệm

$T = 1 > 0$ (không thỏa yêu cầu)

* $m \neq 1$: (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm hoặc có cả hai nghiệm âm.

$$\bullet (1) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' = 12 - 8m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$$

$$\bullet (1) \text{ có 2 nghiệm âm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m < 1 \vee m > 3 \\ m < -3 \vee m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3$$

$$\text{Vậy } m < -3 \vee m > \frac{3}{2}$$

20. Giải các phương trình:

a) $(x - 1)(x + 5)(x - 3)(x + 7) = 297$ (1)

b) $(x + 2)(x - 3)(x + 1)(x + 6) = -36$ (2)

GIẢI

a) (1) $\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x - 21) = 297$

Đặt $t = \frac{x^2 + 4x - 5 + x^2 + 4x - 21}{2} = x^2 + 4x - 13$

Ta có phương trình: $(t + 8)(t - 8) = 297$

$\Leftrightarrow t^2 = 64 + 297 \Leftrightarrow t = \pm 19$

• $t = -19$ suy ra: $x^2 + 4x - 13 = -19$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 6 = 0$: vô nghiệm

• $t = 19$ suy ra: $x^2 + 4x - 13 = 19$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = -8 \vee x = 4$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $\{-8; 4\}$

b) (2) $\Leftrightarrow (x + 2)(x + 1)(x - 3)(x + 6) = -36$

$\Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 18) = -36$

Đặt $t = x^2 + 3x - 8$

Ta có phương trình:

$$(t + 10)(t - 10) = -36 \Leftrightarrow t^2 = 64 \Leftrightarrow t = \pm 8$$

- $t = -8$ suy ra: $x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 0$

- $t = 8$ suy ra: $x^2 + 3x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: $\left\{-3, 0, \frac{3 \pm \sqrt{73}}{2}\right\}$

21. Giải các phương trình sau:

a) $x^4 + (x - 1)^4 = 97$ b) $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$

GIẢI

a) Đặt: $t = \frac{x + x - 1}{2} = x - \frac{1}{2} \Rightarrow x = t + \frac{1}{2}$

Ta có phương trình: $\left(t + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^4 = 97$

$$\Leftrightarrow 2t^4 + 12 \cdot \frac{1}{4}t^2 + 2 \cdot \frac{1}{2^4} = 97 \Leftrightarrow 2t^4 + 3t^2 - \frac{775}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{25}{4} \vee t^2 = -\frac{31}{4} < 0 \text{ (loại)} \Leftrightarrow t = \pm \frac{5}{2}$$

- $t = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 3$

- $t = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = -2$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 3 \vee x = -2$

b) Đặt: $t = x + 4 \Rightarrow x = t - 4$

Ta có phương trình: $(t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 16$

$$\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 10 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1 \vee t^2 = -7 < 0 \text{ (loại)} \Leftrightarrow t = \pm 1$$

• $t = 1 \Rightarrow x = -3$

• $t = -1 \Rightarrow x = -5$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = 3 \vee x = -5$

22. Giải các phương trình

a) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ (1)

b) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ (2)

c) $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$ (3)

GIẢI

a) (1) $\Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Ta có phương trình: $6(t^2 - 2) - 35t + 62 = 0$

$$\Leftrightarrow 6t^2 - 35t + 50 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = \frac{10}{3}$$

• $t = \frac{5}{2}$ suy ra: $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 2$$

$$\bullet t = \frac{10}{3} \text{ suy ra: } x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 3$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 3\right\}$

$$\text{b) (2)} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 4 = 0$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 - 2 = x + \frac{1}{x}$$

Ta có phương trình: $t^2 - 2 + t - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \vee t = 2$$

$$\bullet t = -3 \text{ suy ra: } x + \frac{1}{x} = -3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\bullet t = 2 \text{ suy ra: } x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm: $\left\{1, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

$$\text{c) (3)} \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} - 5\left(x + \frac{2}{x}\right) + 10 = 0$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 - 4$$

$$\text{Ta có phương trình: } t^2 - 4 - 5t + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = 3$$

$$\bullet t = 2 \text{ suy ra: } x + \frac{2}{x} = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0: \text{ vô nghiệm}$$

$$\bullet t = 3 \text{ suy ra: } x + \frac{2}{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

23. Giải phương trình: $\cos^4 x + (1 - \cos x)^4 = \frac{1}{8}$

GIẢI

$$\text{Đặt } t = \frac{\cos x + \cos x - 1}{2} = \cos x - \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có phương trình: } \left(t + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2t^4 + 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 0 \vee t^2 = -\frac{3}{2} < 0 \text{ (loại)} \Leftrightarrow t = 0$$

$$\text{Suy ra: } \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\text{Vậy } x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

24. Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có một nghiệm $x \neq 0$ thì phương trình:

$$cx^2 + bx + a = 0 \text{ có một nghiệm là: } \frac{1}{x_0}$$

b) Giả sử x_1, x_2 là 2 nghiệm của (1)

$$\text{Đặt } S_n = x_1^n + x_2^n, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Chứng minh: } a.S_{n+2} + b.S_{n+1} + c.S_n = 0$$

GIẢI

$$\text{a) Ta có: } c\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x_0}\right) + a = \frac{ax_0^2 + bx_0 + c}{x_0}$$

$$\text{Do } x_0 \neq 0 \text{ là nghiệm của (1) nên } ax_0^2 + bx_0 + c = 0$$

$$\text{Suy ra: } c\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x_0}\right) + a = 0$$

Vậy $\frac{1}{x_0}$ là một nghiệm của phương trình:

$$cx^2 + bx + a = 0$$

$$\text{b) Ta có: } ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \Rightarrow (ax_1^2 + bx_1 + c).x_1^n = 0$$

$$\Rightarrow a.x_1^{n+2} + b.x_1^{n+1} + c.x_1^n = 0 \text{ (a)}$$

$$\text{Tương tự: } a.x_2^{n+2} + b.x_2^{n+1} + c.x_2^n = 0 \text{ (b)}$$

Cộng vế theo vế (a) và (b) ta được:

$$a(x_1^{n+2} + x_2^{n+2}) + b(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}) + c(x_1^n + x_2^n) = 0$$

hay $a.S_{n+2} + b.S_{n+1} + c.S_n = 0$ (đpcm)

25. Định m để hai phương trình sau có nghiệm chung $x^2 + mx + 1 = 0$ và $x^2 + x + m = 0$

GIẢI

Giả sử x_0 là nghiệm chung của 2 phương trình

Ta có: $x_0^2 + mx_0 + 1 = 0$ (1) và $x_0^2 + x_0 + m = 0$ (2)

$$(1) - (2): (m - 1)x_0 = m - 1 \Leftrightarrow m = 1 \vee x_0 = 1$$

- Nếu $m = 1$ thì hai phương trình có dạng

$x^2 + x + 1 = 0$ có $\Delta = -3 < 0$ nên vô nghiệm

- Nếu $x_0 = 1$, từ (1), (2) suy ra: $m = -2$ khi đó hai phương trình:

$x^2 - 2x + 1 = 0$ và $x^2 + x - 2 = 0$ dễ thấy có nghiệm chung là $x = 1$

Vậy $m = -2$.

26. Chứng minh rằng nếu hai phương trình:

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ (1) và } x^2 + cx + d = 0 \text{ (2)}$$

có nghiệm chung thì: $(b - d)^2 + (a - c)(ad - bc) = 0$

GIẢI

Giả sử x_0 là nghiệm chung của (1) và (2)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_0^2 + ax_0 + b = 0 \\ x_0^2 + cx_0 + d = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x_0^2 + ax_0 + b - (x_0^2 + cx_0 + d) = 0 \\ c(x_0^2 + ax_0 + b) - a(x_0^2 + cx_0 + d) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a - c)x_0 + b - d = 0 \\ (a - c)x_0^2 + ad - bc = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a - c)^2 \cdot x_0^2 = (b - d)^2 \\ (a - c)^2 \cdot x_0^2 = -(a - c)(ad - bc) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (b - d)^2 = -(a - c)(ad - bc)$$

$$\Rightarrow (b - d)^2 + (a - c)(ad - bc) = 0 \text{ (đpcm)}$$

27. Giải các phương trình.

a) $(c + a - 2b)x^2 + (a + b - 2c)x + b + c - 2a = 0$

Với $c + a - 2b \neq 0$

b) $(a + b)^2 \cdot x^2 - (a - b)(a^2 - b^2)x - 2ab(a^2 + b^2) = 0$

Với $a + b \neq 0$

c) $x^2 - 2(\sin a \cdot \sin b)x + \sin^2 a + \sin^2 b - 1 = 0$

GIẢI

a) $(c + a - 2b)x^2 + (a + b - 2c)x + b + c - 2a = 0 \quad (1)$

Để thấy: $(c + a - 2b) + (a + b - 2c) + (b + c - 2a) = 0$

Suy ra phương trình (1) có 2 nghiệm:

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{b + c - 2a}{c + a - 2b}$$

$$b) (a+b)^2.x^2 - (a-b)(a^2-b^2)x - 2ab(a^2+b^2) = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (a-b)^2(a^2-b^2)^2 + 8ab(a^2+b^2)(a+b)^2 \\ &= (a+b)^2[(a-b)^4 + 8ab(a^2+b^2)] \\ &= (a+b)^2.(a+b)^4 = (a+b)^6\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } x_{1,2} = \frac{(a+b)(a-b)^2 \pm (a+b)^3}{2(a+b)^2}$$

$$\text{Vậy } x_1 = \frac{-2ab}{a+b}; x_2 = \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

$$c) x^2 - 2(\sin a \cdot \sin b)x + \sin^2 a + \sin^2 b - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta' &= \sin^2 a \cdot \sin^2 b - \sin^2 a - \sin^2 b + 1 \\ &= (1 - \sin^2 a) - \sin^2 b(1 - \sin^2 a) \\ &= (1 - \sin^2 a)(1 - \sin^2 b) = \cos^2 a \cdot \cos^2 b\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } x_{1,2} = \sin a \cdot \sin b \pm \cos a \cdot \cos b$$

$$\text{Hay } x_1 = \cos(a-b); x_2 = -\cos(a+b)$$

28. Tìm điều kiện của a, b để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1 \quad (*)$$

GIẢI

Điều kiện: $x \neq 0 \wedge x \neq 1$

$$(*) \Leftrightarrow x^2 - (a^2 + b^2 + 1)x + a^2 = 0$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + b^2 + 1)^2 - 4a^2 > 0 \\ a^2 \neq 0 \\ 1 - a^2 - b^2 - 1 + a^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + b^2 - 1)^2 + 4b^2 > 0 \\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow ab \neq 0$$

29. Hai nghiệm x_1, x_2 của một phương trình bậc 2

thỏa:
$$\begin{cases} (x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = 0 \\ mx_1x_2 - (x_1 + x_2) = 2m + 1 \end{cases}$$

- Hãy viết phương trình đó.
- Định m để phương trình trên có nghiệm.
- Định m để phương trình có 2 nghiệm dương.
- Định m để 2 nghiệm trong câu c) là 2 cạnh góc vuông của tam giác vuông cạnh huyền bằng $\sqrt{2}$.

GIẢI

a) Ta có:
$$\begin{cases} (x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = 0 \\ mx_1x_2 - (x_1 + x_2) = 2m + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_1x_2 \\ m.x_1x_2 - 2x_1x_2 = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4m+2}{m-2} \\ x_1x_2 = \frac{2m+1}{m-2} \end{cases} (m \neq 2)$$

Vậy phương trình cần lập:

$$(m - 2)x^2 - 2(2m + 1)x + 2m + 1 = 0$$

b) $m \neq 2$:

$$\Delta' = (2m + 1)^2 - (m - 2)(2m + 1) = (2m + 1)(m + 3)$$

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ (2m + 1)(m + 3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \leq -3 \vee -\frac{1}{2} \leq m \neq 2$$

$$\text{c) Phương trình có 2 nghiệm dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \vee m \geq -\frac{1}{2} \\ m < -\frac{1}{2} \vee m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -3 \vee m > 2$$

$$\text{d) Ta có: } x_1^2 + x_2^2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 4(2m + 1)^2 - 2(2m + 1)(m - 2) = 2(m - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow m = -3 \vee m = 0$$

$$\text{Tóm lại: } \begin{cases} m \leq -3 \vee m > 0 \\ m = -3 \vee m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$$

Vậy $m = -3$

30. Cho phương trình: $x^2 + px + q = 0$ (1)

1. Tìm điều kiện của p và q để phương trình (1) có:

a) 2 nghiệm trái dấu. b) 2 nghiệm dương.

c) 2 nghiệm âm.

2. Định p và q để phương trình (1) có 2 nghiệm là p và q .

3. a) Định điều kiện của p và q để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt đều khác 1.

b) Với điều kiện trên, hãy viết phương trình bậc 2 theo Z có 2 nghiệm là:

$$Z_1 = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}, Z_2 = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}$$

c) Giả sử $p + q = 1$. Chứng minh phương trình (1) và phương trình tìm được câu b có chung tập nghiệm.

GIẢI

1. a) $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow q < 0$

b) $0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4q \geq 0 \\ p < 0 < q \end{cases}$

c) $x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4q \geq 0 \\ p > 0 \wedge q > 0 \end{cases}$

2. Phương trình có 2 nghiệm $p, q \Leftrightarrow \begin{cases} p + q = -p \\ p \cdot q = q \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p + q = 0 \\ q = 0 \vee p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} q = -2 \\ p = 1 \end{cases}$$

Vậy $p = q = 0 \vee p = 1, q = -2$

3. a) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt đều khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = p^2 - 4q > 0 \\ 1 + p + q \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4q > 0 \\ p + q \neq -1 \end{cases}$$

$$b) \bullet Z_1 + Z_2 = \frac{2x_1x_2 - 2}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = \frac{2q - 2}{q + p + 1}$$

$$\bullet Z_1 \times Z_2 = \frac{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = \frac{q - p + 1}{q + p + 1}$$

Vậy phương trình cần lập:

$$(q + p + 1)Z^2 + (q - p + 1) - 2(q - 1)Z = 0$$

$$\text{Hay: } (p + 1 + 1)Z^2 - 2(q - 1)Z - p + q + 1$$

$$= 0 \quad (p + q + 1 \neq 0)$$

c) Với $p + q = 1$

$$\Rightarrow p + q + 1 = 2, q - 1 = -p, -p + q + 1 = 2q$$

$$\text{Khi đó phương trình theo } Z \text{ là: } 2z^2 + 2pZ + 2q = 0$$

$$\text{Hay: } Z^2 + pZ + q = 0 \quad (2)$$

Vậy phương trình (1) và (2) có chung tập nghiệm.

31. Giải và biện luận phương trình:

$$x^4 - 10x^3 - 2(a - 11)x^2 + 2(5a + 6)x + 2a + a^2 = 0 (*)$$

GIẢI

Viết phương trình (*) bậc 2 theo biến a

$$a^2 - 2(x^2 - 5x - 1)a + x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 12x = 0$$

$$\Delta_a = (x^2 - 5x - 1)^2 - x^4 + 10x^3 - 22x^2 - 12x = (x - 1)^2$$

$$\text{Suy ra: } a = x - 5x - 1 + 1 \vee a = x^2 - 5x - 1 + x - 1$$

$$\text{Hay: } x^2 - 6x - a = 0 \vee x^2 - 4x - a - 2 = 0$$

$$\text{Như vậy } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x - a = 0 & (1) \\ x^2 - 4x - a - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

So nghiệm của (*) là số nghiệm của (1) và (2)

- Gọi x_0 là nghiệm chung của (1) và (2)

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_0^2 - 6x_0 - a = 0 \\ x_0^2 - 4x_0 - a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ a = -5 \end{cases}$$

- (1) có $\Delta_1 = a + 9$; (2) có $\Delta_2 = a + 6$

a	$-\infty$	-9	-6	-5	$+\infty$
Δ_1	-	0	+	+	+
Δ_2	-	-	0	+	+

Biện luận:

* $a < -9$: vô nghiệm

* $a = -9$: 1 nghiệm $x = 3$

* $-9 < a < -6$: 2 nghiệm: $x = 3 \pm \sqrt{a + 9}$

- * $a = -6$: 3 nghiệm: $x = 3 \pm \sqrt{3} \vee x = 2$
- * $a = -5$: 3 nghiệm: $x = 1 \vee x = 6 \vee x = 3$
- * $-6 < a \neq -5$: 4 nghiệm: $x = 3 \pm \sqrt{a+9}$
 $x = 2 \pm \sqrt{a+6}$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Định m để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt
 - a) $(m-1)x^2 - (3m-2)x + 2m = 0$
 - b) $(2m-1)x^2 - (5m-2)x + 3m-1 = 0$
2. Giải và biện luận các phương trình
 - a) $x^2 - 2(m+3)x + m^2 - 3m = 0$
 - b) $mx^2 - (3m+1)x + 2m+2 = 0$
 - c) $(m-3)x^2 - 6x - 4m = 0$
3. Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{m(x-1)}{x-2} = \frac{x+2}{x-1} + \frac{m}{(x-1)(x-2)}$$
4. Giải và biện luận theo a, b:

$$(a-b)x^2 - (a+b)^2 \cdot x + 4ab(a-b) = 0$$
5. Tìm a, b sao cho $\frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$ là 2 nghiệm của phương trình: $x^2 - (3a-2b)x + a-4b = 0$
6. Cho phương trình: $(m-1)x^2 - 2mx + m+2 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2

- a) Hãy tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập với m
 b) Định $m \in \mathbb{Z}$ sao cho $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$
7. Cho phương trình: $x^2 - (m - 2)x + m + 1 = 0$
 Định m sao cho phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa:
 a) $x_1^2 + x_2^2 = 9$ b) $2x_1 = 5x_2$
8. Định m để phương trình:
 $x^2 - (3m + 2)x + 3m^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa:
 a) $|x_1 - x_2| = 3$ b) $x_1^3 + x_2^3 = 11$
 c) $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$ có giá trị nhỏ nhất.
9. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm phương trình:

$$x^2 - ax + b = 0 \quad (1)$$

 Đặt: $y_1 = \frac{x_1}{x_1 + 1}, y_2 = \frac{x_2}{x_2 + 1}$
 a) Lập phương trình bậc 2 theo y có nghiệm là y_1 và y_2
 b) Tìm điều kiện giữa a, b để phương trình bậc 2 theo y và phương trình (1) tương đương nhau.
10. Tìm điều kiện của a, b để phương trình:

$$\frac{a}{x - b} + \frac{b}{x - a} = 2$$
 có 2 nghiệm phân biệt
11. Cho phương trình:

$$(m + 1)x^2 - (3m - 2)x + 2m + 1 = 0$$

 Định m để phương trình:
 a) Có hai nghiệm trái dấu

b) Có hai nghiệm âm

c) Có đúng một nghiệm dương

12. Định m để phương trình:

$$mx^4 - 3(m - 2)x^2 + m - 3 = 0 \text{ có nghiệm.}$$

13. Định m để phương trình:

$$(m - 1)x^4 - (2m - 3)x^2 + m - 3 = 0$$

có đúng 2 nghiệm.

14. Tìm điều kiện cần và đủ để 3 phương trình $ax^2 + bx + c = 0$; $bx^2 + cx + a = 0$; $cx^2 + ax + b = 0$. Có nghiệm chung. Tìm nghiệm chung đó?

15. Cho 3 phương trình: $ax^2 + 2bx + c = 0$;

$$bx^2 + 2cx + a = 0; \quad cx^2 + 2ax + b = 0$$

Với $abc \neq 0$

Chứng minh một trong ba phương trình trên có ít nhất một phương trình có nghiệm.

16. Tìm điều kiện cần và đủ để 2 phương trình: $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + cx + d = 0$ ($a \neq c$) có nghiệm chung. Tìm nghiệm chung đó.

17. Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có 2 nghiệm và tỉ số 2 nghiệm bằng k ($k \neq \pm 1$)

18. Cho 3 phương trình: $x^2 + ax + bc = 0$;

$$x^2 + bx + ca = 0; \quad x^2 + cx + ab = 0$$

Tìm điều kiện cần và đủ để mỗi phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt và tập hợp chứa tất cả các

nghiệm của 3 phương trình chỉ có đúng 3 phần tử. Hãy xác định 3 phần tử đó.

19. Cho 2 phương trình: $x^2 + 2x - m = 0$ (1)
 $x^2 + x + m = 0$ (2)

Định m để phương trình (1) có nghiệm khác không gấp hai lần một nghiệm khác không của phương trình (2).

20. Cho 2 phương trình: $x^2 - 2x + a = 0$ (1)
 $x^2 - 4x - a = 0$ (2)

Định a sao cho phương trình (1) có một nghiệm khác 0 gấp 3 lần một nghiệm khác 0 của phương trình (2)

21. Giải các phương

a) $(x - 2)(x + 3)(x - 4)(x + 1) = 144$

b) $x(x + 2)(x - 3)(x + 5) + 24 = 0$

c) $(3x - 1)(4x - 1)(6x - 1)(12x - 1) = 5$

22. Giải các phương trình:

a) $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$

b) $4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) = 3x^2$

23. Giải các phương trình:

a) $(x - 2)^4 + (x - 3)^4 = 1$

b) $(x - 2)^4 + (x - 4)^4 = 2$

c) $(x - 1)^4 + (x - 2)^4 = 17$

d) $(x + 3)^4 + (x - 5)^4 = 706$

24. Giải các phương trình:

a) $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $6x^4 - 7x^3 - 36x^2 + 7x + 6 = 0$

c) $3x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 20x + 12 = 0$

25. Định m để phương trình sau có nghiệm

$$2x^4 - (2m + 1)x^3 + (3m + 1)x^2 - (2m + 1)x + 2 = 0$$

26. Giải và biện luận các phương trình:

a) $x^4 - 6x^3 - 2(a - 2)x^2 + 2(3a + 5)x + a^2 + 4a + 3 = 0$

b) $x^4 - (a - 1)x^3 - (2a - 1)x^2 + (a^2 + 1)x - a = 0$

c) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 6ax - a^2 = 0$

BÀI 2: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT GIỚI KHOA VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

I. Vấn đề : Hệ có phương trình bậc nhất
Giải bằng phương pháp thế.

Ví dụ: Giải các hệ phương trình:

a)
$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^3 - 3xy = 9 \end{cases}$$

GIẢI

$$\text{a) Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+5y}{2} \\ \left(\frac{1+5y}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1+5y}{2} \cdot y + 2y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+5y}{2} \\ 3y^2 + 4y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{16}{3} \\ y = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\text{b) Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x(x-1) = 9 \\ y = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 = 8 \\ y = x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \\ y = x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

II. Vấn đề 2: HỆ ĐỐI XỨNG**1. DẠNG 1: HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI 1**

a) Đa thức đối xứng theo 2 biến x, y là đa thức thỏa: $f(x, y) = f(y, x); \forall x, y$

b) Hệ đối xứng loại 1 có dạng : $\begin{cases} f(x, y) = A \\ (x, y) = B \end{cases}$

Với f, g : đa thức đối xứng

* Cách giải: Nếu $x + y = S$; $xy = P$ rồi tìm S, P thỏa điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$

Khi đó, tìm x, y là 2 nghiệm của phương trình:
 $X^2 - SX + P = 0$

Ví dụ: Giải hệ (I):
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 12 \\ x^2y + xy^2 = 16 \end{cases}$$

GIẢI

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 12 \\ xy(x+y) = 16 \end{cases}$$

Đặt $x + y = S$, $xy = P$ ($S^2 - 4P \geq 0$)

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} S^2 - P = 12 \\ S \cdot P = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S^2 - 12 \\ S(S^2 - 12) = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = S^2 - 12 \\ S^3 - 12S - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S^2 - 12 \\ (S-4)(S+2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 4 \\ P = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} S = -2 \\ P = -8 \end{cases}$$

- $\begin{cases} S = 4 \\ P = 4 \end{cases}$ Suy ra x, y là 2 nghiệm của phương

trình: $X^2 - 4X + 4 = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2 = 2$.

Suy ra: $x = y = 2$

- $\begin{cases} S = -2 \\ P = -8 \end{cases}$ Suy ra x, y là 2 nghiệm của phương

trình: $X^2 + 2X - 8 = 0 \Leftrightarrow X_1 = +2; X_2 = -4$

Suy ra: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy hệ (I) có 3 nghiệm: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}, \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$

2. Dạng 2: HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI II

* Dạng: $\begin{cases} f(x,y) = k \\ f(y,x) = k \end{cases}$ (I) f : không đối xứng

* Cách giải:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) = k \\ f(x,y) - f(y,x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) = k \\ (x-y).g(x,y) = 0 \end{cases} \dots$$

Ví dụ: $\begin{cases} x^2 = 2y + 3 \\ y^2 = 2x + 3 \end{cases}$

GIẢI

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2y + 3 \\ x^2 - y^2 = 2y - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2y + 3 \\ (x-y)(x+y) + 2(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2y + 3 \\ (x - y)(x + y + 2) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x + 3 \\ y = x \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = 2(-2 - x) + 3 \\ y = -2 - x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = x \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ y = -2 - x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

III. Vấn đề 3: HỆ ĐẲNG CẤP

1. Đa thức đẳng cấp bậc n theo x, y là đa thức thỏa: $F(kx, ky) = k^n \cdot F(x, y)$, $\forall k$ hay $F(x, y)$ là tổng các đơn thức cùng bậc n .

2. Hệ đẳng cấp có dạng:
$$\begin{cases} F(x, y) = A \\ G(x, y) = B \end{cases}$$

Với F, G là các đa thức đẳng cấp

* Cách giải: • Nếu $x \neq 0$ thì đặt $y = tx$
 • Nếu $y \neq 0$ thì đặt $x = ty$

3. Hệ đẳng cấp bậc 2
$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$$

• *Cách giải 1:* nếu $x = ky$ (nếu $y \neq 0$) hoặc $y = kx$ (nếu $x \neq 0$)

• *Cách giải 2:* biến đổi hệ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ (\alpha x + \beta y)(px + qy) = 0 \end{cases}$$

Chuyển thành hệ rồi giải bằng phương pháp thế.

Ví dụ: giải hệ (I):
$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 4 & (1) \\ 2x^2 + xy - 13y^2 = 8 & (2) \end{cases}$$

GIẢI

• *Cách giải 1:* Dễ thấy $x \neq 0$ (vì $x = 0$ không thỏa hệ)
Đặt $y = kx$. Hệ trở thành:

$$\begin{cases} x^2 - kx^2 - 2k^2x^2 = 4 \\ 2x^2 + kx^2 - 13k^2x^2 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{1-k-2k^2} = \frac{8}{2+k-13k^2}$$

Suy ra: $2 + k - 13k^2 = 2 - 2k - 4k^2$

$$\Leftrightarrow 9k^2 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{1}{3}$$

+ $k = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

• $x = 2 \Rightarrow y = kx = 0.2 = 0$

• $x = -2 \Rightarrow y = kx = 0.(-2) = 0$

$$+ \quad k = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\bullet \quad x = -3 \Rightarrow y = kx = \frac{1}{3} \vee (-3) = -1$$

$$\bullet \quad x = 3 \Rightarrow y = kx = \frac{1}{3} \vee 3 = 1$$

Vậy hệ có 4 nghiệm: $(-2, 0)$; $(2, 0)$; $(-3, -1)$; $(3, 1)$

• **Cách giải 2:**

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 4 \\ -3xy + 9y^2 = 0 \end{cases} \quad (2) \times (1) - (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 9y^2 - 3y^2 - 2y^2 = 4 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3y \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

¹ Chú ý ở ví dụ này theo cách giải 1 ta không thể đặt: $x = ty$ được sẽ mất nghiệm $(\pm 2, 0)$. Vì với $y = 0$ ta có: $\begin{cases} x^2 = 4 \\ 2x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2$

Thực tế cách đặt $x = ty$ hay $y = tx$ được chuyển tiếp từ cách đặt: $\frac{x}{y} = t$ nếu

$y \neq 0$ hoặc $\frac{y}{x} = t$ nếu $x \neq 0$.

B. GIẢI BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Giải các hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ xy = 3(x + y) - 9 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ xy + x + 4 + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y + x^2 = 4x \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

GIẢI

$$\text{a) Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4y-1}{3} \\ \frac{4y-1}{3} \cdot y = 3\left(y + \frac{4y-1}{3}\right) - 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4y-1}{3} \\ 2y^2 - 11y + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{3} \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{b) Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2-3y}{2} \\ \frac{2-3y}{2} \cdot y + \frac{2-3y}{2} + y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2-3y}{2} \\ 3y^2 - y - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\text{c) Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2x + x^2 = 4x \\ y = 5 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ y = 5 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$\text{d) Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

2. Giải các hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x^2 - y^2 + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 5y - 4 = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

GIẢI

$$\text{a) Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5-3y}{2} \\ 3\left(\frac{5-3y}{2}\right)^2 - y^2 + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5-3y}{2} \\ 23y^2 - 82y + 59 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{31}{23} \\ y = \frac{59}{23} \end{cases}$$

$$\text{b) Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x(2x-5) + (2x-5)^2 = 7 \\ y = 2x-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 - 25x + 18 = 0 \\ y = 2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{18}{7} \\ y = \frac{1}{7} \end{cases}$$

$$\text{c) Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4-2y \\ (4-2y)^2 - (4-2y)y + 3y^2 + 2(4-2y) - 5y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4-2y \\ 9y^2 - 29y + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{4}{9} \\ y = \frac{20}{9} \end{cases}$$

3. Cho hệ: $\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$. Định a để

- a) Hệ vô nghiệm
- b) Hệ có 1 nghiệm duy nhất
- c) Hệ có 2 nghiệm phân biệt

GIẢI

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y \\ (6 - y)^2 + y^2 = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y \\ 2y^2 - 12y + 36 - a = 0 (*) \end{cases}$$

a) Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 36 - 2(36 - a) < 0 \Leftrightarrow a < 18$$

b) Hệ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có 1 nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 2a - 36 = 0 \Leftrightarrow a = 18$$

c) Hệ có 2 nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 2a - 36 > 0 \Leftrightarrow a > 18$$

4. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ (x - 1)(y - 1) = 18 \end{cases}$

GIẢI

$$\text{a) Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (4 - x)^2 = 10 \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{144}{x^2} = 25 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = 16 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\text{c) Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 65 \\ xy - (x + y) = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2(x + y + 17) = 65 \\ xy = x + y + 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2(x + y) - 99 = 0 \\ xy = x + y + 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ xy = 28 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y = -9 \\ xy = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 - y \\ y^2 - 11y + 28 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -y - 9 \\ y^2 + 9y + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -8 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -8 \end{cases}$$

5. Giải các hệ phương trình:

a)
$$\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 20) \\ x + y = 6 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$$

GIẢI

a) Đặt $x + y = S$, $xy = P$ với $S^2 - 4P \geq 0$

Hệ trở thành:
$$\begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - P = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + S - 12 = 0 \\ P = 5 - S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = -4 \\ P = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$$

So với điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$ ta chọn được:
$$\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$$

Khi đó x, y là 2 nghiệm phương trình:

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \vee X = 2$$

Vậy hệ có 2 nghiệm: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

b) Đặt $S = x + y, P = xy, S^2 - 4P \geq 0$

Hệ trở thành: $\begin{cases} S^2 - 2P = 2P + 4 \\ S = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 8 \end{cases}$

Giải phương trình: $X^2 - 6X + 8 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \vee X = 4$

Vậy: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

c) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot 6 = 13xy \\ x + y = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ 6(x + y)^2 - 12xy = 13xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = \frac{6(x + y)^2}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ y^2 - 5y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

d) Đặt $x + y = S$; $xy = P$ với $S^2 - 4P \geq 0$

$$\text{Hệ trở thành: } \begin{cases} S.P = 6 \\ P + S = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 5S + 6 = 0 \\ P = 5 - S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \end{cases} (\text{loại}) \vee \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} (\text{nhận})$$

• Giải phương trình: $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \vee X = 2$

$$\text{Vậy: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

6. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ xy(x + y) = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x^2 + y^2).xy = 78 \\ x^4 + y^4 = 97 \end{cases}$

GIẢI

a) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 + (xy)^3 = 17 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$

Đặt $x + y = S$, $xy = P$ với $S^2 - 4P \geq 0$

$$\text{Hệ trở thành: } \begin{cases} S^3 - 3PS + P^3 = 17 \\ S + P = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 3(5 - S).S + (5 - S)^3 = 17 \\ P = 5 - S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 5S + 6 = 0 \\ P = 5 - S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \end{cases} \text{ (loại)} \vee \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Giải phương trình: $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \vee X = 2$

Vậy hệ có 2 nghiệm: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

b) Đặt $x + y = S$, $xy = P$ với $S^2 - 4P \geq 0$

Hệ trở thành:

$$\begin{cases} S^3 - 3PS = 2 \\ PS = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 6 = 2 \\ PS = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 = 8 \\ P = \frac{2}{S} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}$$

Giải phương trình: $X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2 = 1$

Vậy hệ có 1 nghiệm: $x = y = 1$

c) Ta có: $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2$
 $= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$
 $= (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$

$$\text{Khi đó: Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2 - xy) \cdot 37 = 481 \\ x^2 + y^2 + xy = 37 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 13 & (1) \\ x^2 + y^2 + xy = 37 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & (1) + (2) \\ xy = 12 & (2) - (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2 \cdot 12 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -7 \\ xy = 12 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 7 \\ y^2 + 7y + 12 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 7 - y \\ y^2 - 7y + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

d) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{78}{xy} \\ (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 97 \end{cases}$

Điều kiện: $xy > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{78}{xy} \\ \frac{78^2}{(xy)^2} - 2(xy)^2 = 97 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{78}{xy} \\ 2(xy)^4 + 97(xy)^2 - 6084 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{78}{xy} \\ (xy)^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 \cdot y^2 = 36 \end{cases} \quad (xy > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \end{cases} \quad (xy > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

7. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + xy + y = a + 1 \\ x^2y + xy^2 = a \end{cases}$$

 Định a để hệ có nghiệm (x; y) thỏa: $x > 0, y > 0$

GIẢI

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = a + 1 \\ (9x + y).xy = a.1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ xy = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = a \end{cases}$$

Hệ có nghiệm (x, y) với $x > 0, y > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 4P \geq 0 \\ S > 0; P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ 1 - 4a \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a \geq 2 \vee 0 < a \leq \frac{1}{4}$$

8. Giải các hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$$

GIẢI

$$\begin{aligned} \text{a) Hệ} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ x^2 - y^2 = 3x + 2y - 3y - 2x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ (x - y)(x + y - 1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x + 2x \\ y = x \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = 3x + 2(1 - x) \\ y = 1 - x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = 0 \\ y = x \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Hệ} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ x^2 - 2y^2 - y^2 + 2x^2 = 2x + y - 2y - x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ (x - y)(3x + 3y - 1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x^2 = 2x + x \\ y = x \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 2\left(\frac{1}{3} - x\right)^2 = 2x + \frac{1}{3} - x \\ y = \frac{1}{3} - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x = 0 \\ y = x \end{cases} \vee \begin{cases} 9x^2 - 3x + 5 = 0 \\ y = \frac{1}{3} - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \emptyset \\ y = \frac{1}{3} - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases}$$

9. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 = 2x + y(1) \\ y^3 = 2y + x(2) \end{cases}$

GIẢI

$$(1) - (2): x^3 - y^3 = 2x + y - 2y - x$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \vee x^2 + xy + y^2 = 1$$

$$* \text{ Giải hệ: } \begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 2x + x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 3) = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

* Giải hệ:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x^3 = 2x + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x(x^3 - 2x) + (x^3 - 2x)^2 = 1 \\ y = x^3 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 1)(x^4 - x^2 + 1) = 0 \\ y = x^3 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = x^3 - 2x \end{cases} \vee \begin{cases} x^4 - x^2 + 1 = 0 \text{ (VN)} \\ y = x^3 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ có 5 nghiệm:

$$(0, 0); (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}); (-1, 1); (1, -1)$$

10. Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} x(3 - 4y^2) = m(3 - 4m^2) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(3 - 4x^2) = m(3 - 4m^2) & (2) \end{cases}$$

GIẢI

$$(1) - (2): x(3 - 4y^2) - y(3 - 4x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(4xy + 3) = 0 \Leftrightarrow x = y \vee 4xy + 3 = 0$$

* $x = y$ thay vào hệ ta được: $x(3 - 4x^2) = m(3 - 4m^2)$

$$\Leftrightarrow (x - m)(x^2 + mx + m^2 - \frac{3}{4}) = 0$$

$$x = m - x^2 + mx + m^2 - \frac{3}{4} = -$$

* $y = -\frac{3}{4x}$ thay vào hệ ta được

$$-\frac{3}{4x}(3 - 4x^2) = m(3 - 4m^2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - m(3 - 4m^2)x - \frac{9}{4} = 0$$

Số nghiệm của hệ chính là số nghiệm của các phương trình: $x = m$

$$x^2 + mx + m^2 - \frac{3}{4} = 0 \quad (3)$$

$$3x^2 - m(3 - 4m^2)x - \frac{9}{4} = 0 \quad (4)$$

- Phương trình (3) có $\Delta_1 = -3m^2 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \leq 1$

Khi đó (3) có nghiệm là $x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{3 - 3m^2}}{2}$

- Phương trình (4) có $\Delta_2 = m^2(3 - 4m^2)^2 + 27 > 0$,
 $\forall m$ nếu luôn có 2 nghiệm:

$$x_{3,4} = \frac{m(3 - 4m^2) \pm \sqrt{\Delta_2}}{6}$$

- Phương trình (3) có nghiệm $x = m$

$$\Leftrightarrow m^2 + m.m + m^2 - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

- Phương trình (4) có nghiệm $x = m$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - m^2(3 - 4m^2) - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Phương trình (3) và phương trình (4) có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ:

$$\begin{cases} x^2 + mx + m^2 - \frac{3}{4} = 0 & (a) \\ 3x^2 - m(3 - 4m^2)x - \frac{9}{4} = 0 & (b) \end{cases} \quad \text{có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow 3mx + m(3 - 4m^2)x + 3m^2 = 0 \quad (a) \times 3 - (b)$$

$$\Rightarrow m = 0 \vee x = \frac{3m}{4m^2 - 6} \quad \left(m \neq \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

$$+ m = 0. \text{ từ (a), (b) suy ra: } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$+ x = \frac{3m}{4m^2 - 6} \text{ từ (a), (b) suy ra:}$$

$$16m^6 - 48m^4 + 63m^2 - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4m^2 - 3)(4m^4 - 9m^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Biên luận hệ:

* $m = 0$: 3 nghiệm:

$$(0; 0); \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

* $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$: 3 nghiệm: (m, m) ; $(0, 0)$; $(-m, -m)$

* $m = \pm \frac{1}{2}$: 4 nghiệm: (x_1, x_1) ; (x_2, x_2) ; (x_3, x_1) ; (x_1, x_3)

* $m = \pm 1$: 4 nghiệm: (m, m) ; $\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m}{2}\right)$; (x_3, x_1) ; (x_1, x_3)

* $|m| > 1$: 3 nghiệm: (m, m) ; (x_3, x_4) ; (x_1, x_3)

* $|m| < 1 \wedge |m| \neq \frac{1}{2} \wedge |m| \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$: 5 nghiệm
 (m, m) ; (x_1, x_1) ; (x_2, x_2) ; (x_3, x_1) ; (x_1, x_3)

11. Giải các hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x^2 - 4xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 + 2xy + 2y^2 = 7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} y^2 - 3xy = 4 \\ x^2 - 4xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 6 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 3 \end{cases}$$

GIẢI

$$a) * x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = -1 \\ y^2 = 13 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

* $x \neq 0$: đặt $y = tx$

$$\text{Hệ trở thành: } \begin{cases} x^2 - 3tx^2 + t^2x^2 = -1 \\ 3x^2 - tx^2 + 3t^2x^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{-1}{1-3t+t^2} = \frac{13}{3-t+3t^2}$$

$$\text{Suy ra: } 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = \frac{1}{2}$$

$$\bullet t = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$+ x = 1 \Rightarrow y = tx = 2$$

$$+ x = -1 \Rightarrow y = tx = -2$$

$$\bullet t = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$+ x = -2 \Rightarrow y = tx = -1$$

$$+ x = 2 \Rightarrow y = tx = 1$$

Vậy hệ có 4 nghiệm $(1, 2); (-1, -2); (2, 1); (-2, -1)$

$$b) \quad * \quad x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = -1 \\ 2y^2 = 7 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

$$* \quad x \neq 0 \text{ đặt } y = tx$$

$$\text{Hệ trở thành: } \begin{cases} 2x^2 - 4tx^2 + t^2x^2 = -1 \\ 3x^2 + 2tx^2 + 2t^2x^2 = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{-1}{2 - 4t + t^2} = \frac{7}{3 + 2t + 2t^2}$$

$$\text{Suy ra: } 9t^2 - 26t + 17 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{17}{9}$$

$$* \quad t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\bullet \quad x = -1 \Rightarrow y = tx = -1$$

$$\bullet \quad x = 1 \Rightarrow y = tx = 1$$

$$* \quad t = \frac{17}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{81}{161} \Rightarrow x = \pm \frac{9}{\sqrt{161}}$$

$$\bullet \quad x = -\frac{9}{\sqrt{161}} \Rightarrow y = tx = -\frac{17}{\sqrt{161}}$$

$$\bullet \quad x = \frac{9}{\sqrt{161}} \Rightarrow y = tx = \frac{17}{\sqrt{161}}$$

Vậy hệ có 4 nghiệm: $(-1, -1); (1, 1)$

$$\left(-\frac{9}{\sqrt{161}}, -\frac{17}{\sqrt{161}}\right); \left(\frac{9}{\sqrt{161}}, \frac{17}{\sqrt{161}}\right)$$

c) * $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 4 \\ x^2 = 1 \end{cases}$ vô nghiệm

* $y \neq 0$ đặt $x = ty$

Hệ trở thành: $\begin{cases} y^2 - 3ty^2 = 4 \\ t^2y^2 - 4ty^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{4}{1-3t} = \frac{1}{t^2-4t+1}$$

Suy ra: $4t^2 - 13t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \vee t = 3$

• $t = 3 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{1-9} = \frac{1}{2}$: vô nghiệm

• $t = \frac{1}{4} \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$

• $y = -4 \Rightarrow x = ty = -1$

• $y = 4 \Rightarrow x = ty = 1$

Vậy có 2 nghiệm: $(-1, -4); (1, 4)$

d) $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 6 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 6 \\ 5xy - 5y^2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 6 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 6 \\ y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0x^2 = 6 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm: $(-\sqrt{3}, 0); \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), 0)$

12. Giải các hệ phương trình:

a)
$$\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy^2 - 3y^2 = 15 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5 \end{cases}$$

GIẢI

a) * $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4y^2 = 38 \\ -3y^2 = 15 \end{cases}$ vô nghiệm

* $x \neq 0$ đặt $y = tx$

Hệ trở thành:
$$\begin{cases} 3x^2 + 5tx^2 - 4t^2x^2 = 38 \\ 5x^2 - 9tx^2 - 3t^2x^2 = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{38}{3 + 5t - 4t^2} = \frac{15}{5 - 9t - 3t^2}$$

Suy ra: $54t^2 + 417t - 145 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{145}{18} \vee t = \frac{1}{3}$

• $t = -\frac{145}{18} \Rightarrow x^2 = \frac{38}{3 - 5 \cdot \frac{145}{18} - 4 \cdot \left(\frac{145}{18}\right)^2} < 0$: VN

$$\bullet t = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$+ x = -3 \Rightarrow y = tx = -1$$

$$+ x = 3 \Rightarrow y = tx = 1$$

Vậy hệ có 2 nghiệm: $(-3, -1); (3, 1)$

$$b) \quad * x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 3 \\ y^2 = 1 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

* $x \neq 0$ đặt $y = tx$

$$\text{Hệ trở thành: } \begin{cases} x^2 - 2tx^2 + 3t^2x^2 = 9 \\ x^2 - 4tx^2 + 5t^2x^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{1 - 2t + 3t^2} = \frac{5}{1 - 4t + 5t^2}$$

$$\text{Suy ra: } 30t^2 - 26t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \vee t = \frac{1}{5}$$

$$+ t = \frac{2}{3} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\bullet x = -3 \Rightarrow y = tx = -2$$

$$\bullet x = 3 \Rightarrow y = tx = 2$$

$$+ t = \frac{1}{5} \Rightarrow x^2 = \frac{25}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet x = -\frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = tx = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet x = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = tx = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy hệ có 4 nghiệm:

$$(-3, -2); (3, 2); \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\mathbf{13. \text{ Giải hệ: } \begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ 5x^2 - 7xy - 6y^2 = 0 \end{cases}}$$

GIẢI

$$* y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ 5x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

$$* y \neq 0 \text{ đặt: } x = ty$$

$$\text{Hệ trở thành: } \begin{cases} 3t^2y^2 - 8ty^2 + 4y^2 = 0 \\ 5t^2y^2 - 7ty^2 - 6y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 - 8t + 4 = 0 \\ 5t^2 - 7t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \vee t = \frac{2}{3} \\ t = 2 \vee t = -\frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm: } \begin{cases} x = 2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải các hệ phương trình

$$a) \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x + 7y = 3 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + 3xy + 9 = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

2. Giải và biện luận hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 + 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} ax - y = 3a - 2 \\ x^2 + xy + 2a + 1 = 0 \end{cases}$$

3. Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x - xy + y = 17 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy + 25 \\ x - xy + y = 7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^2y + xy^2 = -2 \end{cases}$$

4. Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} x^4 - 7x^2y^2 + y^4 = 19 \\ x^2 - 3xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ x^3y + xy^3 = 10 \end{cases}$$

5. Giải và biện luận hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 = 2a + 2 \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + xy + y = -1 \\ x^2y + xy^2 = a - a^2 \end{cases}$$

6. Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} x^2 = 7x - 2y \\ y^2 = 7y - 2x \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2y = 4x + 5y \\ xy^2 = 4y + 5x \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^3 = 2xy^2 - y \\ y^3 = 2x^2y - x \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 = 5x + 2y \\ y^3 = 5y + 2x \end{cases}$$

7. Giải và biện luận hệ phương trình theo a, b

$$a) \begin{cases} x^2 = (a^2 - ab + b^2)x + aby \\ y^2 = (a^2 - ab + b^2)y + abx \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2y = 2abx + (a^2 + b^2)y \\ y^2x = 2aby + (a^2 + b^2)x \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^3 = (a^2 + b^2)x - xby \\ y^3 = (a^2 + b^2)y - abx \end{cases}$$

8. Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(y^2 - 3) = m^3 - 3m \\ y(x^2 - 3) = m^3 - 3m \end{cases}$$

9. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 8 \\ 2x^2 - xy = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \\ 3x^2 - 2xy = 160 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 1 \\ 3x^2 - xy - 2y^2 = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x^2 - 4xy = 1 \\ 12x^2 - 11xy + 2y^2 = 2 \end{cases}$

10. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 4 \\ 5x^2 + xy - 6y^2 = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x^2 - xy + 3y^2 = 4 \\ 8x^2 + xy + 2y^2 = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x^2 - xy + 2y^2 = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 9y^2 = 7 \\ x^2 - 2xy - 7y^2 = 7 \end{cases}$

11. Định m để hệ phương trình có nghiệm:

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 1 \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = m \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 1 \\ mx^2 - (m+1)xy + y^2 = m \end{cases}$

12. Giải và biện luận hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 1 \\ x^2 - (a+1)xy + ay^2 = a \end{cases}$

b) $\begin{cases} (a-1)x^2 + xy - y^2 = a-1 \\ ax^2 - xy = a \end{cases}$

CHƯƠNG 4: TAM THỨC BẬC 2

BÀI 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Vấn đề 1:

XÉT DẤU BIỂU THỨC – GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH HỮU TỈ

1. Dấu tam thức bậc 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

a) $\Delta < 0$: $f(x)$ vô nghiệm và luôn cùng dấu hệ số a

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu a	

b) $\Delta = 0$: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ có nghiệm kép $x_0 = -\frac{b}{2a}$

và luôn cùng dấu với a

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu a	0	cùng dấu a

c) $\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ có 2 nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

X	$-\infty$		X_1		X_2		$+\infty$
f(x)		Cùng dấu a		Trái dấu a		Cùng dấu a	

2. Dấu của biểu thức hữu tỉ:

- phân tích biểu thức dưới dạng tích – thương các tam thức bậc 2 hay nhị thức bậc 1
- Xét dấu các nhân tử rồi suy ra dấu của biểu thức

3. Giải bất phương trình hữu tỉ dạng: $F(x) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$

- Xét dấu $F(x)$ rồi suy ra nghiệm của bất phương trình

Ví dụ 1: Xét dấu $F(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)^2 - (3x - 4)^2}{-3x^2 + 2x}$

GIẢI

Ta có: $F(x) = \frac{(x^2 + x - 2)(x^2 - 5x + 6)}{-3x^2 + 2x}$

x	-	-2	0	$\frac{2}{3}$	1	2	3	+
$x^2 + x - 2$	+	0	-	-	-	0	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	+	+	+	0	-	0
$-3x^2 + 2x$	-	-	0	+	0	-	-	-
F(x)	-	0	+	-	+	0	-	0

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\frac{2x - 3}{x^2 - 2x - 3} > 1 (*)$

GIẢI

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2x - 3 - (x^2 - 2x - 3)}{x^2 - 2x - 3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x}{x^2 - 2x - 3} > 0 \quad (1)$$

x	$-\infty$	-1	0	3	4	$+\infty$			
$-x^2 + 4x$	-	-	0	+	0	-			
$x^2 - 2x - 3$	+	0	-	-	0	+			
(1)	-		+	0	-		+	0	-

Vậy nghiệm bất phương trình là:

$$-1 < x < 0 \vee 3 < x < 4$$

II. Vấn đề2:**GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH HỮU TỈ**

Ví dụ 1: Giải hệ
$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 & (1) \\ x^2 - 4x + 3 < 0 & (2) \end{cases}$$

GIẢI

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	2	3	$+\infty$
(1)	+	0	-	-	0	+
(2)	+	+	0	-	-	0

Nghiệm của hệ: $2 \leq x < 3$

Ví dụ 2: Giải hệ: (...)**GIẢI**

* Giải (1) $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$		
$x^2 + x - 2$		+	0	-	0	+

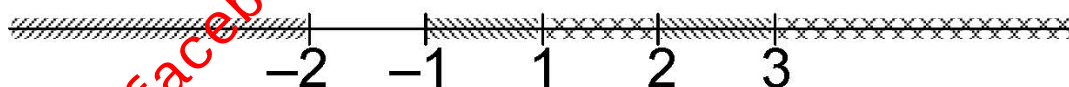
(1) có nghiệm: $-2 < x < 1$

* Giải (2) $\Leftrightarrow \frac{3 - x(x - 2)}{x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x + 3}{x - 2} \geq 0$ (3)

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$	
$-x^2 + 2x + 3$	-	0	+	0	-	
$x - 2$	-	-	0	+	+	
(3)	+	0		+	0	-

(2) có nghiệm: $x \leq -1$ hay $2 < x \leq 3$

Từ (1), (2) suy ra: $\begin{cases} -2 < x < 1 \\ x \leq -1 \vee 2 < x \leq 3 \end{cases}$



Vậy nghiệm của hệ: $-2 < x \leq -1$

III. VẤN ĐỀ 3: GIẢI VÀ BIỆN LUẬN BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

$$ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$

* $a = 0$: xét riêng trường hợp này

* $a \neq 0$:

• Ta xét dấu a và $\Delta = b^2 - 4ac$

• Dựa vào dấu của a và Δ ta xét dấu

$f(x) = ax^2 + bx + c$ rồi suy ra nghiệm của bất phương trình

Ví dụ: Giải và biện luận bất phương trình

$$f(x) = (m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + 3m - 4 \geq 0$$

GIẢI

* $m = 1$: Bất phương trình có dạng: $2x - 1 \geq 0$ có nghiệm $x \geq \frac{1}{2}$

* $m \neq 1$: $\Delta' = (m - 2)^2 - (m - 1)(3m - 4) = -2m^2 + 3m$

m	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
a	-	-	0	+	+	
Δ'	-	0	+	+	0	-

• $m < 0$: Ta có $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-	-

Bất phương trình vô nghiệm

• $m = 0$: Ta có $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

Bất phương trình có 1 nghiệm: $x = 2$

- $0 < m < 1$: Ta có $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ có 2 nghiệm

Phân biệt: $x_1 = \frac{m-2-\sqrt{\Delta'}}{m-1}$, $x_2 = \frac{m-2+\sqrt{\Delta'}}{m-1}$

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$
f(x)	—	0	+	—

Bất phương trình có nghiệm: $x_2 \leq x \leq x_1$

- $1 < m < \frac{3}{2}$: Ta có: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

Bất phương trình có nghiệm: $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
f(x)	+	0	—	+

- $m = \frac{3}{2}$: Ta có $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

Bất phương trình có nghiệm: $x \in \mathbb{R}$

- $m > \frac{3}{2}$: Ta có $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0 \forall x$

Bất phương trình có nghiệm: $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)	+	0	+

IV. Vấn đề 4:

**SO SÁNH NGHIỆM
PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 VỚI SỐ α**
 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

$$1. x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0$$

$$2. \alpha < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha > 0 \end{cases}$$

$$3. x_1 \leq x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha < 0 \end{cases}$$

$$4. x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x < x_1 < \beta < x_2 \\ x_1 < x < x_2 < \beta \end{cases} \Leftrightarrow f(x).f(\beta) < 0$$

$$6. \alpha < x_1 \leq x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} < \beta \end{cases}$$

Ví dụ 1: Tùy theo m so sánh nghiệm của phương trình $(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + 3m - 4 = 0$ với $\alpha = 1$

GIẢI

* $m = 1$: Phương trình có dạng: $2x - 1 = 0$ có

nghiệm $x = \frac{1}{2} < 1$

* $m \neq 1$: $\Delta' = (m - 2)^2 - (m - 1)(3m - 4) = -2m^2 + 3m$
 $af(\alpha) = (m - 1) \cdot [m - 1 - 2(m - 2) + 3m - 4]$
 $= (m - 1)(2m - 1)$

$$\frac{S}{2} - \alpha = \frac{m - 2}{m - 1} - 1 = \frac{-1}{m - 1}$$

m	Δ'	$af(\alpha)$	$\frac{S}{2} - \alpha$	Kết luận
$+\infty$	$-$	$+$	$-$	Vô nghiệm
$\frac{3}{2}$	0	$-$	$-$	$x_1 = x_2 = -1 < 1$
1	$+$	$+$	$-$	$x_1 < x_2 < 1$
1	0	0	$+$	$x = \frac{1}{2} < 1$ $x_1 < 1 < x_2$
$\frac{1}{2}$	$+$	$-$	$+$	$x_1 = 1 < x_2 = 5$
0	0	$+$	$+$	$1 < x_1 < x_2$
0	0	$+$	$+$	$1 < x_1 = x_2 = 2$
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	Vô nghiệm

Ví dụ 2: Định m để phương trình:

$$f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m + 3)x + 4 = 0 \text{ có nghiệm}$$

$$\text{thuộc đoạn } [-1, 1]$$

GIẢI

- * $m = -1$: Phương trình có dạng: $-4x + 4 = 0$ có 1 nghiệm $x = 1 \in [-1, 1]$
- * $m \neq -1$: Phương trình bậc 2 có nghiệm $x \in [-1, 1]$ khi và chỉ khi:

$$f(-1).f(1) \leq 0 \text{ hoặc: } \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(-1) \geq 0 \\ af(1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = (m + 3)^2 - 4(m + 1) = m^2 + 2m + 5$$

$$= (m + 1)^2 + 4 > 0, \forall m$$

$$af(-1) = (m + 1)(3m + 11);$$

$$af(1) = -(m + 1)^2 < 0, \forall m \neq -1$$

$$\frac{S}{2} = \frac{m + 3}{m + 1}$$

$$\bullet f(-1).f(1) \leq 0 \Leftrightarrow (3m + 11)(-m - 1) \leq 0 \quad (m \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow m \leq -\frac{11}{3} \vee m > -1$$

$$\bullet \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(-1) > 0 \\ af(1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 + 4 \geq 0 \\ (m+1)(3m+11) > 0 \\ -(m+1)^2 > 0 \\ -1 < \frac{m+3}{m+1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq \emptyset$$

Vậy: $m \leq -\frac{11}{3} \vee m \geq -1$

V. Ví dụ 5: CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 CÓ NGHIỆM

Cho phương trình: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Các phương pháp chứng minh phương trình bậc 2 có nghiệm là:

1. $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$
2. $ac \leq 0$
3. Tồn tại số α sao cho: $af(\alpha) \leq 0$
4. Tồn tại 2 số α, β sao cho: $f(\alpha).f(\beta) \leq 0$

Ví dụ 1: chứng minh các phương trình bậc 2 sau luôn có nghiệm:

a) $x^2 - 2mx + 2m - 5 = 0$

b) $3x^2 + 5(m^2 - 2m + 1)x - m^2 - 1 = 0$

GIẢI

a) Ta có: $\Delta' = m^2 - 2m + 5 = (m - 1)^2 + 4 > 0 \forall m$
nên phương trình luôn có nghiệm

b) Ta có: $ac = 3(-m^2 - 1) = -3(m^2 + 1) < 0 \forall m$
nên phương trình luôn có nghiệm

Ví dụ 2: Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm

a) $x^2 - 7x + m(2x - 4) = 0$

b) $x^2 - (m^4 + m + 2)x + m = 0$

c) $m(x + 1)(2x - 3) + 4x - 1 = 0$

GIẢI

Đặt vế trái là $f(x)$

a) Ta có: $af(2) = -10 < 0 \forall m$ nên phương trình luôn có nghiệm

b) Ta có: $af(1) = 1 - m^4 - m - 2 + m = -m^4 - 1 < 0$, $\forall m$ nên phương trình luôn có nghiệm

c) Ta có: $f(-1) = -5$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 5$

$$\Rightarrow f(-1) \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) = -25 < 0, \forall m$$

Vậy phương trình luôn có nghiệm

VI. Vấn đề 6:

DẤU TAM THỨC TRÊN MIỀN CHO TRƯỚC

Ví dụ 1: Định m sao cho: $mx^2 - (m + 1)x + m > 0$
Với mọi $x \in \mathbb{R}$.

GIẢI

Đặt $f(x) = mx^2 - (m + 1)x + m$

• $m = 0$: $f(x) = -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$: không thỏa yêu cầu

$$\begin{aligned}
 &\bullet m \neq 0: f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -3m^2 + 2m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -\frac{1}{3} \vee m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1
 \end{aligned}$$

Vậy $m > 1$

Ví dụ 2: Định m sao cho

$f(x) = (3m - 4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1$ luôn âm trên khoảng $(-\infty, 1)$.

Giaûi

$$* m = \frac{4}{3}: f(x) = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} < 0$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{1}{4}): \text{không thỏa yêu cầu}$$

* $m \neq \frac{4}{3}$: Các trường hợp $f(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 1)$ là:

$$a) \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 4 < 0 \\ -2m^2 + 3m < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{4}{3} \\ m < 0 \vee m > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < 0
 \end{aligned}$$

$$b) \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ f(1) \leq 0 \\ \frac{S}{2} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 4 < 0 \\ -2m^2 + 3m \geq 0 \\ 2m - 1 \leq 0 \\ \frac{m-2}{3m-4} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{4}{3} \\ 0 \leq m \leq \frac{3}{2} \\ m \leq \frac{1}{2} \\ 1 < m < \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \emptyset$$

x	$-\infty$		1	x_1		x_2	$+\infty$
f(x)		-		0	+	0	-

Vậy $m < 0$

Ví dụ 3: Cho $f(x) = x^2 - 2(2m - 3)x + 9$. Định m sao cho:

a) $f(x) > 0, \forall x \in (-1; +\infty)$

b) $f(x) \leq 0, \forall x \in [1, 9]$

GIẢI

a) * TH1: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m^2 - 12m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 3$

* TH2: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ f(-1) \geq 0 \\ \frac{S}{2} + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m - 1 \leq 0 \\ -m - 1 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{5}$

x	$-\infty$	x_1	x_2	1	$+\infty$
f(x)	+	0	-	0	+

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m - 1 \leq 0 \\ -m - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{5}$$

b) $f(x) = x^2 - 2(2m - 3)x + 9 \leq 0, \forall x \in [1, 9]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(9) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 4$$

x		x_1	1	9	x_2
f(x)	+	0	-	0	+

B. GIẢI BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Xét dấu các tam thức:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$

b) $g(x) = -x^2 + 2x - 1$

c) $h(x) = 2x^2 - 7x + 5$

GIẢI

a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$ có $\Delta = 1 - 24 < 0, a = 2 > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		$+$

b) $g(x) = -x^2 + 2x - 1$ có $\Delta' = 0, a = -1 < 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g(x)	$-$	0	$-$

c) $h(x) = 2x^2 - 7x + 5$ có 2 nghiệm: $1, \frac{5}{2}$

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$	$+$

2. Giải các bất phương trình sau:

a) $x^2 - 7x + 10 < 0$

b) $(-x^2 + 3x - 2)(x^2 - 5x + 6) \geq 0$

c) $\frac{x^2 + x + 3}{1 - 2x} < 0$

d) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} > 0$

GIẢI

a)

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$	
$x^2 - 7x + 10$	+	0	-	0	+

b)

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
$-x^2 + 3x - 2$	$-$	0	$+$	0	$-$		
$x^2 - 5x + 6$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
(b)	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Nghiệm bất phương trình là: $1 \leq x \leq 3$

c)	x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
	$x^2 + x + 3$	+		+
	$1 - 2x$	+	0	-
	(c)	+		-

Nghiệm bất phương trình là: $x > \frac{1}{2}$

d)	x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
	$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+
	$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+
	(d)	+		+	0	-

Nghiệm bất phương trình là:

$$x < 1 \vee 1 < x < 2 \vee 3 < x$$

3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{x^2 - 4x + 3}{3 - 2x} < 1 - x$

b) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} < \frac{3}{x-3}$

c) $\frac{x-2}{1-x} + \frac{x-3}{1+x} \geq \frac{x^2 + 4x + 15}{x^2 - 1}$

d) $\frac{2}{x+2} + \frac{1}{2} \leq \frac{-4}{x^2 + 2x}$

GIẢI

$$a) \frac{x^2 - 4x + 3}{3 - 2x} < 1 - x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-x)(3-2x) - x^2 + 4x - 3}{3 - 2x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x}{3 - 2x} > 0 \quad (a)$$

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$x^2 - x$	+	0	-	0	+
$3 - 2x$	+	+	+	0	-
(a)	+	0	-	0	+

Nghiệm bất phương trình là: $x < 0 \vee 1 < x < \frac{3}{2}$

$$b) \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} < \frac{3}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)(x-2) - (x-2)(x-3) - 2(x-3)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x - 6}{(x-1)(x-2)(x-3)} > 0 \quad (b)$$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	$+\infty$
$4x - 6$	-	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	0	+	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	0	+	+