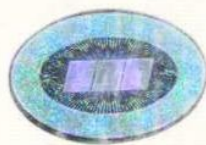


LÊ ĐỨC



- Biên soạn theo chương trình SGK phân ban mới
- Rèn kĩ năng giải bài tập và luyện thi tốt nghiệp - tuyển sinh

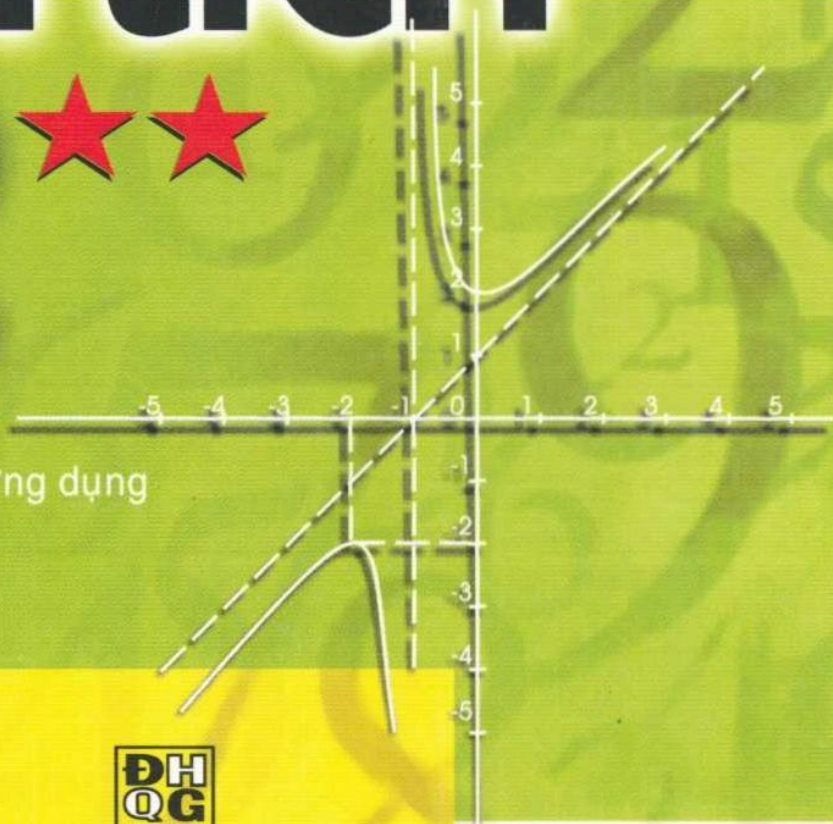
Các dạng Toán điển hình

Giải tích

12



- Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng
- Số phức



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ ĐỨC

Các dạng Toán điển hình Giải tích 12^{☆☆}

- Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng
- Số phức

- Biên soạn theo chương trình phân ban mới
- Rèn kĩ năng giải toán. • Ôn tập và chuẩn bị cho các kì thi quốc gia... do Bộ GD&ĐT tổ chức



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

ĐT (04) 9715013; (04) 7685236. Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc **PHÙNG QUỐC BẢO**

Tổng biên tập **NGUYỄN BÁ THÀNH**

Biên tập nội dung

QUỐC THẮNG

Sửa bài

LÊ HOÀ

Chế bản

CÔNG TI ANPHA

Trình bày bìa

SƠN KỲ

Đối tác liên kết xuất bản

CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH GIẢI TÍCH 12 (Tập 2)

Mã số: 1L-462DH2008

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công ty TNHH In Bao bì Hưng Phú

Số xuất bản: 809-2008/CXB/06-143, ngày 18/08/2008

Quyết định xuất bản số: 462LK-TN/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2008.

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc cuốn sách:

CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH GIẢI TÍCH 12

do Nhóm Cự Môn biên soạn. Cuốn sách được viết dựa trên ý tưởng trình bày của bộ sách **Phương pháp giải Toán** (gồm 11 tập) do Lê Hồng Đức chủ biên và đã được NXB Hà Nội ấn hành.

Cuốn sách bao gồm 2 chương:

Chương I – NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Chương II – SỐ PHỨC

Ở mỗi chương chứa đựng các bài học (chủ đề 1, chủ đề 2,...) theo nội dung chương trình của sách giáo khoa mới.

Mỗi bài đều được chia thành 4 mục:

I. Tóm tắt lý thuyết: Trình bày có trật tự nội dung kiến thức liên quan.

II. Phương pháp giải toán (hoặc các ví dụ mẫu)

Gồm các ví dụ được tuyển chọn có chọn lọc nhằm giúp hoàn thiện kiến thức cơ bản và nâng cao kỹ năng giải Toán.

III. Bài tập tự giải

Như vậy, ở mỗi bài:

1. Với việc trình bày mục tóm tắt lý thuyết, sẽ giúp các em học sinh hiểu rằng cần phải nắm vững những nội dung gì ?
2. Tiếp đó, tới mục phương pháp giải toán, sẽ giúp các em học sinh hoàn thiện kiến thức.
3. Đặc biệt là nội dung của các **chú ý, nhận xét** và **yêu cầu** sau mỗi ví dụ sẽ giúp các em học sinh củng cố những thiết sót và cách nhìn nhận, đánh giá các vấn đề đặt ra.
4. Ngoài ra, còn có rất nhiều ví dụ được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.

Chúng tôi cũng xin trân trọng cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã nhận lời đọc bản thảo, nhận lời tới dự giờ trong các tiết giảng thử của chúng tôi theo giáo trình này và từ đó đóng góp những nhận xét quý báu để giúp chúng tôi tới ngày hôm nay hoàn thiện được cuốn sách này.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng cuốn sách khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế của người viết, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ:

Trung tâm sách giáo dục Anpha, 225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.

ĐT: 08.62676463, 38547464.

Email: alphabookcenter@yahoo.com

Xin trân trọng cảm ơn!

CHƯƠNG I

NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

CHỦ ĐỀ 1 NGUYÊN HÀM

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng I . Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên I nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc I .

Định lý 1: Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng I . Khi đó:

- Với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.
- Ngược lại, nếu $G(x)$ là một nguyên hàm bất kì của $f(x)$ thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc I .

Kí hiệu $\int f(x)dx$ để chỉ họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Vậy ta viết:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Ta có:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Định lý 2: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn đó.

2. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

1. $\int 0dx = C, \int dx = x + C.$

2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0.$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1$$

4. Với k là hằng số khác 0:

a. $\int \sin kx \cdot dx = -\frac{\cos kx}{k} + C.$

b. $\int \cos kx \cdot dx = \frac{\sin kx}{k} + C.$

c. $\int e^{kx} \cdot dx = \frac{e^{kx}}{k} + C.$

d. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1.$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

7. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C.$

3. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

Định lý 3: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ thì:

a. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx = F(x) \pm G(x) + C.$

b. Với mọi số thực $a \neq 0$:

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx = a.F(x) + C.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Với yêu cầu "*Chứng minh rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $(a; b)$* ", ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định $F'(x)$ trên $(a; b)$.

Bước 2: Chứng tỏ rằng $F'(x) = f(x)$ với $\forall x \in (a; b)$.

 **Chú ý:** Nếu thay $(a; b)$ bằng $[a; b]$ thì phải thực hiện chi tiết hơn, như sau:

Bước 1: Xác định $F'(x)$ trên $(a; b)$.

Xác định $F'(a^+)$ và $F'(b^-)$.

Bước 2: Chứng tỏ rằng:

$$\begin{cases} F'(x) = f(x), \forall x \in (a; b) \\ F'(a^+) = f(a) \\ F'(b^-) = f(b) \end{cases}.$$

Ví dụ 1:

1. $F(x) = x^3 + C$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$ trên $\mathbb{R}$, vì:

$$(F(x))' = (x^3 + C)' = 3x^2 = f(x).$$

Từ đó, có thể tổng quát hoá:

▪ Hàm $F(x) = x^k + C$ với $k \neq 0$, $C = \text{const}$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = kx^{k-1}$ trên $\mathbb{R}$.

▪ Ngược lại, hàm số $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq -1$ có họ nguyên hàm là $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$

2. $F(x) = \cos x + C$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\sin x$ trên $\mathbb{R}$, vì:

$$(F(x))' = (\cos x + C)' = -\sin x = f(x).$$

Từ đó, có thể tổng quát hoá:

▪ Hàm $F(x) = \cos(ax + b) + C$ với $a \neq 0$, $C = \text{const}$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -a \sin(ax + b)$ trên $\mathbb{R}$.

- Ngược lại hàm số $f(x) = \sin(ax + b)$, $a \neq 0$ có họ nguyên hàm là $F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$ trên $\mathbb{R}$.

3. $F(x) = e^x + C$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x$ trên $\mathbb{R}$, vì:

$$(F(x))' = (e^x + C)' = e^x = f(x).$$

Từ đó, có thể tổng quát hoá:

- Hàm $F(x) = e^x + C$ với $C = \text{const}$ là họ nguyên hàm của hàm $f(x) = e^x$ trên $\mathbb{R}$.
- Ngược lại hàm số $f(x) = e^{ax+b}$, $a \neq 0$ có họ nguyên hàm là $F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng hàm số $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a})$ với $a > 0$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$ trên $\mathbb{R}$.

 *Giải*

Ta có:

$$\begin{aligned} F'(x) &= [\ln(x + \sqrt{x^2 + a})]' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + a})'}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a}}}{x + \sqrt{x^2 + a}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}(x + \sqrt{x^2 + a})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} = f(x). \end{aligned}$$

Vậy, ta có $F(x)$ với $a > 0$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng hàm số:

$$F(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

là một nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \text{ trên } \mathbb{R}.$$

 *Giải*

Để tính đạo hàm của hàm số $F(x)$ ta đi xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $x \neq 0$, ta có:

$$F'(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Với $x = 0$, ta có :

- Đạo hàm bên trái của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$F'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - e^0}{x} = 1.$$

- Đạo hàm bên phải của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$F'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^0}{x} = 1.$$

Nhận xét rằng $F'(0^-) = F'(0^+) = 1 \Rightarrow F'(0) = 1$.

Tóm lại:

$$F'(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases} = f(x).$$

Vậy, ta được $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

 **Chú ý:** 1. Với yêu cầu "Xác định các giá trị của tham số để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $(a; b)$ ", ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định $F'(x)$ trên $(a; b)$.

Bước 2: Để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $(a; b)$, điều kiện là:

$$F'(x) = f(x) \text{ với } \forall x \in (a; b) \Rightarrow \text{giá trị của tham số.}$$

2. Nếu thay $(a; b)$ bằng $[a; b]$ thì phải thực hiện chi tiết hơn, như sau:

Bước 1: Xác định $F'(x)$ trên $(a; b)$.

Xác định $F'(a^+)$ và $F'(b^-)$.

Bước 2: Để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $(a; b)$, điều kiện là:

$$\begin{cases} F'(x) = f(x), \forall x \in (a; b) \\ F'(a^+) = f(a) \\ F'(b^-) = f(b) \end{cases} \Rightarrow \text{Giá trị của tham số.}$$

Ví dụ 4: Xác định a, b để hàm số:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

là một nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 1 \\ 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases} \text{ trên } \mathbb{R}.$$

 *Giải*

Để tính đạo hàm của hàm số $F(x)$ ta đi xét hai trường hợp:

a. Với $x \neq 1$, ta có:

$$F'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}.$$

b. Với $x = 1$: để hàm số $F(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$, trước hết $F(x)$ phải liên tục tại $x = 1$, do đó:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a. \quad (1)$$

Đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 1$, ta đi xác định:

▪ Đạo hàm bên trái của hàm số $y = F(x)$ tại điểm $x = 1$.

$$F'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

▪ Đạo hàm bên phải của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 = 0$.

$$F'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + 1 - a - 1}{x - 1} = a.$$

Hàm số $y = F(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$ điều kiện là:

$$F'(1^-) = F'(1^+) \Leftrightarrow a = 2. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $b = -1$.

Khi đó: $F'(1) = 2 = f(1)$

Vậy, với $a = 2$, $b = -1$ thì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Vấn đề 2: TÌM NGUYÊN HÀM SỬ DỤNG BẢNG NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP VÀ CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

Sử dụng:

- Bảng các nguyên hàm.
- Các tính chất của nguyên hàm.
- Các phép biến đổi đại số.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. (Bài 1.d/tr 141 – Sgk): $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$. b. $f(x) = (2x + 3)^{2009}$.

 *Giải*

a. Ta có:

$$\int f(x) dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C.$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int (2x+3)^{2009} dx = \frac{1}{2} \int (2x+3)^{2009} d(2x+3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+3)^{2009+1}}{2009+1} + C = \frac{(2x+3)^{2010}}{4020} + C.\end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

- Ở câu a) chúng ta chỉ việc sử dụng công thức sẵn trong bảng nguyên hàm là chỉ ra được nguyên hàm của hàm số.
- Ở câu b) các em học sinh có thể hiểu theo cách thay x bằng u thì:

$$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. (Bài 1.e/tr 141 – Sgk): $f(x) = 10^{2x}$.

b. $f(x) = \frac{1}{2x-1}$.

 **Giải**

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int 10^{2x} dx = \frac{1}{2} \int 10^{2x} d(2x) = \frac{10^{2x}}{2 \ln 10} + C.$$

b. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C.$$

 **Chú ý:** Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa việc tìm nguyên hàm dựa trên các tính chất cùng với bảng nguyên hàm.

Ví dụ 3: (Bài 1.a, 1.b và 1.c/tr 141 – Sgk): Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = 3x^2 + \frac{x}{2}$.

b. $f(x) = 2x^3 - 5x + 7$.

c. $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$.

 **Giải**

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \left(3x^2 + \frac{x}{2} \right) dx = 3 \int x^2 dx + \frac{1}{2} \int x dx = x^3 + \frac{x^2}{4} + C.$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int (2x^3 - 5x + 7)dx = 2\int x^3dx - 5\int xdx + 7\int dx \\ &= \frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C.\end{aligned}$$

c. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C.$$

 **Chú ý:** Ở câu c) chúng ta đã bỏ qua việc tách nguyên hàm ban đầu thành các nguyên hàm nhỏ và điều này sẽ được áp dụng ở các ví dụ tiếp theo.

Ví dụ 4: (Bài 2.a, 2.b/tr 141 – Sgk): *Tìm:*

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx. & \text{b. } \int \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x^2} dx. \end{array}$$

 **Giải**

a. Ta có:

$$\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx = \int (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}) dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C.$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned}\int \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x^2} dx &= \int \frac{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C \\ &= 2x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.\end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

- Ở câu a) chúng ta biến đổi các toán tử chứa căn về dạng x^α để từ đó xác định được nguyên hàm cho chúng.
- Ở câu b) chúng ta thực hiện thêm động tác tách biểu thức ban đầu thành các toán tử nhỏ mà có thể xác định được nguyên hàm của chúng dựa vào bảng nguyên hàm.

Ví dụ 5: (Bài 2.c, 2.d/tr 141 – Sgk): *Tìm:*

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx. & \text{b. } \int 4 \sin^2 x dx. \end{array}$$

 *Giải*

a. Ta có:

$$\int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 4x}{4} \right) + C.$$

b. Ta có:

$$\int 4 \sin^2 x dx = 2 \int (1 - \cos 2x) dx = 2 \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + C = 2x - \sin 2x + C.$$

 **Nhận xét:** Qua ví dụ trên, chúng ta bắt đầu làm quen với việc tìm nguyên hàm của hàm số lượng giác cụ thể:

- Ở câu a) chúng ta thực hiện tách biểu thức ban đầu thành các toán tử nhỏ mà có thể xác định được nguyên hàm của chúng dựa vào bảng nguyên hàm.
- Ở câu b) chúng ta cần sử dụng công thức hạ bậc để chuyển biểu thức ban đầu về dạng bậc nhất.

Ví dụ 6: Tìm:

a. $\int \cot^2 x \cdot dx$.

b. $\int \tan x \cdot dx$.

c. $\int \frac{\tan x}{\cos^3 x} dx$.

 *Giải*

a. Ta có:

$$\int \cot^2 x \cdot dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\cot x - x + C.$$

b. Ta có:

$$\int \tan x \cdot dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

c. Ta có:

$$\int \frac{\tan x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x \cdot dx}{\cos^4 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^4 x} = +\frac{1}{3} \cos^{-3} x + C = +\frac{1}{3 \cos^3 x} + C.$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

- Ở câu a) chúng ta không sử dụng công thức hạ bậc mà tận dụng hằng đẳng thức $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ bởi $\frac{1}{\sin^2 x}$ thuộc nguyên hàm cơ bản.
- Ở câu b) chúng ta nhận thấy bản thân hàm $\tan x$ không có trong bảng nguyên hàm, xong ta đã sử dụng phép biến đổi thông thường $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ để xuất hiện dạng $\frac{u'}{u}$.

- Ở câu c) là mở rộng tự nhiên kết quả của câu b).

Các phương pháp để tìm nguyên hàm cho các hàm số lượng giác chúng ta sẽ được thấy cụ thể trong chủ đề 2.

Ví dụ 7: Tìm:

a. $\int e^x(1 + e^{-x})dx$.

b. $\int \sqrt{e^x + e^{-x} + 2}dx$.

 *Giải*

a. Ta có:

$$\int e^x(1 + e^{-x})dx = \int (e^x + 1)dx = e^x + x + C.$$

b. Ta có:

$$\int \sqrt{e^x + e^{-x} + 2}dx = \int \sqrt{(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^2}dx = \int (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})dx = 2(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) + C.$$

 **Nhận xét:** Qua ví dụ trên khẳng định thêm tầm quan trọng của hàm e^x bởi tính bất biến của nó đối với phép toán vi phân.

- Ở câu a) bằng phép khai triển biểu thức dưới dấu tích phân ta nhận được các toán tử có nguyên hàm trong bảng.
- Ở câu b) ta khử căn thức bằng việc biến đổi nó về dạng:

$$\sqrt{A^2} = A \text{ vì } A > 0.$$

Ví dụ 8: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $\int \frac{xdx}{1-x^2}$.

b. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$.

 *Giải*

a. Ta có:

$$\int \frac{xdx}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \ln|1-x^2| + C.$$

b. Ta biến đổi:

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Từ đó, suy ra:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln|x-3| - \ln|x-1|) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C. \end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Qua ví dụ trên chúng ta bắt đầu làm quen với việc xác định nguyên hàm của các hàm hữu tỉ, cụ thể:

- Ở câu a) chúng ta đã sử dụng phép biến đổi để xuất hiện dạng $\frac{u'}{u}$.

- Ở câu b) chúng ta thực hiện phép tách đa thức:

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Chúng ta sẽ gặp phương pháp lại phương pháp phân tích này trong vấn đề 3 của đề này.

Đối với các hàm số hữu tỉ, chúng ta có hai mở rộng:

$$\int \frac{x dx}{x^2 \pm a} = \frac{1}{2} \ln|x^2 \pm a| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \text{ với } a \neq 0.$$

Các phương pháp để tính nguyên hàm cho các hàm số hữu tỉ chúng ta sẽ được thấy cụ thể trong chủ đề 2.

Để tăng độ khó người ta thay yêu cầu tìm họ nguyên hàm của hàm số thành việc tìm một nguyên hàm trong họ đó thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Ví dụ 9: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số:

- a. $f(x) = \cos x$, biết $F(0) = 0$. b. $f(x) = 2x + 1$, biết và $F(2) = 2$.

 **Giải**

- a. Với hàm số $f(x) = \cos x$ thì $F(x) = \sin x + C$.

Khi đó, để $F(0) = 0$ điều kiện là:

$$0 = \sin 0 + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \sin x.$$

- b. Với hàm số $f(x) = 2x + 1$ thì $F(x) = x^2 + x + C$.

Khi đó, để $F(2) = 2$ điều kiện là:

$$2 = 4 + 2 + C \Leftrightarrow C = -4 \Rightarrow F(x) = x^2 + x - 4.$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho dạng toán trên ta thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Tính nguyên hàm của hàm số.

Bước 2: Xác định C bằng việc sử dụng giả thiết còn lại.

Ví dụ 10: (ĐHQG HN Khối A – 1996): Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm

số $f(x) = 2\sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}$ sao cho đồ thị $F(x)$ cắt $f(x)$ tại một

điểm thuộc Oy.

 **Giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left(2 \sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5} \right) dx = \int \left(2 \sin 5x + x^{1/2} + \frac{3}{5} \right) dx \\ &= -\frac{2}{5} \cos 5x + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{3}{5} x + C. \end{aligned}$$

Khi đó đồ thị $F(x)$ cắt $f(x)$ tại một điểm thuộc Oy điều kiện là:

$$F(0) = f(0) \Leftrightarrow C = 1.$$

Vậy, nguyên hàm cần tìm là $F(x) = -\frac{2}{5} \cos 5x + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{3}{5} x + 1$.

 **Chú ý:** Có nhiều hàm số mà việc xác định nguyên hàm phụ thuộc vào khoảng đang xét trên miền xác định, để minh họa chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 11: Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}$.

 **Giải**

Từ điều kiện tồn tại của hàm số $f(x)$ là:

$$x(1+x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \end{cases}$$

ta đi xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $x > 0$, ta được:

$$\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{(\sqrt{x})^2 + 1}} = 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + C.$$

Trường hợp 2: Với $x < -1$, ta được:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-1-x}} = -2 \int \frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{-x}} = -2 \int \frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{(\sqrt{-x-1})^2 + 1}} \\ &= -2 \ln(\sqrt{-x-1} + \sqrt{-x}) + C. \end{aligned}$$

 **Chú ý:** Để tìm nguyên hàm của hàm số dạng $[f(x) + f'(x)]e^x$ ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét hàm số $F(x) = f(x)e^x$, nhận xét rằng:

$$F'(x) = f'(x)e^x + f(x) \cdot e^x = [f(x) + f'(x)]e^x.$$

Bước 2: Vậy $F(x) = f(x)e^x + C$ là họ nguyên hàm của hàm số đã cho. Phương pháp trên cũng được áp dụng cho các hàm số dạng:

1. Hàm số $[f'(x) - f(x)]e^x$ có họ nguyên hàm là $F(x) = f(x)e^x$.
2. Hàm số $[f'(x) + af(x)]e^{ax+b}$ có họ nguyên hàm là $F(x) = f(x)e^{ax+b}$.
3. Hàm số $[f'(x) + \alpha'(x)f(x)]e^{\alpha(x)}$ có họ nguyên hàm là $F(x) = f(x)e^{\alpha(x)}$.

Ví dụ 12: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^x$.

b. $f(x) = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}).e^{-x}$.

 **Giải**

a. Ta biến đổi $f(x)$ về dạng:

$$f(x) = [(2x + 1) + (x^2 + x + 1)]e^x = [(x^2 + x + 1)' + (x^2 + x + 1)]e^x.$$

Xét hàm số $F(x) = (x^2 + x + 1)e^x$, nhận xét rằng:

$$F'(x) = (2x + 1)e^x + (x^2 + x + 1)e^x = (x^2 + 3x + 2)e^x = f(x).$$

Vậy, ta được $F(x) = (x^2 + x + 1)e^x + C$ là họ nguyên hàm của hàm số đã cho.

b. Ta biến đổi $f(x)$ về dạng:

$$f(x) = (\cos x - \sin x)e^{-x} = [\cos x + (-1)\sin x]e^{-x}.$$

Xét hàm số $F(x) = \sin x e^{-x}$, nhận xét rằng:

$$F'(x) = \cos x .e^{-x} - \sin x .e^{-x} = (\cos x - \sin x)e^x = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}).e^{-x} = f(x).$$

Vậy, ta được $F(x) = \sin x .e^{-x} + C$ là họ nguyên hàm của hàm số đã cho.

Ví dụ 13: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{(x^2 + x + 1)e^x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

b. $f(x) = \frac{(x - 1)e^x}{x^2}$.

 **Giải**

a. Ta biến đổi $f(x)$ về dạng:

$$f(x) = \frac{[x + (x^2 + 1)]e^x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \sqrt{x^2 + 1} \right) e^x = [(\sqrt{x^2 + 1})' + \sqrt{x^2 + 1}]e^x.$$

Xét hàm số $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} .e^x$, nhận xét rằng:

$$F'(x) = \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} + \sqrt{x^2 + 1} \right) e^x = \frac{(x^2 + x + 1)e^x}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x).$$

Vậy, ta được $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} .e^x + C$ là họ nguyên hàm của hàm số đã cho.

b. Ta biến đổi $f(x)$ về dạng:

$$f(x) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) e^x = \left[\left(\frac{1}{x} \right)' + \frac{1}{x} \right] e^x.$$

Xét hàm số $F(x) = \frac{e^x}{x}$, nhận xét rằng:

$$F'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) e^x = \frac{(x - 1)e^x}{x^2} = f(x).$$

Vậy, ta được $F(x) = \frac{e^x}{x} + C$ là họ nguyên hàm của hàm số đã cho.

 **Chú ý:** Để tìm nguyên hàm của hàm số dạng $u'v + v'u$, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét hàm số $F(x) = uv$, nhận xét rằng:

$$F'(x) = u'v + v'u.$$

Bước 2: Vậy, ta được $F(x) = uv + C$ là họ nguyên hàm của hàm số đã cho.

Ví dụ 14: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$.

 **Giải**

Ta biến đổi $f(x)$ về dạng:

$$f(x) = \frac{2(4-x)-x}{2\sqrt{4-x}} = \sqrt{4-x} + \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}.x = (x)'. \sqrt{4-x} + (\sqrt{4-x})'.x.$$

Xét hàm số $F(x) = x\sqrt{4-x}$, nhận xét rằng:

$$F'(x) = x\sqrt{4-x} + \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}.x = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} = f(x).$$

Vậy, ta được $F(x) = x\sqrt{4-x} + C$ là họ nguyên hàm của hàm số đã cho.

Vấn đề 3: TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

Phương pháp phân tích thực chất là việc sử dụng các đồng nhất thức để biến đổi hàm số ban đầu (hoặc gọi là hàm số dưới dấu tích phân) thành tổng các nhân tử mà nguyên hàm của mỗi nhân tử đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm hoặc chỉ bằng các phép biến đổi đơn giản đã biết.

Để tìm nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ bằng phương pháp phân tích, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi $f(x)$ về dạng:

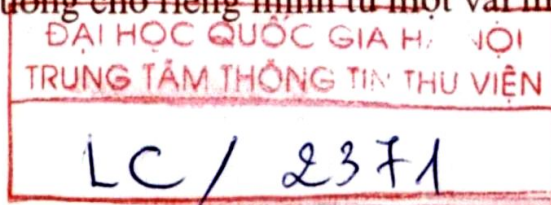
$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x),$$

với $f_i(x)$ có nguyên hàm trong bảng công thức và α_i là các hằng số.

Bước 2: Khi đó:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int f_i(x)dx$$

 **Chú ý quan trọng:** Điểm mấu chốt là phép phân tích trong bước 1, các em học sinh có thể rút ra ý tưởng cho riêng mình từ một vài minh họa sau:



- Với $f(x) = (x^3 - 2)^2$ thì bằng việc sử dụng hằng đẳng thức ta viết lại:

$$f(x) = x^6 - 4x^3 + 4.$$

- Với $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ thì bằng phép chia đa thức ta viết lại:

$$f(x) = x - 3 + \frac{2}{x - 1}.$$

- Với $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ thì bằng phép phân tích đa thức thành nhân tử ta viết lại:

$$f(x) = \frac{1}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{(x - 2) - (x - 3)}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2}.$$

- Với $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}$ thì bằng sử dụng phương pháp nhân liên hợp ta viết lại:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}}{(x + 1) - (x - 1)} = \frac{1}{2} (\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}).$$

- Với $f(x) = \cos 3x \cdot \sin x$ thì bằng việc sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng ta viết lại:

$$f(x) = \frac{1}{2} (\sin 4x - \sin x).$$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

- a. $f(x) = (x - 1)(x - 2).$ c. $f(x) = x(1 - x)^{2002}.$
 b. $f(x) = (x - 1)^{2008}(x - 2).$

 **Giải**

a. Ta có thể lựa chọn hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$F(x) = \int (x - 1)(x - 2) dx = \int (x^2 - 3x + 2) dx = \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2x + C.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (x - 1)(x - 2) dx = \int (x - 1)[(x - 1) - 1] dx = \int [(x - 1)^2 - (x - 1)] dx \\ &= \int [(x - 1)^2 - (x - 1)] d(x - 1) = \frac{1}{3} (x - 1)^3 - \frac{1}{2} (x - 1)^2 + C. \end{aligned}$$

b. Sử dụng đồng nhất thức: $x - 2 = (x - 1) - 1$
 ta được:

$$f(x) = (x - 1)^{2008} [(x - 1) - 1] = (x - 1)^{2009} - (x - 1)^{2008}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int [(x - 1)^{2009} - (x - 1)^{2008}] dx = \int [(x - 1)^{2009} - (x - 1)^{2008}] d(x - 1) \\ &= \frac{(x - 1)^{2010}}{2010} - \frac{(x - 1)^{2009}}{2009} + C. \end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Qua ví dụ trên chúng ta bắt đầu làm quen với việc xác định nguyên hàm của các hàm đa thức bằng phương pháp phân tích, cụ thể:

1. Ở câu a) chúng ta nhận thấy:
 - Cách 1 sử dụng phương pháp nhân đa thức để biến đổi tích thành tổng các nhân tử mà nguyên hàm của mỗi nhân tử đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm.
 - Cách 2 sử dụng đồng nhất thức $x - 2 = (x - 1) - 1$ để biến đổi nguyên hàm về dạng tổng của các $\int u^\alpha du$. Tuy nhiên, các em học sinh sẽ thấy ngay rằng cách giải này được trình bày chỉ mang tính minh họa bởi nó phức tạp hơn nhiều so với cách 1.
2. Ở câu b) chúng ta sử dụng ý tưởng đã trình bày trong cách 2 câu a) và dễ thấy đó là lời giải tốt.
3. Ở câu c) chúng ta có thể tổng quát với nguyên hàm:

$$I = \int x(ax + b)^\alpha dx, \text{ với } a \neq 0.$$

$$\text{Sử dụng đồng nhất thức: } x = \frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} [(ax + b) - b]$$

ta được:

$$\begin{aligned} x(ax + b)^\alpha &= \frac{1}{a} [(ax + b) - b](ax + b)^\alpha \\ &= \frac{1}{a} [(ax + b)^{\alpha+1} - b \cdot (ax + b)^\alpha]. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} [\int (ax + b)^{\alpha+1} dx - \int b \cdot (ax + b)^\alpha dx] \\ &= \frac{1}{a^2} [\int (ax + b)^{\alpha+1} d(ax + b) - \int b \cdot (ax + b)^\alpha d(ax + b)] \end{aligned}$$

Ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\alpha = -2$, ta được:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a^2} [\int (ax + b)^{-1} d(ax + b) - \int b \cdot (ax + b)^{-2} d(ax + b)] \\ &= \frac{1}{a^2} [\ln|ax + b| + \frac{1 \cdot b}{ax + b}] + C. \end{aligned}$$

Trường hợp 2: Với $\alpha = -1$, ta được:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a^2} [\int d(ax + b) - \int b \cdot (ax + b)^{-1} d(ax + b)] \\ &= \frac{1}{a^2} [ax + b - b \cdot \ln|ax + b|] + C. \end{aligned}$$

Trường hợp 3: Với $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$, ta được:

$$I = \frac{1}{a^2} \left[\frac{(ax+b)^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{b(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right] + C.$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x}{2x+1}.$

b. $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+1}.$

 **Giải**

a. Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{x dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \frac{dx}{2x+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\int dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} \right] = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \ln|2x+1| + C. \end{aligned}$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{x dx}{x^2+2x+1} = \int \frac{[(x+1)-1]dx}{(x+1)^2} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}.$

b. $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}.$

 **Giải**

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{(x^2-x+1)dx}{x} = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 - x + \ln|x| + C.$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \ln|x+1| - \ln|x+2| + C = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C. \end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Qua ví dụ trên:

- Ở câu a) chúng ta chỉ cần thực hiện phép chia đa thức là đã biến đổi phân thức hữu tỉ ban đầu thành tổng các nhân tử mà nguyên hàm của mỗi nhân tử đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm.

2. Ở câu b) chúng ta nhận thấy:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2 + 3x + 2} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x + 2A + B}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

Ta được đồng nhất thức:

$$1 = (A+B)x + 2A + B. \quad (1)$$

Để xác định A, B trong (1) ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Phương pháp đồng nhất hệ số): Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}.$$

Cách 2: (Phương pháp trị số riêng): Lần lượt thay $x = -1$, $x = -2$ vào hai vế của (1) ta được $A = 1$ và $B = -1$. Tức là:

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Ví dụ 4: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = x\sqrt{2x+1}.$

b. $f(x) = x(\sqrt{x+1} + \sqrt[5]{1-x}).$

 **Giải**

a. Ta có:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int x\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2} \int [(2x+1)-1](2x+1)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left[(2x+1)^{\frac{3}{2}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}} \right] dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5}(2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} \right] + C\end{aligned}$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int x(\sqrt{x+1} + \sqrt[5]{1-x})dx = \int x\sqrt{x+1}dx + \int x\sqrt[5]{1-x}dx \\ &= \int [(x+1)-1](x+1)^{\frac{1}{2}} dx + \int [1-(1-x)](1-x)^{\frac{1}{5}} dx \\ &= \int \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}} \right] d(x+1) - \int \left[(1-x)^{\frac{1}{5}} - (1-x)^{\frac{6}{5}} \right] d(1-x) \\ &= \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{6}(1-x)^{\frac{6}{5}} + \frac{5}{11}(1-x)^{\frac{11}{5}} + C.\end{aligned}$$

Ví dụ 5: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}}.$

b. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1-x}}.$

 **Giải**

a. Ta có:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}} = \int \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})dx}{x+3-x-1} \\ &= \frac{1}{2} \int \left[(x+3)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}} \right] dx = \frac{1}{3} \left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}} \right] + C.\end{aligned}$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1} - x} = \int \frac{x(\sqrt{x^2+1} + x)dx}{x^2+1-x^2} = \int x\sqrt{x^2+1}dx + \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{\frac{1}{2}} d(x^2+1) + \int x^2 dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C.\end{aligned}$$



Nhận xét: Để tìm nguyên hàm của các hàm số ở ví dụ trên chúng ta đều sử dụng phép nhân liên hợp bậc hai, cụ thể:

$\sqrt{A} + \sqrt{B}$ có liên hợp là $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ và ngược lại.

Tuy nhiên:

1. Ở câu a) sau phép lấy liên hợp chúng ta nhận được ngay tổng các nhân tử mà nguyên hàm của mỗi nhân tử đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm.
2. Ở câu b) chúng ta cần thực hiện thêm việc tách hàm số nhận được thành hai hàm số nhỏ bởi cần tới hai dạng $\int x^\alpha dx$ và $\int u^\alpha du$.

Ví dụ 6: Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

 **Giải**

Ta có:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})dx}{\left[\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{(x-1)^2} \right] (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})} \\ &= \frac{1}{2} \int \left[(x+1)^{\frac{1}{3}} - (x-1)^{\frac{1}{3}} \right] dx = \frac{3}{8} \left[(x+1)^{\frac{4}{3}} - (x-1)^{\frac{4}{3}} \right] + C.\end{aligned}$$



Nhận xét: Để tìm nguyên hàm của hàm số ở ví dụ trên chúng ta sử dụng phép nhân liên hợp bậc ba, cụ thể:

$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ có liên hợp là $\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$ và ngược lại.

$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$ có liên hợp là $\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$ và ngược lại.

Ví dụ 7: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \cos 2x \cdot \cos x$.

b. (ĐHLN - 1997): $f(x) = \cos^3 x$.

 **Giải**

a. Ta có:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int (\cos 3x + \cos x) dx = \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{2} \sin x + C.$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \cos^3 x dx = \frac{1}{4} \int (\cos 3x + 3 \cos x) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \sin 3x + 3 \sin x \right) + C \\ &= \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x + C. \end{aligned}$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int \cos x dx - \int \sin^2 x d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C. \end{aligned}$$



Nhận xét: Như vậy, để tìm nguyên hàm cho các hàm số lượng giác trên chúng ta sử dụng *phương pháp phân tích*, cụ thể:

1. Ở câu a) chúng ta sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng. Các em học sinh hãy nhớ lại:

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

2. Ở cách 1 câu b) chúng ta sử dụng công thức hạ bậc để nhận được một đa thức gồm các hàm số lượng giác bậc nhất và việc xác định nguyên hàm của nó không phải khó khăn. Các em học sinh hãy nhớ lại:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{và} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

$$\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \quad \text{và} \quad \cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}.$$

Ví dụ 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^3 x$.

 *Giải*

Sử dụng đồng nhất thức:

$$\tan^3 x = \tan^2 x \cdot \tan x = \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \tan x = \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Ta được:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \tan x d(\tan x) + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C. \end{aligned}$$

 **Tổng quát:** Đặt $I_n = \int \tan^n x dx$, với $n \geq 2$, để tính I_n sử dụng đồng nhất thức:

$$\tan^n x = \tan^2 x \cdot \tan^{n-2} x = \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \tan^{n-2} x = \tan^{n-2} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^{n-2} x.$$

Khi đó:

$$I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx \Leftrightarrow I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}.$$

Đó là công thức truy hồi mà chúng ta sẽ còn gặp lại trong phần tích phân truy hồi.

Ví dụ 9: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$.

 *Giải*

Sử dụng kết quả:

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x)$$

Ta được:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) d(\tan x) \\ &= \int d(\tan x) + \int \tan^2 x d(\tan x) = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 10: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

 *Giải*

Sử dụng đồng nhất thức

$$1 = (1 + e^x) - e^x$$

Ta được:

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{(1+e^x) - e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Suy ra:

$$\int f(x)dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \int dx - \int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} = x - \ln|1+e^x| + C.$$

Vấn đề 4: TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG NGUYÊN HÀM PHỤ

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm kiếm hàm số $g(x)$.

Bước 2: Xác định các nguyên hàm của các hàm số $f(x) \pm g(x)$, tức là:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = A(x) + C_1 \\ F(x) - G(x) = B(x) + C_2 \end{cases} \quad (I)$$

Bước 3: Từ hệ (I), ta nhận được:

$$F(x) = \frac{1}{2} [A(x) + B(x)] + C$$

là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}.$

b. $f(x) = \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$

 **Giải**

a. Chọn hàm số phụ:

$$g(x) = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}.$$

Gọi $F(x)$ và $G(x)$ theo thứ tự là nguyên hàm của các hàm số $f(x)$, $g(x)$. Ta có:

$$f(x) + g(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$\Rightarrow F(x) + G(x) = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sin x - \cos x} = \ln|\sin x - \cos x| + C_1.$$

$$f(x) - g(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x} = 1 \Rightarrow F(x) - G(x) = \int dx = x + C_2.$$

Ta được:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \ln|\sin x - \cos x| + C_1 \\ F(x) - G(x) = x + C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} (\ln|\sin x - \cos x| + x) + C.$$

b. Chọn hàm số phụ:

$$g(x) = \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

Gọi $F(x)$ và $G(x)$ theo thứ tự là nguyên hàm của các hàm số $f(x)$, $g(x)$. Ta có:

$$f(x) + g(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 1 \Rightarrow F(x) + G(x) = \int dx = x + C_1.$$

$$f(x) - g(x) = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{\cos 2x}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x) - G(x) &= \int \frac{2 \cos 2x}{2 - \sin^2 2x} dx = - \int \frac{d(\sin 2x)}{\sin^2 2x - 2} \\ &= - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sin 2x - \sqrt{2}}{\sin 2x + \sqrt{2}} \right| + C_2. \end{aligned}$$

Ta được:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = x + C_1 \\ F(x) - G(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} + C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right) + C.$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin^2 x \cdot \sin 2x$.

 *Giải*

Chọn hàm số phụ:

$$g(x) = 2\cos^2 x \cdot \sin 2x.$$

Gọi $F(x)$ và $G(x)$ theo thứ tự là nguyên hàm của các hàm số $f(x)$, $g(x)$. Ta có:

$$f(x) + g(x) = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot \sin 2x = 2\sin 2x$$

$$\Rightarrow F(x) + G(x) = 2 \int \sin 2x dx = -\cos 2x + C_1.$$

$$f(x) - g(x) = 2(\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot \sin 2x = -2\cos 2x \cdot \sin 2x = -\sin 4x$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = - \int \sin 4x \cdot dx = \frac{1}{4} \cos 4x + C_2.$$

Ta được:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = -\cos 2x + C_1 \\ F(x) - G(x) = \frac{1}{4} \cos 4x + C_2 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} (-\cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x) + C.$$

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^x}{e^x - e^{-x}}$.

 *Giải*

Chọn hàm số phụ:

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Gọi $F(x)$ và $G(x)$ theo thứ tự là nguyên hàm của các hàm số $f(x)$, $g(x)$. Ta có:

$$f(x) + g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\Rightarrow F(x) + G(x) = \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{d(e^x - e^{-x})}{e^x - e^{-x}} = \ln|e^x - e^{-x}| + C_1.$$

$$f(x) - g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1 \Rightarrow F(x) - G(x) = \int dx = x + C_2.$$

Ta được:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \ln|e^x - e^{-x}| + C_1 \\ F(x) - G(x) = x + C_2 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}(\ln|e^x - e^{-x}| + x) + C.$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Tìm hàm số $y = f(x)$, biết $dy = 12x(3x^2 - 1)^3 dx$ và $f(1) = 3$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng hàm số $F(x) = \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}$ là một nguyên hàm

của hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{2}(x^2 - 1)}{x^4 + 1}$ trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 3:

a. Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

b. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$.

Bài tập 4:

a. Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = \ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^2 + a}}{x} \right|$, với $x \neq 0$, $a > 0$.

b. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{a}{x\sqrt{x^2 + a}}$, với $x \neq 0$, $a > 0$.

Bài tập 5:

a. Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = x\sqrt{x^2 + a}$, $a \neq 0$.

b. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + a}$, $a \neq 0$.

c. Tìm nguyên hàm của hàm số $h(x) = (x + 2)\sqrt{x^2 + a}$, $a \neq 0$.

Bài tập 6: Chứng minh rằng hàm số:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

là một nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad \text{trên } \mathbb{R}.$$

Bài tập 7: Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \frac{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x}{c \cdot \sin x + d \cdot \cos x}$, với $c^2 + d^2 > 0$ có họ nguyên hàm là $F(x) = Ax + B \ln |c \cdot \sin x + d \cdot \cos x| + C$.

Áp dụng: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3} \sin x + \cos x}.$

c. $f(x) = \frac{\cos x \cdot \sin x}{\sin x + \cos x}.$

b. $f(x) = \frac{4 \sin x + 3 \cos x}{\sin x + 2 \cos x}.$

d. $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x}.$

Bài tập 8: Tính:

a. $\int \left[x^2 + \frac{3}{x} + e^{3x+1} \right] dx.$

b. $\int \left(\sin 2x + \cos 3x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx.$

Bài tập 9: Tính:

a. $\int (2x + 3)^3 dx.$

c. $\int \cos^4 x \cdot \sin x dx.$

b. $\int \frac{2e^x}{e^x + 1} dx.$

d. $\int \frac{(2 \ln x + 1)^2}{x} dx.$

Bài tập 10: Tính:

a. $\int (x^2 - 3x + \frac{1}{x}) dx.$

c. $\int \frac{x-1}{x^2} dx.$

b. $\int \frac{2x^4 + 3}{x^2} dx.$

d. $\int \frac{(x^4 + 4)^2}{x^2} dx.$

Bài tập 11: Tính:

a. $\int (\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}) dx.$

d. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} dx.$

b. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x} dx.$

e. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[4]{\sin x - \cos x}} dx.$

c. $\int \tan^2 x \cdot dx.$

Bài tập 12: Tính:

a. $\int e^x (1 - e^{-x}) dx.$

b. $\int \sqrt{e^x + e^{-x} - 2} dx.$

Bài tập 13: Tính:

a. $\int \frac{x}{1+x^2} dx.$

b. $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx.$

Bài tập 14: Tính:

a. $\int \frac{dx}{3x^2 - 4}.$

b. $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx.$

Bài tập 15: Tính:

a. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}.$

b. $\int \frac{dx}{\sin x}.$

Bài tập 16: Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng $f(x) = 8\sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ và $f(0) = 8$.

Bài tập 17: Xác định a, b, c để hàm số $F(x) = (a + 1)\sin x + \frac{b}{2}\sin 2x + \frac{c}{3}\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 18: Xác định a, b, c để hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$.

Bài tập 19: Xác định a, b để hàm số:

$$F(x) = \begin{cases} (x + a)e^{-bx} & \text{khi } x < 0 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$$

là một nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{2\sqrt{e^x}} & \text{khi } x < 0 \\ 2x + \frac{1}{2} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{trên } \mathbb{R}.$$

Bài tập 20: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = (2x - 1)(x + 2).$

c. $f(x) = (2x - 1)^{108}(x - 2).$

b. $f(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 5).$

d. $f(x) = x(x + 1)^{2009}.$

Bài tập 21: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x}{x+1}.$

c. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4x + 4}.$

b. $f(x) = \frac{x}{3x-1}.$

d. $f(x) = \frac{x}{9x^2 + 6x + 1}.$

Bài tập 22: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = x\sqrt{x-2}.$

c. $f(x) = x(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}).$

b. $f(x) = x\sqrt[3]{1+x}.$

d. $f(x) = x(\sqrt{1-2x} + \sqrt[4]{x+1}).$

Bài tập 23: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x^2 + x}{x}.$

b. $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 2}{x + 2}.$

Bài tập 24: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$

b. $f(x) = \frac{3x-2}{2x^2 - 3x + 1}.$

Bài tập 25: (ĐHQG HN Khối D - 95): Cho hàm số $y = \frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2}$

a. Xác định các hằng số a, b, c để: $y = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$.

b. Tìm họ nguyên hàm của y .

Bài tập 26: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}$.

c. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$.

b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}}$.

d. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2} - x}$.

Bài tập 27: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{x^2-4} + \sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Bài tập 28: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \sin 2x \cdot \sin 6x$.

c. $f(x) = \cos x \cdot \sin 3x$.

b. $f(x) = \cos x \cdot \cos 3x$.

d. $f(x) = \sin 5x \cdot \cos 3x$.

Bài tập 29: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 4x$.

b. $f(x) = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$.

Bài tập 30: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \sin^3 x$.

c. $f(x) = \sin^5 x$.

b. $f(x) = \cos^4 x$.

d. $f(x) = \cot^3 x$.

Bài tập 31: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \sin^3 2x + 2\cos^2 x$.

b. $f(x) = \cos^3 x + 2\sin^2 x$.

Bài tập 32: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$.

d. $f(x) = \cos^6 x - \sin^6 x$.

b. $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$.

e. $f(x) = \cos^8 x - \sin^8 x$.

c. $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$.

f. $f(x) = \cos^8 x + \sin^8 x$.

Bài tập 33: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $\frac{\cos^3 x}{\sin x}$.

b. $\frac{1}{\sin x \cdot \cos^2 x}$.

Bài tập 34: Cho hàm số $y = \frac{4\sin x + 3\cos x}{\sin x + 2\cos x}$.

a. Xác định các hằng số a, b để:

$$4\sin x + 3\cos x = a(\sin x + 2\cos x) + b(\cos x - 2\sin x).$$

b. Tìm họ nguyên hàm của y .

Bài tập 35: Tìm nguyên hàm của các hàm số:

a. $f(x) = \frac{\sinh x}{\sin x + \cos x}$.

c. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$.

b. $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 2x$.

CHỦ ĐỀ 2 MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là định lý sau:

Định lý 1: Giả sử $u = u(x)$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên I sao cho hàm số hợp $f[u(x)]$ xác định trên I . Khi đó, ta có:

$$\int f[u(x)].u'(x)dx = F[u(x)] + C. \quad (1)$$

ở đó $F(u)$ là một nguyên hàm của $f(u)$.

Nhận xét rằng:

$$u = u(x) \Rightarrow du = u'(x)dx \text{ và } f[u(x)].u'(x)dx = f(u)du$$

do đó, công thức (1) được viết gọn dưới dạng:

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Để tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ bằng phương pháp đổi biến ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn $u = u(x)$, trong đó $u(x)$ là hàm số mà ta chọn cho thích hợp, rồi xác định $x = \varphi(u)$ (nếu có thể).

Bước 2: Xác định vi phân $dx = \varphi'(u)du$.

Bước 3: Biểu thị $f(x)dx$ theo u và du . Giả sử rằng $f(x)dx = g(u)du$.

Bước 4: Khi đó:

$$\int f(x)dx = \int g(u)du.$$

 **Lưu ý:** Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	Có thể chọn
Hàm có mẫu số	u là mẫu số
Hàm $f(x, \sqrt{\varphi(x)})$	$u = \varphi(x)$ hoặc $u = \sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	- Với $x+a > 0$ và $x+b > 0$, đặt: $u = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ - Với $x+a < 0$ và $x+b < 0$, đặt: $u = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}$
Hàm $f(x) = \frac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x + e}$	$u = \tan \frac{x}{2}$ (với $\cos \frac{x}{2} \neq 0$)

2. PHƯƠNG PHÁP LẤY NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Cơ sở của phương pháp là định lý sau:

Định lý 2: Nếu $u(x)$, $v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên I thì:

$$\int u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = u(x)v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) \cdot dx$$

$$\text{hoặc viết } \int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du.$$

Để tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi:

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) \cdot f_2(x) dx.$$

Bước 2: Đặt:

$$\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}.$$

Bước 3: Khi đó:

$$\int f(x) dx = uv - \int v du.$$

 **Lưu ý:** Khi sử dụng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần để tìm nguyên hàm chúng ta cần tuân thủ các nguyên tắc sau:

- Lựa chọn phép đặt dv sao cho v được xác định một cách dễ dàng.
- Tích phân bất định $\int v du$ được xác định một cách dễ dàng hơn so với tích phân ban đầu.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

Sử dụng kiến thức trong phần phương pháp đổi biến.

Ví dụ 1: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+3}.$

b. (Bài 41.d/tr 175 – Sgk): $f(x) = \frac{\sin(2x+1)}{\cos^2(2x+1)}.$

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = x^2 + 4x + 3$, suy ra:

$$du = (2x + 4)dx = 2(x + 2)dx \Leftrightarrow (x + 2)dx = \frac{1}{2} du.$$

Từ đó:

$$\int \frac{(x+2)dx}{x^2+4x+3} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2+4x+3| + C.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int \frac{(x+2)dx}{x^2+4x+3} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4x+3)}{x^2+4x+3} = \frac{1}{2} \ln|x^2+4x+3| + C.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \cos(2x+1)$, suy ra:

$$du = -2\sin(2x+1)dx \Leftrightarrow \sin(2x+1)dx = -\frac{1}{2}du.$$

Từ đó:

$$\int \frac{\sin(2x+1)dx}{\cos^2(2x+1)} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2u} + C = \frac{1}{2\cos(2x+1)} + C.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int \frac{\sin(2x+1)dx}{\cos^2(2x+1)} = -\frac{1}{2} \int \frac{d[\cos(2x+1)]}{\cos^2(2x+1)} = \frac{1}{2\cos(2x+1)} + C.$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

1. Ở câu a) chúng ta nhận thấy:
 - Cách 1 được đề xuất dựa trên dấu hiệu thứ nhất trong bảng dấu hiệu.
 - Cách 2 chúng ta trình bày dựa trên nhận xét ở sau ví dụ 1/vấn đề 2 của chủ đề 1.
2. Ở câu b) chúng ta nhận thấy:
 - Cách 1 không lựa chọn việc đặt $t = \cos$ bởi nó có dạng u^2 nên $(u^2)' = 2u \cdot u'$ không phù hợp với TS. Lời giải này được đề xuất dựa trên nhận xét đạo hàm của $\cos$ thì bằng $\sin$.
 - Cách 2 chúng ta trình bày dựa trên nhận xét ở sau ví dụ 1/vấn đề 2 của chủ đề 1.

Ví dụ 2: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. (ĐHQG HN Khối A – 98): $f(x) = x(1-x)^{20}.$

b. (CĐKS Phía Bắc – 2000): $f(x) = \frac{x^3}{x^8-2}.$

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1 Đặt $t = 1-x$, suy ra $dt = -dx$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \int x(1-x)^{20}dx &= -\int (1-t)t^{20}dt = -\int (t^{20} - t^{21})dt \\ &= \frac{t^{22}}{22} - \frac{t^{21}}{21} + C = \frac{(1-x)^{22}}{22} - \frac{(1-x)^{21}}{21} + C. \end{aligned}$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\begin{aligned}\int x(1-x)^{20} dx &= \int [1 - (1-x)](1-x)^{20} dx = -\int [(1-x)^{20} - (1-x)^{21}] d(1-x) \\ &= -\frac{(1-x)^{21}}{21} + \frac{(1-x)^{22}}{22} + C.\end{aligned}$$

b. Đặt $t = x^4$, suy ra $dt = 4x^3 dx$. Khi đó:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2} &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 - 2} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{t - \sqrt{2}} - \frac{1}{t + \sqrt{2}} \right) dt \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\ln|t - \sqrt{2}| - \ln|t + \sqrt{2}| \right) = \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right| + C.\end{aligned}$$

Ví dụ 3: (Bài 5.a và 5.c/tr 145 – Sgk): Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = x\sqrt[4]{1-x^2}$.

b. $f(x) = \frac{9x^2}{\sqrt{1-x^3}}$.

 Giải

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \sqrt[4]{1-x^2}$, suy ra:

$$u^4 = 1 - x^2 \Rightarrow 4u^3 du = -2x dx \Leftrightarrow x dx = -2u^3 du.$$

Từ đó:

$$\int x\sqrt[4]{1-x^2} dx = -2 \int u \cdot u^3 du = -2 \int u^4 du = -\frac{2}{5} u^5 + C = -\frac{2}{5} \sqrt[4]{(1-x^2)^5} + C.$$

Cách 2: Đặt $u = 1 - x^2$, suy ra $du = -2x dx$.

Từ đó:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt[4]{1-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int \sqrt[4]{u} du = -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{4}} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + C \\ &= -\frac{2}{5} u^{\frac{5}{4}} = -\frac{2}{5} \sqrt[4]{(1-x^2)^5} + C.\end{aligned}$$

Cách 3: Ta có:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt[4]{1-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{\frac{1}{4}} d(1-x^2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + C \\ &= -\frac{2}{5} \sqrt[4]{(1-x^2)^5} + C.\end{aligned}$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \sqrt{1-x^3}$, suy ra:

$$u^2 = 1 - x^3 \Rightarrow 2udu = -3x^2 dx \Leftrightarrow x^2 dx = -\frac{2udu}{3}.$$

Từ đó:

$$\int \frac{9x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}} = 9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \int \frac{udu}{u} = -6 \int du = -6u + C = -6\sqrt{1-x^3} + C.$$

Cách 2: Đặt $u = 1 - x^3$, suy ra $du = -3x^2 dx$.

Từ đó:

$$\int \frac{9x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}} = -3 \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -6 \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = -6\sqrt{u} + C = -6\sqrt{1-x^3} + C.$$

Cách 3: Ta có:

$$\begin{aligned} \int \frac{9x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}} &= -3 \int \frac{d(1-x^3)}{(1-x^3)^{\frac{1}{2}}} = -3 \int (1-x^3)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^3) \\ &= -3 \cdot \frac{(1-x^3)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -6(1-x^3)^{\frac{1}{2}} + C = -6\sqrt{1-x^3} + C. \end{aligned}$$

 **Chú ý:** Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

- Cách 1 và cách 2 được đề xuất dựa trên dấu hiệu thứ hai trong bảng dấu hiệu.
- Cách 3 được trình bày dựa trên ý tưởng đổi biến của cách 2.

Ví dụ 4: (Bài 5.b và 5.d/tr 145 – Sgk): Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x+4}}.$

b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \sqrt{5x+4}$, suy ra:

$$u^2 = 5x + 4 \Rightarrow 2udu = 5dx \Leftrightarrow dx = \frac{2udu}{5}.$$

Từ đó:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x+4}} = \frac{2}{5} \int \frac{udu}{u} = \frac{2}{5} \int du = \frac{2}{5} u + C = \frac{2}{5} \sqrt{5x+4} + C.$$

Cách 2: Đặt $u = 5x + 4$, suy ra $du = 5dx$. Từ đó:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x+4}} = \int \frac{du}{5\sqrt{u}} = \frac{2}{5} \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{2}{5} \sqrt{u} + C = \frac{2}{5} \sqrt{5x+4} + C.$$

Cách 3: Ta có:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x+4}} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x+4)}{(5x+4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{5} \int (5x+4)^{-\frac{1}{2}} d(5x+4) = \frac{2}{5} \sqrt{5x+4} + C.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \sqrt{x}$, suy ra $u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx$.

Từ đó:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = \int \frac{2udu}{u(1+u)^2} = 2 \int \frac{d(1+u)}{(1+u)^2} = -\frac{2}{1+u} + C = -\frac{2}{1+\sqrt{x}} + C.$$

Cách 2: Đặt $u = 1 + \sqrt{x}$, suy ra:

$$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du.$$

Từ đó:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = \int \frac{2du}{u^2} = 2 \int u^{-2} du = 2 \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{2}{u} + C = -\frac{2}{1+\sqrt{x}} + C.$$

Ví dụ 5: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. (Đề 71 – Bộ đề 1996): $f(x) = \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$

b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}.$

c. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}.$

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: (Sử dụng phương pháp đổi biến số): Đặt $t = x + \sqrt{x^2 - 1}$, suy ra:

$$t - x = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x = \frac{t^2 + 1}{2t} \Rightarrow dx = \frac{t^2 - 1}{2t^2} dt.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}} &= \int \frac{2 \cdot \frac{t^2 + 1}{2t} \cdot \frac{t^2 - 1}{2t^2} dt}{\frac{t^2 + 1}{2t}} = \int \frac{(t^4 - 1) dt}{2t^4} = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t^4} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{3t^3} \right) + C = \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 - 1}) + \frac{1}{6(x + \sqrt{x^2 - 1})^3} + C. \end{aligned}$$

Cách 2: (Sử dụng phương pháp biến đổi): Ta có:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx &= \int \frac{2x(x - \sqrt{x^2 - 1})}{x^2 - x^2 + 1} dx = \int 2x^2 dx - \int 2x\sqrt{x^2 - 1} dx \\ &= \frac{2}{3} x^3 - \int \sqrt{x^2 - 1} d(x^2 - 1) + C = \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 - 1)^3} + C \end{aligned}$$

b. Đặt $t = x + \sqrt{x^2 + a}$ suy ra:

$$dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} \right) dx = \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}} dx \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{dt}{t}.$$

Khi đó:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$$

c. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1.$$

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$, suy ra:

$$\begin{aligned} dt &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \right) dx = \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})dx}{2\sqrt{(x+1)(x+2)}} \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} &= \frac{2dt}{t} \\ \Leftrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} &= 2 \int \frac{dt}{t} = 2\ln|\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}| + C. \end{aligned}$$

Trường hợp 2: Với

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2.$$

Đặt $t = \sqrt{-(x+1)} + \sqrt{-(x+2)}$, suy ra:

$$\begin{aligned} dt &= \left[-\frac{1}{2\sqrt{-(x+1)}} - \frac{1}{2\sqrt{-(x+2)}} \right] dx = -\frac{[\sqrt{-(x+1)} + \sqrt{-(x+2)}]dx}{2\sqrt{(x+1)(x+2)}} \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} &= -\frac{2dt}{t} \\ \Leftrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} &= -2 \int \frac{dt}{t} = -2\ln|t| + C = -2\ln|\sqrt{-(x+1)} + \sqrt{-(x+2)}| + C. \end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

1. Ở câu a) chúng ta nhận thấy:

- Cách 1 được đề xuất dựa trên dấu hiệu thứ nhất trong bảng dấu hiệu.
- Cách 2 chúng ta trình bày dựa trên những kiến thức về phép trục căn thức của các hàm số vô tỉ.

2. Ở câu b) các em học sinh chỉ có thể nghĩ ra được cách đổi biến này khi đã thực hiện tốt các bài tập 2, bài tập 3 và bài tập 4 trong chủ đề 1.
3. Ở câu c) chúng ta trình bày theo đề xuất dựa trên dấu hiệu thứ ba trong bảng dấu hiệu.

Ví dụ 6: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. (Bài 41.c/tr 175 – Sgk): $y = x^{\frac{1}{2}} \sin(x^{\frac{3}{2}} + 1)$.

b. (Bài 8.b/tr 145 – Sgk): $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$.

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = x^{\frac{3}{2}} + 1$, suy ra $du = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} du$.

Từ đó:

$$\int x^{\frac{1}{2}} \sin(x^{\frac{3}{2}} + 1) dx = \frac{2}{3} \int \sin u \cdot du = -\frac{2}{3} \cos u + C = -\frac{2}{3} \cos(x^{\frac{3}{2}} + 1) + C.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int x^{\frac{1}{2}} \sin(x^{\frac{3}{2}} + 1) dx = \frac{2}{3} \int \sin(x^{\frac{3}{2}} + 1) d(x^{\frac{3}{2}} + 1) = -\frac{2}{3} \cos(x^{\frac{3}{2}} + 1) + C.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \cos \frac{1}{x}$, suy ra $du = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$.

Từ đó:

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \frac{1}{x} + C.$$

Cách 2: Đặt $u = \sin \frac{1}{x}$, suy ra

$$du = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = -du.$$

Từ đó:

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot dx = -\int u du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{1}{2} \cdot \sin^2 \frac{1}{x} + C.$$

Cách 3: Đặt $u = \frac{1}{x}$, suy ra:

$$du = -\frac{1}{x^2} dx \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} dx = -du.$$

Từ đó:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot dx &= -\int \sin u \cdot \cos u \cdot du = -\frac{1}{2} \int \sin 2u \cdot du \\ &= \frac{1}{4} \cos 2u + C = \frac{1}{4} \cos \frac{2}{x} + C.\end{aligned}$$

Cách 4: Đặt $u = \frac{1}{x}$, suy ra $du = -\frac{1}{x^2} dx \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} dx = -du$.

Từ đó:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot dx &= -\int \sin u \cdot \cos u \cdot du = -\int \sin u \cdot d(\sin u) \\ &= -\frac{1}{2} \sin^2 u + C = -\frac{1}{2} \cdot \sin^2 \frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

Cách 5: Đặt $u = \frac{1}{x}$, suy ra $du = -\frac{1}{x^2} dx \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} dx = -du$.

Từ đó:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot dx &= -\int \sin u \cdot \cos u \cdot du = \int \cos u \cdot d(\cos u) \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 u + C = \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

Cách 6: Ta có:

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{2}{x} \cdot dx = -\frac{1}{4} \int \sin \frac{2}{x} \cdot d\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{4} \cos \frac{2}{x} + C.$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

- Ở câu a) chúng ta nhận thấy:
 - Cách 1 được đề xuất dựa trên công thức trong bảng nguyên hàm, cụ thể:
$$\begin{aligned}\int \sin x \cdot dx &= -\cos x + C \\ \Leftrightarrow -\cos u + C &= \int \sin u \cdot du = \int u' \cdot \sin u \cdot dx\end{aligned}$$
Từ đó, ta lựa chọn ẩn phụ $t = u(x)$.
 - Cách 2 được trình bày dựa trên ý tưởng đổi biến của cách 1.
- Ở câu b), việc lựa chọn nguyên hàm này nhằm mục đích để các em học sinh hiểu rằng đối với các hàm số lượng giác có nhiều cách để lựa chọn phép đổi biến, và kết hợp với các phép biến đổi lượng giác khác nhau chúng ta sẽ nhận được những cách giải khác nhau.

Bốn ví dụ tiếp theo, được trình bày với mục đích xây dựng cho các em học sinh tư duy lựa chọn phép đổi biến thích hợp cho các hàm số lượng giác. Các em hãy trả lời câu hỏi "Vì sao người ta lựa chọn phép đổi biến như vậy?"

Ví dụ 7: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \sqrt{\cos x}$.

 **Giải**

Ta thực hiện phép biến đổi:

$$\int \sin^3 x \cdot \sqrt{\cos x} \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot \sqrt{\cos x} \cdot \sin x \cdot dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sqrt{\cos x} \cdot \sin x \cdot dx$$

Đặt $t = \sqrt{\cos x}$, suy ra:

$$t^2 = \cos x \Rightarrow 2t dt = -\sin x \cdot dx \Leftrightarrow -2t dt = \sin x \cdot dx.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \sqrt{\cos x} \cdot dx &= \int (1 - t^4) \cdot t \cdot (-2t dt) = 2 \int (t^6 - t^2) dt \\ &= 2 \left(\frac{1}{7} t^7 - \frac{1}{3} t^3 \right) + C = \frac{2}{21} (3t^6 - 7t^2) t + C = \frac{2}{21} (3\cos^3 x - 7\cos x) \sqrt{\cos x} + C. \end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Để trả lời câu hỏi "Vì sao người ta lựa chọn phép đổi biến như vậy?", các em học sinh có thể bắt đầu như sau:

- Hàm số $f(x) = g(\sin x, \cos x)$ dẫn tới việc lựa chọn phép đổi biến thông thường là:
 - $t = \sin x$, để khử $\cos x$ bởi khi đó $dt = \cos x \cdot dx$. (1)
 - $t = \cos x$, để khử $\sin x$ bởi khi đó $dt = -\sin x \cdot dx$. (2)
- Chúng ta không lựa chọn cách đổi biến (1) bởi trong hàm số $f(x)$ không có $\cos x$ (mà chỉ có $\sqrt{\cos x}$). Nhận xét này dẫn tới việc lựa chọn phép đổi biến theo (2) và khi đó từ $\sin^3 x$ chúng ta sẽ còn lại $\sin^2 x$. Vấn đề đặt ra là cần biến đổi $\sin^2 x$ theo $\cos x$ và điều này được thực hiện khá đơn giản bởi $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ – Các em học sinh hãy thực hiện lại bài toán trên theo cách này.
- Trong lời giải trên chúng ta lựa chọn phép đổi biến $t = \sqrt{\cos x}$ để tránh gặp phải $\sqrt{t}$, giúp cho đa thức (theo t) nhận được có bậc nguyên. Đó chính là kinh nghiệm lựa chọn phép đổi biến tối ưu. Các em sẽ thấy thêm điều này ở ví dụ tiếp theo.

Ví dụ 8: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos x \cdot \sin^3 x}{1 + \sin^2 x}$.

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện phép biến đổi:

$$\int \frac{\cos x \cdot \sin^3 x \cdot dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{\sin^2 x \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot dx}{1 + \sin^2 x}.$$

Đặt $t = 1 + \sin^2 x$, suy ra:

$$dt = 2\sin x \cdot \cos x \cdot dx \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2} dt.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x \cdot \sin^3 x \cdot dx}{1 + \sin^2 x} &= \frac{1}{2} \int \frac{(t-1)dt}{t} = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2} (t - \ln|t|) + C \\ &= \frac{1}{2} [1 + \sin^2 x - \ln(1 + \sin^2 x)] + C.\end{aligned}$$

Cách 2: Đặt $t = \sin^2 x$, suy ra:

$$dt = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot dx \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2} dt.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x \cdot \sin^3 x \cdot dx}{1 + \sin^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{t \cdot dt}{1+t} = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} [t - \ln(1+t)] + C = \frac{1}{2} [\sin^2 x - \ln(1 + \sin^2 x)] + C.\end{aligned}$$

Cách 3: Đặt $t = \sin x$, suy ra $dt = \cos x \cdot dx$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x \cdot \sin^3 x \cdot dx}{1 + \sin^2 x} &= \int \frac{t^3 dt}{1+t^2} = \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C \\ &= \frac{1}{2} [\sin^2 x - \ln(1 + \sin^2 x)] + C.\end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để tìm nguyên hàm của hàm số trên:

1. Cách 1 được đề xuất dựa trên dấu hiệu thứ nhất trong bảng dấu hiệu.
2. Cách 2 được trình bày dựa trên nhận định:

$$\cos x \cdot \sin^3 x \cdot dx = \sin^2 x \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot dx = \frac{1}{2} \sin^2 x \cdot d(\sin^2 x).$$

3. Cách 3 được đề xuất dựa trên kiến thức đã thu nhận được ở nhận xét sau ví dụ 7.

Qua hai ví dụ trên, các em học sinh cần rút ra thêm một nhận định quan trọng là:

- Để chọn $t = \sin x$ thì cần có $\cos^{2k+1} x$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Để chọn $t = \cos x$ thì cần có $\sin^{2k+1} x$, $k \in \mathbb{Z}$.

Trong những trường hợp còn lại (sin và cos có bậc chẵn) phép đổi biến thường được lựa chọn là:

- $t = \tan x$ khi đó:

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x) dx = (1 + t^2) dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2};$$

- hoặc $t = \cot x$ khi đó:

$$dt = -\frac{dx}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) dx = -(1 + t^2) dx \Leftrightarrow dx = -\frac{dt}{1+t^2}.$$

Ví dụ 9: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$.

b. $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}$.

 **Giải**

a. Ta thực hiện phép biến đổi:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Đặt $t = \tan x$, suy ra $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Khi đó:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + t^2) dt = t + \frac{1}{3} t^3 + C = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C.$$

b. Ta thực hiện phép biến đổi:

$$\int \frac{\cos^2 x \cdot dx}{\sin^8 x} = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \cot^2 x \cdot (1 + \cot^2 x)^2 \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Đặt $t = \cot x$, suy ra:

$$dt = -\frac{dx}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \frac{dx}{\sin^2 x} = -dt.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 x \cdot dx}{\sin^8 x} &= -\int t^2 (1 + t^2)^2 dt = -\int (t^6 + 2t^4 + t^2) dt = -\left(\frac{1}{7} t^7 + \frac{2}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3\right) + C \\ &= -\frac{1}{105} (15 \cot^7 x + 42 \cot^5 x + 35 \cot^3 x) + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 10: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}$.

 **Giải**

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, ta được:

$$dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Khi đó:

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| = \ln \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right| + C.$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để tìm nguyên hàm của hàm số trên chúng ta lựa chọn phép đổi biến dựa trên đề xuất của dấu hiệu thứ tư trong bảng dấu hiệu.

Tuy nhiên, do tính đặc thù của các hàm số lượng giác nên nếu biết vận dụng đúng các phép biến đổi lượng giác chúng ta có thể nhận được một lời giải đơn giản hơn. Ví dụ sau sẽ minh họa cho nhận xét này.

Ví dụ 11: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{1 + \cos 2x}$.

b. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $t = \tan x$, ta được:

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx = (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Khi đó:

$$\int \frac{dx}{1 + \cos 2x} = \int \frac{\frac{dt}{1 + t^2}}{1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{2} t + C = \frac{1}{2} \tan x + C.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\int \frac{dx}{1 + \cos 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} \tan x + C.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \tan \frac{x}{2}$, suy ra:

$$dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Khi đó:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2du}{1 + u^2}}{\frac{1 + u^2}{2u}} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\tan \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2}} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

Cách 3: Ta biến đổi:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right) dx \\ &= \left(-\ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| \right) + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.\end{aligned}$$

 **Chú ý:** Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới việc tìm nguyên hàm của các hàm số mũ và lôgarit.

Ví dụ 12: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{\ln(2x+4)}{x+2}.$

b. $f(x) = \frac{1}{e^x - e^{\frac{x}{2}}}.$

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = 2x + 4$ suy ra $du = 2dx$.

Khi đó:

$$\int \frac{\ln(2x+4)dx}{x+2} = \int \frac{\ln u \cdot du}{u} = \int \ln u \cdot d(\ln u) = \frac{1}{2} \ln^2 u + C = \frac{1}{2} \ln^2(2x+4) + C.$$

Cách 2: Đặt $u = \ln(2x+4)$ suy ra $du = \frac{2dx}{2x+4} = \frac{dx}{x+2}.$

Khi đó:

$$\int \frac{\ln(2x+4)dx}{x+2} = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} \ln^2(2x+4) + C.$$

Cách 3: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int \frac{\ln(2x+4)dx}{x+2} = \int \ln(2x+4) d[\ln(2x+4)] = \frac{1}{2} \ln^2(2x+4) + C.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $t = e^{x/2}$, suy ra:

$$dt = \frac{1}{2} e^{x/2} dx = \frac{1}{2} t \cdot dx \Leftrightarrow dx = \frac{2dt}{t}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{e^x - e^{x/2}} &= 2 \int \frac{dt}{t(t^2 - t)} = 2 \int \frac{dt}{t^2(t-1)} = 2 \int \frac{[t - (t-1)]dt}{t^2(t-1)} \\ &= 2 \int \left[\frac{1}{t(t-1)} - \frac{1}{t^2} \right] dt = 2 \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = 2 \left(\ln|t-1| - \ln|t| + \frac{1}{t} \right) + C \\ &= 2 \left(\ln \left| \frac{t-1}{t} \right| + \frac{1}{t} \right) + C = 2 \left(\ln \left| \frac{e^{x/2} - 1}{e^{x/2}} \right| + \frac{1}{e^{x/2}} \right) + C.\end{aligned}$$

Cách 2: Đặt $t = e^{-x/2}$, suy ra:

$$dt = -\frac{1}{2} e^{-x/2} dx \Leftrightarrow -2dt = \frac{dx}{e^{x/2}}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^x - e^{x/2}} &= \int \frac{dx}{e^x(1 - e^{-x/2})} = \int \frac{e^{-x/2} dx}{e^{x/2}(1 - e^{-x/2})} = -2 \int \frac{t \cdot dt}{1-t} = 2 \int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt \\ &= 2(t + \ln|t-1|) + C = 2(e^{-x/2} + \ln|e^{-x/2} - 1|) + C. \end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để tìm nguyên hàm của hàm số trên:

1. Với câu a):

- Việc lựa chọn ẩn phụ ở cách 1 chỉ mang tính đối phó, chính vì thế nó cần thêm phép biến đổi để chuyển nguyên hàm về dạng $\int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C$.
- Cách 2 bảo đảm tính đúng đắn trong việc lựa chọn phép đổi biến đối với đặc thù của hàm số dưới dấu tích phân.

2. Với câu b):

- Cách 1 được đề xuất dựa trên kiến thức về phép đại số hóa một biểu thức mũ (đặt $t = a^x$ thì $a^{kx} = t^k$) để chuyển hàm số ban đầu về dạng phân thức hữu tỉ. Từ đó, dựa vào việc tách đa thức để nhận được các hàm đơn mà nguyên hàm của nó được suy ra một cách dễ dàng từ bảng nguyên hàm.
- Cách 2 với việc lựa chọn ẩn phụ khác (dựa trên tính bất biến của hàm số $y = e^x$ qua các phép tính vi tích phân) chúng ta đã nhận được một lời giải ngắn gọn hơn rất nhiều.

Qua 12 ví dụ trên chúng ta đều sử dụng một phương pháp đổi biến đó là đặt $t = u(x)$, câu hỏi đặt ra là "*Có chiều ngược lại không?*", cụ thể đó là việc đặt $x = u(t)$. Hiển nhiên là có, bởi ví dụ như việc chuyển một bài toán đại số về dạng lượng giác để giải (đặt $x = \sin t$ nếu có điều kiện $|x| \leq 1$), phép đổi biến này thường được gọi là **phép đổi biến dạng 2** và để tìm $\int f(x) dx$ bằng phương pháp này chúng ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn cho thích hợp.

Bước 2: Lấy vi phân $dx = \varphi'(t) dt$.

Bước 3: Biểu thị $f(x) dx$ theo t và đường thẳng, giả sử rằng:

$$f(x) dx = g(t) dt \Leftrightarrow \int f(x) dx = \int g(t) dt.$$

Lưu ý: Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\begin{cases} x = a \sin t \text{ với } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ x = a \cos t \text{ với } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\begin{cases} x = \frac{ a }{\sin t} \text{ với } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ x = \frac{ a }{\cos t} \text{ với } t \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \end{cases}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\begin{cases} x = a \operatorname{tg} t \text{ với } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ x = a \operatorname{cotg} t \text{ với } 0 < t < \pi \end{cases}$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a)\sin^2 t$

Ví dụ 13: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b. $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $x = \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra $dx = \cos t \cdot dt$.

Khi đó:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t \cdot dt}{\cos t} = \int dt = t + C = \arcsin x + C.$$

Cách 2: Đặt $x = \cos t$ với $0 < t < \pi$, suy ra $dx = -\sin t \cdot dt$.

Khi đó:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{\sin t \cdot dt}{\sin t} = -\int dt = -t + C = -\arccos x + C.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $x = \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra $dx = \cos t \cdot dt$.

Khi đó:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \int \frac{\cos t \cdot dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C = \frac{\sin t}{\cos t} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Cách 2: Đặt $x = \cos t$ với $0 < t < \pi$, suy ra $dx = -\sin t \cdot dt$.

Khi đó:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = -\int \frac{\sin t \cdot dt}{\sin^3 t} = -\int \frac{dt}{\sin^2 t} = \cot t + C = \frac{\cos t}{\sin t} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Cách 3: Đặt $t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, suy ra:

$$dt = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} dx = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Khi đó:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \int dt = t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để tìm nguyên hàm của hàm số trong câu b) ta thấy:

1. Phép đổi biến ở cách 1 và cách 2 được đề xuất dựa trên điều kiện có nghĩa cho căn thức là:

$$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 1.$$

Từ đó:

- Nếu đặt $t = \sin x$ thì cần điều kiện $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ để lấp đầy tập giá trị của x và cũng nhờ đó để khẳng định:

$$\sqrt{(1-x^2)^3} = \cos^3 t \text{ và } \tan t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

bởi ta có $\cos t > 0$ nên:

$$\begin{cases} \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \\ \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2} \end{cases}.$$

- Nếu đặt $t = \sin x$ thì cần điều kiện $0 < t < \pi$ để lấp đầy tập giá trị của x và các phép biến đổi lượng giác như trên.
2. Cách đổi biến ở cách 3 dựa trên kinh nghiệm khi đã thực hiện tốt bài tập 2 trong chủ đề 1.

Ví dụ 14: Với $x > 1$, tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

b. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}.$

 **Giải**

a. Đặt $x = \frac{1}{\sin 2t}$ với $0 < t < \frac{\pi}{4}$ suy ra $dx = -\frac{2\cos 2t \cdot dt}{\sin^2 2t}.$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= -2 \int \frac{\frac{\cos 2t \cdot dt}{\sin^2 2t}}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 2t} - 1}} = -2 \int \frac{dt}{\sin 2t} = -2 \int \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t) dt}{2 \sin t \cdot \cos t} \\ &= - \int \left(\frac{\cos t}{\sin t} + \frac{\sin t}{\cos t} \right) dt = -\ln|\sin t| + \ln|\cos t| + C \\ &= -\ln \left| \sin \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{x} \right) \right| + \ln \left| \cos \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{x} \right) \right| + C.\end{aligned}$$

b. Đặt $x = \frac{1}{\sin 2t}$ với $0 < t < \frac{\pi}{4}$ suy ra:

$$dx = -\frac{2 \cos 2t \cdot dt}{\sin^2 2t}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}} &= -2 \int \frac{\frac{1}{\sin^2 2t} \cdot \frac{\cos 2t \cdot dt}{\sin^2 2t}}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 2t} - 1}} = -2 \int \frac{dt}{\sin^3 2t} = -2 \int \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)^2 dt}{8 \sin^3 t \cos^3 t} \\ &= -\frac{1}{4} \int \left(\cot t \cdot \frac{1}{\sin^2 t} + \tan t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2}{\sin t \cos t} \right) dt \\ &= -\frac{1}{4} \int \left(\cot t \cdot \frac{1}{\sin^2 t} + \tan t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2}{\tan t \cdot \cos^2 t} \right) dt \\ &= -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \cot^2 t + \frac{1}{2} \tan^2 t + 2 \ln|\tan t| \right) + C \\ &= \frac{1}{8} (\cot^2 t - \tan^2 t) - \frac{1}{2} \ln|\tan t| + C \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln|x - \sqrt{x^2-1}| + C.\end{aligned}$$

 **Chú ý:** Trong ví dụ trên sở dĩ ta có:

$$\cot^2 t - \tan^2 t = 4x \sqrt{x^2-1} \quad \text{và} \quad \tan t = x - \sqrt{x^2-1}$$

là bởi:

$$\begin{aligned}\cot^2 t - \tan^2 t &= \frac{\cos^4 t - \sin^4 t}{\cos^2 t \cdot \sin^2 t} = \frac{4 \cos 2t}{\sin^2 2t} \\ &= \frac{4 \sqrt{1 - \sin^2 2t}}{\sin^2 2t} = \frac{4}{\sin 2t} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2t} - 1} = 4x \sqrt{x^2-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan t &= \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin^2 t}{\sin t \cos t} = \frac{1 - \cos 2t}{\sin 2t} \\ &= \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 2t}}{\sin 2t} = \frac{1}{\sin 2t} - \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2t} - 1} = x - \sqrt{x^2 - 1}.\end{aligned}$$

Ví dụ 15: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

 *Giải*

Đặt $x = \tan t$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$.

Khi đó:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{\cos^3 t \cdot dt}{\cos^2 t} = \int \cos t \cdot dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

 **Chú ý:** 1. Trong ví dụ trên sử dĩ ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos t \text{ và } \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

là bởi:

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \\ \sin t = \tan t \cdot \cos t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

2. Phương pháp trên được áp dụng để giải bài toán tổng quát:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^{2k+1}}}, \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 16: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

 *Giải*

Đặt $x = \cos 2t$, $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = -2\sin 2t \cdot dt$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx &= -2 \int \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}} \cdot \sin 2t \cdot dt = -2 \int \cot t \cdot \sin 2t \cdot dt \\ &= -4 \int \cos^2 t \cdot dt = -2 \int (1 + \cos 2t) dt = -2t - \sin 2t + C \\ &= -2t - \sqrt{1 - \cos^2 2t} + C = -\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Ví dụ 17: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{(x-1)(2-x)}$.

 **Giải**

Đặt $x = 1 + \sin^2 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = \sin 2t \cdot dt$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{(x-1)(2-x)} dx &= \int \sqrt{\sin^2 t \cdot (1 - \sin^2 t)} \cdot \sin 2t \cdot dt = \int \sin^2 2t \cdot dt \\&= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 4t) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) + C = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t \cdot \cos 2t + C \\&= \frac{1}{4} \arccos(3-2x) - \frac{1}{4} (3-2x) \sqrt{1-(3-2x)^2} + C.\end{aligned}$$

 **Chú ý:** Trong ví dụ trên ta đã sử dụng phép biến đổi:

$$\begin{aligned}x &= 1 - \sin^2 t = 1 + \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \Leftrightarrow \cos 2t = 3 - 2x \\&\Leftrightarrow 2t = \arccos(3 - 2x) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \arccos(3 - 2x).\end{aligned}$$

Vấn đề 2: PHƯƠNG PHÁP LẤY NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Sử dụng kiến thức trong phần lấy nguyên hàm từng phần.

Ví dụ 1: (Bài 12.c/tr 213 – Sgk): Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$.

 **Giải**

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

Khi đó:

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x} = x \cdot \tan x - \int \tan x \cdot dx = x \cdot \tan x - \int \frac{\sin x \cdot dx}{\cos x} = x \cdot \tan x + \ln(\cos x) + C.$$

 **Nhận xét:** Đây là ví dụ mở đầu minh họa phương pháp lấy nguyên hàm từng phần và hai câu hỏi được đặt ra là:

1. **Câu 1** "Tại sao lại lựa chọn phương pháp lấy nguyên hàm từng phần?", để trả lời câu hỏi này chúng ta sử dụng nhận xét:

- Hàm số $f(x)$ không có trong bảng nguyên hàm các hàm số thường gặp, do đó cần những phép phân tích

để chuyển nó về dạng một biểu thức chứa các hàm số có trong bảng nguyên hàm. Tuy nhiên, với những phép phân tích đại số thông thường sẽ không thể thực hiện được yêu cầu trên bởi $f(x)$ là một hàm không thuần nhất (thương của hàm đa thức với hàm lượng giác).

- Phương pháp đổi biến mà chúng ta đã biết cũng không thể thực hiện được bởi không có phân tử trung gian chuyển đổi giữa hàm đa thức và hàm lượng giác.

2. **Câu 2** "Tại sao lại lựa chọn cách đặt u và dv như vậy?", để trả lời câu hỏi này chúng ta sử dụng phân tích mang tính chủ quan sau:

$$f(x) = \frac{x}{\cos^2 x} = x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Điều này cho thấy u chỉ có thể là x hoặc $\frac{1}{\cos^2 x}$ và phần còn lại sẽ là dv . Lựa chọn trong lời giải trên là $u = x$ bởi:

- Khi đó $dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx$ nên $v = \tan x$, tức thoả mãn "Phép đặt dv sao cho v được xác định một cách dễ dàng". Tuy nhiên, sẽ có học sinh đặt câu rằng trong trường hợp trái lại ($dv = x dx$) thì v cũng được xác định một cách dễ dàng ($v = \frac{1}{2} x^2$).
- Câu hỏi rất đúng, nhưng câu trả lời là không bởi khi đó việc tính du trở nên phức tạp hơn và tích phân mới xuất hiện $\int v du$ không được xác định một cách dễ dàng (vì v vẫn là hàm hợp).

Ví dụ 2: Tìm $I = \int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx$.

 **Giải**

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(\cos x) \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{\sin x}{\cos x} dx \\ v = \tan x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \ln(\cos x) \cdot \tan x + \int \tan^2 x \cdot dx = \ln(\cos x) \cdot \tan x + \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \ln(\cos x) \cdot \tan x + \tan x - x + C. \end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Ví dụ trên đã cho thấy chỉ có một cách lựa chọn duy nhất cho việc đặt u và dv trong phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

Ví dụ 3: Tìm $I = \int \cos(\ln x) dx$.

 **Giải**

Đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x) dx \\ v = x \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx. \quad (1)$$

Xét $J = \int \sin(\ln x) dx$, đặt:

$$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx \\ v = x \end{cases}$$

Khi đó:

$$J = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - I. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - I \Leftrightarrow I = \frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C.$$

 **Chú ý:** Nếu bài toán yêu cầu tính giá trị của một cặp tích phân:

$$I_1 = \int \sin(\ln x) dx \text{ và } I_2 = \int \cos(\ln x) dx$$

ta nên lựa chọn cách trình bày sau:

- Sử dụng tích phân từng phần cho I_1 , bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx \\ v = x \end{cases}$$

Khi đó:

$$I_1 = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - I_2. \quad (3)$$

- Sử dụng tích phân từng phần cho I_2 , bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x) dx \\ v = x \end{cases}$$

Khi đó:

$$I_2 = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + I_1. \quad (4)$$

- Từ hệ tạo bởi (3) và (4) ta nhận được:

$$I_1 = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

$$I_2 = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C.$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới các dạng hàm số mà việc tìm nguyên hàm của nó thường được thực hiện bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

DẠNG 1: Tính $I = \int P(x) \sin(\alpha x) dx$ hoặc $\int P(x) \cos(\alpha x) dx$ với P là một đa thức thuộc $\mathbb{Q}[X]$ và $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Sử dụng tích phân từng phần) Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin \alpha x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) dx \\ v = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x \end{cases}.$$

Bước 2: Khi đó:

$$I = -\frac{1}{\alpha} P(x) \cos \alpha x + \frac{1}{\alpha} \int P'(x) \cdot \cos \alpha x \cdot dx.$$

Bước 3: Tiếp tục thủ tục trên ta sẽ "khử" được đa thức.

Cách 2: (Sử dụng phương pháp hằng số bất định) Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Ta có:

$$I = \int P(x) \cos \alpha x dx = A(x) \sin \alpha x + B(x) \cos \alpha x + C. \quad (1)$$

trong đó $A(x)$ và $B(x)$ là các đa thức cùng bậc với $P(x)$.

Bước 2: Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta được:

$$P(x) \cdot \cos \alpha x = [A'(x) + B(x)] \cdot \sin \alpha x + [A(x) + B'(x)] \cdot \cos \alpha x. \quad (2)$$

Sử dụng phương pháp hệ số bất định ta xác định được các đa thức $A(x)$ và $B(x)$.

Bước 3: Kết luận.

 **Nhận xét:** Nếu bậc của đa thức $P(x)$ lớn hơn hoặc bằng 3 ta thấy ngay cách 1 tỏ ra quá cồng kềnh, vì khi đó ta cần thực hiện thủ tục lấy tích phân từng phần nhiều hơn ba lần. Do đó, ta đi tới nhận định chung sau:

- Nếu bậc của $P(x)$ nhỏ hơn hoặc bằng 2, ta lựa chọn cách 1.
- Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn 2, ta lựa chọn cách 2.

Ví dụ 4: Tìm nguyên hàm của các hàm số:

a. (Bài 6.a/tr 145 – Sgk): $f(x) = x \cdot \sin \frac{x}{2}$.

b. $f(x) = x \cdot \sin^2 x$.

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin \frac{x}{2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -2 \cos \frac{x}{2} \end{cases}$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = -2x \cdot \cos \frac{x}{2} + 2 \int \cos \frac{x}{2} dx = -2x \cdot \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} + C.$$

Cách 2: Ta có:

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \sin \frac{x}{2} dx = (a_1 x + b_1) \cos \frac{x}{2} + (a_2 x + b_2) \sin \frac{x}{2} + C. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta được:

$$\begin{aligned} x \cdot \sin \frac{x}{2} &= a_1 \cdot \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} (a_1 x + b_1) \sin \frac{x}{2} + a_2 \cdot \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} (a_2 x + b_2) \cos \frac{x}{2} \\ &= \left(-\frac{1}{2} a_1 x + a_2 - \frac{1}{2} b_1 \right) \sin \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{2} a_2 x + a_1 + \frac{1}{2} b_2 \right) \cos \frac{x}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Đồng nhất đẳng thức hai vế của (2), ta được:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} a_1 = 1 \\ a_2 - \frac{1}{2} b_1 = 0 \\ \frac{1}{2} a_2 = 0 \\ a_1 + \frac{1}{2} b_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ b_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ b_2 = 4 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = -2x \cdot \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} + C.$$

b. Trước tiên, ta có:

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \sin^2 x \cdot dx = \frac{1}{2} \int x(1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int x \cdot dx}_{I_1} - \frac{1}{2} \underbrace{\int x \cdot \cos 2x \cdot dx}_{I_2}. \quad (3)$$

Ta lần lượt có:

$$I_1 = \frac{1}{4} x^2 + C. \quad (4)$$

Với nguyên hàm I_2 , ta có thể trình bày theo các cách sau:
Cách 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x \cdot dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

Khi đó:

$$I_2 = \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot dx = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C. \quad (5)$$

Thay (4), (5) vào (3) ta được:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{4} x^2 + \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C.$$

Cách 2: Ta có:

$$\int x \cdot \cos 2x \cdot dx = (a_1 x + b_1) \cos 2x + (a_2 x + b_2) \sin 2x + C. \quad (6)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta được:

$$\begin{aligned} x \cdot \cos 2x &= a_1 \cdot \cos 2x - 2(a_1 x + b_1) \sin 2x + a_2 \cdot \sin 2x + 2(a_2 x + b_2) \cos 2x \\ &= (2a_2 x + a_1 + 2b_2) \cos 2x + (-2a_1 x + a_2 - 2b_1) \sin 2x. \end{aligned} \quad (7)$$

Đồng nhất đẳng thức hai vế của (7), ta được:

$$\begin{cases} 2a_2 = 1 \\ a_1 + 2b_2 = 0 \\ -2a_1 = 0 \\ a_2 - 2b_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 & b_1 = \frac{1}{4} \\ a_2 = \frac{1}{2} & b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + C. \quad (8)$$

Thay (4), (8) vào (3) ta được:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{4} x^2 + \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C.$$

 **Chú ý:** Trong một số trường hợp cần thực hiện nhiều lần phương pháp nguyên hàm từng phần để tìm nguyên hàm. Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa trường hợp này.

Ví dụ 5: (Bài 6.b/tr 145 – Sgk): *Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cdot \cos x$.*

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = x^2 \cdot \sin x - 2 \int x \cdot \sin x \cdot dx. \quad (1)$$

Xét tích phân $J = \int x \cdot \sin x \cdot dx$, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

Khi đó:

$$J = -x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C. \quad (2)$$

Thay (2) và (1), ta được:

$$\int f(x) dx = x^2 \cdot \sin x - 2(-x \cdot \cos x + \sin x) + C = x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x + C.$$

Cách 2: Ta có:

$$\int x^2 \cdot \cos x \cdot dx = (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) \cos x + (a_2 x^2 + b_2 x + c_2) \sin x + C. \quad (3)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (3), ta được:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot \cos x &= (2a_1 x + b_1) \cos x - (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) \sin x + \\ &\quad + (2a_2 x + b_2) \sin x + (a_2 x^2 + b_2 x + c_2) \cos x \\ &= [a_2 x^2 + (2a_1 + b_2)x + b_1 + c_2] \cos x + \\ &\quad + [-a_1 x^2 + (2a_2 - b_1)x + b_2 - c_1] \sin x. \end{aligned} \quad (4)$$

Đồng nhất đẳng thức hai vế của (4), ta được:

$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ 2a_1 + b_2 = 0 \\ b_1 + c_2 = 0 \\ -a_1 = 0 \\ 2a_2 - b_1 = 0 \\ b_2 - c_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 & b_1 = 2 & c_1 = 0 \\ a_2 = 1 & b_2 = 0 & c_2 = -2 \end{cases}$$

Vậy, ta được:

$$\int f(x) dx = 2x \cdot \cos x + (x^2 - 2) \sin x + C.$$

 **Chú ý:** Trong một số trường hợp cần kết hợp đồng thời phương pháp đổi biến với phương pháp nguyên hàm từng phần để tìm nguyên hàm cho dạng hàm số này. Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa trường hợp này.

Ví dụ 6: (ĐHMD – 1998): Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cdot \sin \sqrt{x} \cdot dx$.

 **Giải**

Đặt $t = \sqrt{x}$, suy ra:

$$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt \text{ và } x \cdot \sin \sqrt{x} \cdot dx = 2t^3 \sin t dt.$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = 2 \int t^3 \sin t dt.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = t^3 \\ dv = \sin t dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 3t^2 dt \\ v = -\cos t \end{cases} \Rightarrow I = 2(-t^3 \cos t + 3 \int t^2 \cdot \cos t dt). \quad (1)$$

Xét tích phân $J = \int t^2 \cdot \cos t \cdot dt$ bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = t^2 \\ dv = \cos t dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2t dt \\ v = \sin t \end{cases} \Rightarrow J = t^2 \sin t - 2 \int t \sin t dt. \quad (2)$$

Xét tích phân $K = \int t \cdot \sin t \cdot dt$ bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = t \\ dv = \sin t dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\cos t \end{cases} \Rightarrow K = -t \cdot \cos t + \int \cos t dt = -t \cdot \cos t + \sin t + C. \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) rồi vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} I &= 2\{-t^3 \cos t + 3[t^2 \sin t - 2(-t \cdot \cos t + \sin t)]\} + C \\ &= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t + 12t \cdot \cos t - 12 \sin t + C \\ &= -2\sqrt{x^3} \cos \sqrt{x} + 6x \cdot \sin \sqrt{x} + 12\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 12 \sin \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

 **Chú ý:** Tích phân $I = \int t^3 \sin t \cdot dt$ cũng có thể được xác định bằng phương pháp hệ số bất định – *Đề nghị bạn đọc tự giải.*

DANG 2: Tính $I = \int P(x)e^{\alpha x} dx$ với P là một đa thức thuộc $\mathbb{Q}[X]$ và $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Sử dụng tích phân từng phần) Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{\alpha x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) dx \\ v = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \end{cases}.$$

Bước 2: Khi đó:

$$I = \frac{1}{\alpha} P(x)e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int P'(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot dx.$$

Bước 3: Tiếp tục thủ tục trên ta sẽ "khử" được đa thức.

Cách 2: (Sử dụng phương pháp hằng số bất định) Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Ta có:

$$I = \int P(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot dx = A(x)e^{\alpha x} + C \quad (1)$$

trong đó $A(x)$ là đa thức cùng bậc với $P(x)$.

Bước 2: Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta được:

$$P(x) \cdot e^{\alpha x} = [A'(x) + \alpha A(x)] \cdot e^{\alpha x}. \quad (2)$$

Sử dụng phương pháp hệ số bất định ta xác định được $A(x)$.

Bước 3: Kết luận.

 **Nhận xét:** Nếu bậc của đa thức $P(x)$ lớn hơn hoặc bằng 3 ta thấy ngay cách 1 tỏ ra quá công kênh, vì khi đó ta cần thực hiện thủ tục lấy tích phân từng phần nhiều hơn ba lần. Do đó, ta đi tới nhận định chung sau:

- Nếu bậc của $P(x)$ nhỏ hơn hoặc bằng 2, ta lựa chọn cách 1.
- Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn 2, ta lựa chọn cách 2.

Ví dụ 7: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. (Bài 6.c/tr 145 – Sgk): $f(x) = x.e^x$.

b. (Bài 42.c/tr 175 – Sgk): $y = \frac{xe^{2x}}{3}$.

 **Giải**

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int f(x)dx = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + C.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = \frac{x}{3} \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{3} dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int \frac{xe^{2x}}{3} dx = \frac{1}{6} x.e^{2x} - \frac{1}{6} \int e^{2x} dx = \frac{1}{6} x.e^{2x} - \frac{1}{12} e^{2x} + C.$$

Cách 2: Giả sử:

$$F(x) = \int \frac{xe^{2x}}{3} dx = (ax + b)e^{2x} + C. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta được:

$$\frac{xe^{2x}}{3} = (2ax + a + 2b)e^{2x}. \quad (2)$$

Đồng nhất hệ số, ta được:

$$\begin{cases} 2a = \frac{1}{3} \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = -\frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6} x.e^{2x} - \frac{1}{12} e^{2x} + C.$$

 **Chú ý:** Trong một số trường hợp cần kết hợp đồng thời phương pháp đổi biến với phương pháp nguyên hàm từng phần để tìm nguyên hàm. Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa trường hợp này.

Ví dụ 8: (Bài 8.d/tr 145 – Sgk): Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\sqrt{3x-9}}$.

 *Giải*

Đặt $t = \sqrt{3x-9}$, suy ra:

$$t^2 = 3x - 9 \Rightarrow 2t dt = 3dx \Leftrightarrow dx = \frac{2}{3} t dt.$$

Từ đó:

$$\int e^{\sqrt{3x-9}} dx = \frac{2}{3} \int t e^t dt.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int e^{\sqrt{3x-9}} dx = \frac{2}{3} (t e^t - \int e^t dt) = \frac{2}{3} (\sqrt{3x-9} - 1) e^{\sqrt{3x-9}} + C.$$

Ví dụ 9: (Bài 8.c/tr 145 – Sgk): Tìm nguyên hàm của hàm số:

a. (Bài 42.d/tr 175 – Sgk): $f(x) = x^2 e^x$.

b. (Bài 8.c/tr 145 – Sgk): $f(x) = x^3 \cdot e^x$.

 *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int f(x) dx = x^2 \cdot e^x - 2 \underbrace{\int x e^x dx}_{I_1}. \quad (1)$$

Xét tích phân I_1 , bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow I_1 = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\int f(x) dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2) e^x + C.$$

Cách 2: Ta đi xác định nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^x$, giả sử:

$$F(x) = \int x^2 e^x = (ax^2 + bx + c) e^x + C. \quad (3)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (3), ta được:

$$x^2 e^x = [ax^2 + (2a + b)x + b + c] e^x. \quad (4)$$

Đồng nhất hệ số, ta được:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow F(x) = (x^2 - 2x + 2) e^x + C.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = x^3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3x^2 dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int f(x) dx = x^3 \cdot e^x - \underbrace{3 \int x^2 e^x dx}_{I_1}. \quad (1)$$

Xét tích phân I_1 , bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow I_1 = x^2 \cdot e^x - \underbrace{2 \int x e^x dx}_{I_{1,1}}. \quad (2)$$

Xét tích phân $I_{1,1}$, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow I_{1,1} = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C. \quad (3)$$

Thay (3) và (2) rồi vào (1), ta được:

$$\int f(x) dx = x^3 \cdot e^x - 3 \left[x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) \right] + C = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C.$$

Cách 2: Ta đi xác định nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 e^x$, giả sử:

$$F(x) = \int x^3 e^x = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x + C. \quad (4)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (4), ta được:

$$x^3 e^x = [ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + c)x + c + d]e^x. \quad (5)$$

Đồng nhất hệ số, ta được:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = 0 \\ 2b + c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 6 \\ d = -6 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$F(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C.$$

DANG 3: Tính $I = \int p(x) \ln \alpha x dx$ với p là một đa thức thuộc $\mathbb{R}[X]$ và $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Giả sử $p(x)$ có nguyên hàm là $P(x)$, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln \alpha x \\ dv = p(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = P(x) \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = P(x) \ln \alpha x - \underbrace{\int \frac{P(x) dx}{x}}_{I_1}.$$

Bước 2: Nguyên hàm I_1 được xác định bằng cách chia đa thức.

Ví dụ 10: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. (HVQY – 1999): $f(x) = x^3 \ln x$.

b. (Bài 9.b/tr 146 – Sgk): $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

 *Giải*

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

b. Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \sqrt{x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x - \frac{2}{3} \int \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot dx}{x} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} \cdot dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 11: (ĐHHH – 1998): Tìm $I = \int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx$.

 *Giải*

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln \frac{1-x}{1+x} \\ dv = x \cdot dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{-1}{1-x^2} dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} + \int \frac{x^2 dx}{2(1-x^2)} = \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} + \int \left(\frac{1}{2(1-x^2)} - \frac{1}{2} \right) dx + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} x + C. \end{aligned}$$

DANG 4: Tính $I = \int e^{ax} \sin(bx) dx$ hoặc $\int e^{ax} \cos(bx) dx$ với $a, b \neq 0$.

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Sử dụng tích phân từng phần) Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(bx) \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -b \sin(bx) dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx) dx. \quad (1)$$

Bước 2: Xét $J = \int e^{ax} \sin(bx) dx$, đặt:

$$\begin{cases} u = \sin(bx) \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = b \cos(bx) dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} I. \quad (2)$$

Bước 3: Thay (2) vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \left[\frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} I \right] \\ \Leftrightarrow I &= \frac{[a \cdot \cos(bx) + b \cdot \sin(bx)] e^{ax}}{a^2 + b^2} + C \end{aligned}$$

Cách 2: (Sử dụng phương pháp hằng số bất định) Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Ta có:

$$I = \int e^{ax} \cos(bx) dx = [A \cos(bx) + B \sin(bx)] e^{ax} + C \quad (3)$$

trong đó A, B là các hằng số.

Bước 2: Lấy đạo hàm hai vế của (3), ta được:

$$\begin{aligned} e^{ax} \cdot \cos(bx) &= b[-A \sin(bx) + B \cos(bx)] e^{ax} + \\ &\quad + a[A \cos(bx) + B \sin(bx)] e^{ax}. \\ &= [(Aa + Bb) \cdot \cos(bx) + (Ba - Ab) \sin(bx)] e^{ax}. \end{aligned}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} Aa + Bb = 1 \\ Ba - Ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ B = \frac{b}{a^2 + b^2} \end{cases}.$$

Bước 3: Vậy, ta được:

$$I = \frac{[a \cdot \cos(bx) + b \cdot \sin(bx)] e^{ax}}{a^2 + b^2} + C.$$

 Chú ý:

1. Nếu bài toán yêu cầu tính giá trị của một cặp tích phân:

$$I_1 = \int e^{ax} \cos(bx) dx \text{ và } I_2 = \int e^{ax} \sin(bx) dx$$

ta nên lựa chọn cách trình bày sau:

- Sử dụng tích phân từng phần cho I_1 , bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(bx) \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -b \sin(bx) dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_1 = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} I_2. \quad (4)$$

- Sử dụng tích phân từng phần cho I_2 , bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \sin(bx) \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = b \cos(bx) dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_2 = \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} I_1. \quad (5)$$

- Từ hệ tạo bởi (4) và (5) ta nhận được:

$$I_1 = \frac{[a \cdot \cos(bx) + b \cdot \sin(bx)] e^{ax}}{a^2 + b^2} + C;$$

$$I_2 = \frac{[a \cdot \sin(bx) - b \cdot \cos(bx)] e^{ax}}{a^2 + b^2} + C.$$

2. Phương pháp trên cũng được áp dụng cho các tích phân:

$$J_1 = \int e^{ax} \sin^2(bx) dx \text{ và } J_2 = \int e^{ax} \cos^2(bx) dx.$$

Ví dụ 12: Tìm $I = \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$.

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x \cdot dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow I = e^x \sin x - \int e^x \cos x \cdot dx. \quad (1)$$

Xét $J = \int e^x \cos x \cdot dx$, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x \cdot dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = e^x \cos x + \int e^x \sin x \cdot dx = e^x \cos x + I. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = e^x \sin x - (e^x \cos x + I) \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) e^x + C.$$

Cách 2: Ta có:

$$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = (a \cdot \cos x + b \cdot \sin x) e^x + C. \quad (3)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (3), ta được:

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= (-a \cdot \sin x + b \cdot \cos x) e^x + (a \cdot \cos x + b \cdot \sin x) e^x \\ &= [(a + b) \cos x + (b - a) \sin x] e^x. \end{aligned} \quad (4)$$

Đồng nhất đẳng thức ở (4), ta được:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 1/2 \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{2} (-\cos x + \sin x) e^x + C.$$

Ví dụ 13: Tìm $I = \int e^x \cdot \cos^2 x \cdot dx$.

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Viết lại I dưới dạng:

$$I = \frac{1}{2} \int e^x (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} (\int e^x dx + \int e^x \cdot \cos 2x dx) = \frac{1}{2} (e^x + \int e^x \cdot \cos 2x dx). \quad (1)$$

Xét $J = \int e^x \cdot \cos 2x \cdot dx$, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2 \sin 2x dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow J = e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x \cdot dx. \quad (2)$$

Xét $K = \int e^x \sin 2x \cdot dx$, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \cos 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Khi đó:

$$K = e^x \sin 2x - 2 \int e^x \cos 2x \cdot dx = e^x \sin 2x - 2J. \quad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được:

$$J = e^x \cos 2x + 2(e^x \sin 2x - 2J) \Leftrightarrow J = \frac{1}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x) e^x + C. \quad (4)$$

Thay (4) vào (1), ta được:

$$I = \frac{1}{2} [e^x + \frac{1}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x) e^x] + C = \frac{1}{10} (5 + \cos 2x + 2 \sin 2x) e^x + C.$$

Cách 2: Viết lại I dưới dạng:

$$I = \frac{1}{2} \int e^x (1 + \cos 2x) dx = (a + b \cdot \cos 2x + c \cdot \sin 2x) e^x + C. \quad (5)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (5), ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^x(1 + \cos 2x) &= (-2b \cdot \sin 2x + 2c \cdot \cos 2x)e^x + (a + b \cdot \cos 2x + c \cdot \sin 2x)e^x \\ &= [a + (2c + b)\cos 2x + (c - 2b)\sin 2x]e^x. \end{aligned} \quad (6)$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2(2c + b) = 1 \\ 2(c - 2b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/10 \\ c = 1/5 \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{10}(5 + \cos 2x + 2\sin 2x)e^x + C.$$

Ví dụ 14: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (\tan^2 x + \tan x + 1)e^x$.

 *Giải*

Ta biến đổi:

$$F(x) = \int (\tan^2 x + \tan x + 1)e^x = \int (\tan^2 x + 1)e^x + \int e^x \tan x dx. \quad (1)$$

Xét tích phân $J = \int e^x \tan x dx$, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \tan x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Khi đó:

$$J = e^x \tan x - \int (\tan^2 x + 1)e^x. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được $F(x) = e^x \tan x + C$.

Ví dụ 15: Đặt $I_n = \int x^n e^x dx$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

- Chứng minh rằng $I_n = x^n \cdot e^x - nI_{n-1}$.
- Tìm I_1, I_2, I_3 .

 *Giải*

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = x^n \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = n \cdot x^{n-1} \\ v = e^x \end{cases}$$

Khi đó:

$$I_n = x^n \cdot e^x - n \int x^{n-1} \cdot e^x dx = x^n \cdot e^x - nI_{n-1}, \text{ đpcm.}$$

b. Ta lần lượt có:

- Với $n = 1$ thì:

$$I_1 = xe^x - I_0 = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

- Với $n = 2$ thì:

$$I_2 = x^2 \cdot e^x - 2I_1 = x^2 \cdot e^x - 2(xe^x - e^x) + C = x^2 \cdot e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

- Với $n = 3$ thì:

$$\begin{aligned} I_3 &= x^3 e^x - 3I_2 = x^3 e^x - 3(x^2 \cdot e^x - 2xe^x + 2e^x) + C \\ &= x^3 e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6xe^x - 6e^x + C. \end{aligned}$$

Vấn đề 3: PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ HỮU TỈ

Để tìm nguyên hàm các hàm số hữu tỉ ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Phương pháp tam thức bậc hai.
2. Phương pháp phân tích.
3. Phương pháp đổi biến.
4. Phương pháp tích phân từng phần.
5. Sử dụng các phương pháp khác nhau.

Sau đây chúng ta cùng đi xem xét từng dạng.

DẠNG 1: Tìm nguyên hàm các hàm hữu tỉ dựa trên tam thức bậc hai

Trên cơ sở đưa tam thức bậc hai về dạng chính tắc và dùng các công thức sau:

$$1. \int \frac{xdx}{x^2 \pm a} = \frac{1}{2} \ln|x^2 \pm a| + C \quad (1)$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \text{ với } a \neq 0 \quad (2)$$

ta có thể xác định được nguyên hàm của một lớp các hàm hữu tỉ. Tuy nhiên hai công thức trên không được liệt kê trong bảng nguyên hàm của sgk nên khi sử dụng các em học sinh cần ghi thêm vào lời giải một vài phép biến đổi đại số thông thường. Ví dụ sau sẽ minh họa điều này.

Ví dụ 1: Tìm:

$$a. \int \frac{xdx}{x^2 + 1}.$$

$$b. \int \frac{(2x-1)dx}{4x^2 - 4x}.$$

Giải

a. Ta có thể lựa chọn các cách trình bày sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$\int \frac{xdx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

Cách 2: Đặt $u = x^2 + 1$, suy ra:

$$du = 2xdx \Leftrightarrow xdx = \frac{1}{2} du.$$

Từ đó:

$$\int \frac{xdx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C.$$

b. Ta có thể lựa chọn các cách trình bày sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$\int \frac{(2x-1)dx}{4x^2-4x} = \frac{1}{4} \int \frac{d(4x^2-4x)}{4x^2-4x} = \frac{1}{4} \ln|4x^2-4x| + C.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\int \frac{(2x-1)dx}{4x^2-4x} = \int \frac{(2x-1)dx}{(4x^2-4x+1)-1} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-1)d(2x)}{(2x-1)^2-1} = \frac{1}{4} \ln|4x^2-4x| + C.$$

Cách 3: Đặt $u = 4x^2 - 4x$, suy ra:

$$du = (8x-4)dx = 4(2x-1)dx \Leftrightarrow (2x-1)dx = \frac{1}{4}du.$$

Từ đó:

$$\int \frac{(2x-1)dx}{4x^2-4x} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{4} \ln|u| + C = \frac{1}{4} \ln|4x^2-4x| + C.$$

Ví dụ 2: Tìm:

a. $\int \frac{dx}{x^2-4}.$

b. $\int \frac{dx}{4x^2-4x-3}.$

 **Giải**

a. Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-4} &= \int \frac{dx}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} (\ln|x-2| - \ln|x+2|) + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C. \end{aligned}$$

b. Ta có thể lựa chọn các cách trình bày sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4x^2-4x-3} &= \int \frac{dx}{(2x-1)^2-4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-1)}{(2x-1)^2-4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x-1-2}{2x-1+2} \right| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2x-3}{2x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4x^2-4x-3} &= \int \frac{dx}{(2x-3)(2x+1)} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\int \frac{dx}{2x-3} - \int \frac{dx}{2x+1} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[\int \frac{d(2x-3)}{2x-3} - \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} \right] \\ &= \frac{1}{8} (\ln|2x-3| - \ln|2x+1|) + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2x-3}{2x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

DẠNG 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{(ax+b)^\alpha}$, với $a \neq 0$.

Sử dụng đồng nhất thức:

$$x^2 = \frac{1}{a^2} \cdot a^2 x^2 = \frac{1}{a^2} [(ax + b) - b]^2 = \frac{1}{a^2} [(ax + b)^2 - 2b(ax + b) + b^2]$$

ta được:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(ax + b)^\alpha} &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{(ax + b)^2 - 2b(ax + b) + b^2}{(ax + b)^\alpha} \\ &= \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{(ax + b)^{\alpha-2}} - \frac{2b}{(ax + b)^{\alpha-1}} + \frac{b^2}{(ax + b)^\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a^2} \left[\int \frac{dx}{(ax + b)^{\alpha-2}} - \int \frac{2b dx}{(ax + b)^{\alpha-1}} + \int \frac{b^2 dx}{(ax + b)^\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{a^3} \left[\int \frac{d(ax + b)}{(ax + b)^{\alpha-2}} - \int \frac{2bd(ax + b)}{(ax + b)^{\alpha-1}} + \int \frac{b^2 d(ax + b)}{(ax + b)^\alpha} \right] \end{aligned}$$

Ta xét bốn trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\alpha = 1$, ta được:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a^3} \cdot \left[\int (ax + b) d(ax + b) - 2b \int d(ax + b) + b^2 \int \frac{d(ax + b)}{ax + b} \right] \\ &= \frac{1}{a^3} \cdot \left[\frac{(ax + b)^2}{2} - 2b(ax + b) + b^2 \ln|ax + b| \right] + C. \end{aligned}$$

Trường hợp 2: Với $\alpha = 2$, ta được:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a^3} \cdot \left[\int d(ax + b) - 2b \int \frac{d(ax + b)}{ax + b} + b^2 \int \frac{d(ax + b)}{(ax + b)^2} \right] \\ &= \frac{1}{a^3} \cdot \left[ax + b - 2b \ln|ax + b| - \frac{b^2}{ax + b} \right] + C. \end{aligned}$$

Trường hợp 3: Với $\alpha = 3$, ta được:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a^3} \left[\int \frac{d(ax + b)}{ax + b} - 2b \int \frac{d(ax + b)}{(ax + b)^2} + b^2 \int \frac{d(ax + b)}{(ax + b)^3} \right] \\ &= \frac{1}{a^3} \cdot \left[\ln|ax + b| - \frac{2b}{ax + b} - \frac{b^2}{4(ax + b)^2} \right] + C. \end{aligned}$$

Trường hợp 4: Với $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$, ta được:

$$I = \frac{1}{a^3} \left[\frac{(ax + b)^{3-\alpha}}{3-\alpha} - \frac{2b(ax + b)^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{b^2(ax + b)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] + C.$$

Ví dụ 3: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^{39}}.$

b. $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^{10}}.$

 **Giải**

a. Sử dụng đồng nhất thức:

$$x^2 = (1-x)^2 - 2(1-x) + 1$$

ta được:

$$\frac{x^2}{(1-x)^{39}} = \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^{39}} = \frac{1}{(1-x)^{37}} - \frac{2}{(1-x)^{38}} + \frac{1}{(1-x)^{39}}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{dx}{(1-x)^{37}} - \int \frac{2dx}{(1-x)^{38}} + \int \frac{dx}{(1-x)^{39}} \\ &= \frac{1}{36(1-x)^{36}} - \frac{2}{37(1-x)^{37}} + \frac{1}{38(1-x)^{38}} + C. \end{aligned}$$

b. Sử dụng đồng nhất thức: $x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

ta được:

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{(x-1)^{10}} &= \frac{1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3}{(x-1)^{10}} \\ &= \frac{1}{(x-1)^{10}} + \frac{3}{(x-1)^9} + \frac{3}{(x-1)^8} + \frac{1}{(x-1)^7}. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left[\frac{1}{(x-1)^{10}} + \frac{3}{(x-1)^9} + \frac{3}{(x-1)^8} + \frac{1}{(x-1)^7} \right] dx \\ &= -\frac{1}{9(x-1)^9} - \frac{3}{8(x-1)^8} - \frac{3}{7(x-1)^7} - \frac{1}{6(x-1)^6} + C. \end{aligned}$$



Chú ý: Các em học sinh có thể nhận thấy ngay rằng hàm số trong câu b) là mở rộng tự nhiên của hàm số trong a) nên các em cần có kiến thức trong việc tách đa thức (thực chất đó chính là công thức taylo).

DẠNG 3: Tìm $I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$, với $a \neq 0$ và n nguyên dương.

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $n = 1$ thì $\Delta = b^2 - 4ac$ và ta có ba khả năng:

Khả năng 1: Nếu $\Delta > 0$ thì:

$$\begin{aligned} \frac{1}{ax^2 + bx + c} &= \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a(x_1-x_2)} \cdot \frac{(x-x_2)-(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)} \\ &= \frac{1}{a(x_1-x_2)} \left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2} \right). \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{a(x_1 - x_2)} \int \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2} \right) dx \\ &= \frac{1}{a(x_1 - x_2)} [\ln|x - x_1| - \ln|x - x_2|] + C = \frac{1}{a(x_1 - x_2)} \cdot \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right| + C \end{aligned}$$

Khả năng 2: Nếu $\Delta = 0$ thì:

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x - x_0)^2}.$$

Do đó:

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(x - x_0)^2} = -\frac{1}{a(x - x_0)} + C.$$

Khả năng 3: Nếu $\Delta < 0$ thì thực hiện phép đổi biến $x = \tan t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Trường hợp 2: Nếu $n > 1$ thì bằng phép đổi biến $t = x + \frac{b}{2a}$, ta được:

$$I_n = \frac{1}{a^n} \int \frac{dt}{(t^2 + k)^n}.$$

Sử dụng phương pháp lấy nguyên hàm phân từng phần với phép đặt:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{(t^2 + k)^n} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{2ntdt}{(t^2 + k)^{n+1}} \\ dv = dt \\ v = t \end{cases} \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{a^n} \left[\frac{t}{(t^2 + k)^n} + 2n \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + k)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{1}{a^n} \left\{ \frac{t}{(t^2 + k)^n} + 2n \int \frac{[(t^2 + k) - k] dt}{(t^2 + k)^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{1}{a^n} \left\{ \frac{t}{(t^2 + k)^n} + 2n \left[\int \frac{dt}{(t^2 + k)^n} - k \int \frac{dt}{(t^2 + k)^{n+1}} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{a^n} \left[\frac{t}{(t^2 + k)^n} + 2n(I_n - kI_{n+1}) \right] \Leftrightarrow 2nkI_{n+1} = \frac{t}{(t^2 + k)^n} + (2n - a^n)I_n \\ &\Leftrightarrow 2(n - 1)kI_n = \frac{t}{(t^2 + k)^{n-1}} + (2n - 2 - a^{n-1})I_{n-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

 **Chú ý:** Vì công thức (1) không được trình bày trong phạm vi sách giáo khoa 12, do đó các em học khi làm bài không được phép sử dụng nó, hoặc nếu trong trường hợp được sử dụng thì đó là một công thức quá công kênh rất khó có thể nhớ được một cách chính xác. Do vậy, trong trường hợp $n > 1$ tốt nhất các em nên trình bày bài theo các bước sau:

Bước 1: Xác định I_1 .

Bước 2: Xác định I_n theo I_{n-1} (Chứng minh lại (1)).

Bước 3: Biểu diễn truy hồi I_n theo I_1 ta được kết quả cần tìm.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2mx + 3m + 4}$. Tìm $I = \int f(x)dx$ biết:

a. $m = -5$.

b. $m = -1$.

c. $m = 0$.

 **Giải**

a. Với $m = -5$, ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{dx}{x^2 - 10x - 11} = \int \frac{dx}{(x-11)(x+1)} = \frac{1}{12} \int \left(\frac{1}{x-11} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{12} \left(\int \frac{dx}{x-11} - \int \frac{dx}{x+1} \right) = \frac{1}{12} \left[\int \frac{d(x-11)}{x-11} - \int \frac{d(x+1)}{x+1} \right] \\ &= \frac{1}{12} (\ln|x-11| - \ln|x+1|) + C = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{x-11}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

 **Chú ý:** Sau khi đã có kiến thức ở dạng 1, ta có thể trình bày theo cách:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{dx}{x^2 - 10x - 11} = \int \frac{dx}{(x-5)^2 - 36} = \int \frac{dx}{(x-5)^2 - 6^2} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 6} \ln \left| \frac{(x-5)-6}{(x-5)+6} \right| + C = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{x-11}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

b. Với $m = -1$, ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1} = \int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + C.$$

c. Với $m = 0$ ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x^2 + 4}.$$

Đặt $x = 2\tan t$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra $dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}$.

Khi đó:

$$\int f(x)dx = \int \frac{2dt}{4 \tan^2 t + 4} = \frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C.$$

Ví dụ 5: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 4x + 3)^3}$.

 **Giải**

Xét tích phân $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 3)^n}$, ta lần lượt có:

a. Với $n = 1$ thì:

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \int \frac{dx}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + C.$$

b. Với $n > 1$, bằng phép đổi biến $t = x + 2$, ta được:

$$J_n = \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^n}$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với phép đặt:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{(t^2 - 1)^n} \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{2ntdt}{(t^2 - 1)^{n+1}} \\ v = t \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{t}{(t^2 - 1)^n} + 2n \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - 1)^{n+1}} = \frac{t}{(t^2 - 1)^n} + 2n \int \frac{[(t^2 - 1) + 1]dt}{(t^2 - 1)^{n+1}} \\ &= \frac{t}{(t^2 - 1)^n} + 2n \left[\int \frac{dt}{(t^2 - 1)^n} + \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^{n+1}} \right] = \frac{t}{(t^2 - 1)^n} + 2n(J_n + J_{n+1}) \\ \Leftrightarrow 2nJ_{n+1} &= -\frac{t}{(t^2 - 1)^n} - (2n - 1)J_n \Leftrightarrow 2(n - 1)J_n = -\frac{t}{(t^2 - 1)^{n-1}} - (2n - 3)J_{n-1} \\ \Leftrightarrow J_n &= -\frac{1}{2(n-1)} \left[\frac{t}{(t^2 - 1)^{n-1}} + (2n - 3)J_{n-1} \right] \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} J_2 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{t}{t^2 - 1} + J_1 \right). \\ J_3 &= -\frac{1}{4} \left[\frac{t}{(t^2 - 1)^2} + 3J_2 \right] = -\frac{1}{4} \left\{ \frac{t}{(t^2 - 1)^2} + 3 \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t}{t^2 - 1} + J_1 \right) \right\} \right\} \\ &= -\frac{x+2}{4(x^2 + 4x + 3)^2} + \frac{3(x+2)}{8(x^2 + 4x + 3)} + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + C. \end{aligned}$$

DẠNG 4: Tìm $I_n = \int \frac{(\lambda x + \mu)dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$, với $a \neq 0$ và n nguyên dương.

Ta đi phân tích:

$$\lambda x + \mu = \frac{\lambda}{2a}(2ax + b) + \mu - \frac{\lambda b}{2a}.$$

Khi đó:

$$I_n = \frac{\lambda}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{(ax^2 + bx + c)^n} + \left(\mu - \frac{\lambda b}{2a}\right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

a. Với $J_n = \int \frac{(2ax + b)dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$ thì:

▪ Nếu $n = 1$, ta được:

$$J_1 = \frac{\lambda}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{\lambda}{2a} \ln|ax^2 + bx + c| + C.$$

▪ Nếu $n > 1$, ta được:

$$J_n = \frac{\lambda}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = -\frac{\lambda}{2a(n-1)} \cdot \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + C.$$

b. Với $K_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$ ta đã biết cách xác định trong dạng 3.

 **Tổng quát hợp:** Trong phạm vi phổ thông chúng thường gặp tích phân bất định sau:

$$I = \int \frac{P(x)dx}{ax^2 + bx + c}, \text{ với } a \neq 0 \text{ và bậc của } P(x) \text{ lớn hơn 1.}$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thực hiện phép chia đa thức $P(x)$ cho $ax^2 + bx + c$ ta được:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} &= Q(x) + \frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c} \\ &= Q(x) + \frac{\lambda}{2a} \cdot \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + \left(\mu - \frac{\lambda b}{2a}\right) \frac{1}{ax^2 + bx + c} \end{aligned}$$

Bước 2: Khi đó:

$$I = \int Q(x)dx + \frac{\lambda}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{ax^2 + bx + c} + \left(\mu - \frac{\lambda b}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Tuy nhiên, trong trường hợp $ax^2 + bx + c$ có $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (ta được hai nghiệm x_1, x_2), chúng ta thực hiện phép phân tích:

$$\frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right).$$

Ví dụ 6: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^3 - 10x^2 + 16x - 1}{x^2 - 5x + 6}$.

 **Giải**

Biến đổi:

$$\begin{aligned}\frac{2x^3 - 10x^2 + 16x - 1}{x^2 - 5x + 6} &= 2x + \frac{4x - 1}{(x - 3)(x - 2)} = 2x + \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2} \\ &= 2x + \frac{A(x - 2) + B(x - 3)}{(x - 3)(x - 2)}.\end{aligned}$$

Ta được đồng nhất thức:

$$4x - 1 = A(x - 2) + B(x - 3). \quad (1)$$

Để xác định A, B trong (1) ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Phương pháp đồng nhất hệ số): Khai triển vế phải của (1) và sắp xếp đa thức theo thứ tự bậc lùi dần, ta có:

$$4x - 1 = (A + B)x - 2A - 3B.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A + B = 4 \\ -2A - 3B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 11 \\ B = -7 \end{cases}.$$

Cách 2: (Phương pháp trị số riêng): Lần lượt thay $x = 2$, $x = 3$ vào hai vế của (1) ta được hệ:

$$\begin{cases} A = 11 \\ B = -7 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{2x^3 - 10x^2 + 16x - 1}{x^2 - 5x + 6} = 2x + \frac{11}{x - 3} - \frac{7}{x - 2}.$$

Do đó:

$$\int f(x) dx = \int \left[2x + \frac{11}{x - 3} - \frac{7}{x - 2} \right] dx = x^2 + 11 \ln|x - 3| - 7 \ln|x - 2| + C.$$

 **Nhận xét:** Trong ví dụ trên việc xác định các hệ số A, B bằng hai cách có độ phức tạp gần giống nhau, tuy nhiên với bài toán cần phân tích thành nhiều nhân tử thì cách 2 thường tỏ ra đơn giản hơn.

DẠNG 5: Tìm $I = \int \frac{(a_1x^2 + b_1x + c_1)dx}{(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)}$, với $a \neq 0$.

Ta xét ba khả năng của $\Delta = b^2 - 4ac$.

Khả năng 1: Nếu $\Delta > 0$, khi đó $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Ta có phân tích:

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - x_1} + \frac{C}{x - x_2}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - x_1} + \frac{C}{x - x_2} \right) dx \\ &= A \ln|x - \alpha| + B \ln|x - x_1| + C \ln|x - x_2| + C \end{aligned}$$

Khả năng 2: Nếu $\Delta = 0$, khi đó $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

Ta có phân tích:

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - x_0} + \frac{C}{(x - x_0)^2}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \int \left[\frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - x_0} + \frac{C}{(x - x_0)^2} \right] dx \\ &= A \ln|x - \alpha| + B \ln|x - x_0| - \frac{C}{x - x_0} + C. \end{aligned}$$

Khả năng 3: Nếu $\Delta < 0$

Khi đó phân tích:

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B(2ax + b)}{ax^2 + bx + c} + \frac{C}{ax^2 + bx + c}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \int \left[\frac{A}{x - \alpha} + \frac{B(2ax + b)}{ax^2 + bx + c} + \frac{C}{ax^2 + bx + c} \right] dx \\ &= A \ln|x - \alpha| + B \ln|ax^2 + bx + c| + C \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}. \end{aligned}$$

Trong đó tích phân $J = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ được xác định bằng phép đổi biến

$$x = \tan t \text{ với } t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right).$$

 **Tổng quát:** Để tìm nguyên hàm:

$$I = \int \frac{P(x)dx}{(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)}, \text{ với } a \neq 0 \text{ và bậc của } P(x) \text{ lớn hơn 2.}$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thực hiện phép chia đa thức $P(x)$ cho $(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$ ta được:

$$\frac{P(x)}{(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)} = Q(x) + \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)}$$

Bước 2: Khi đó:

$$I = \int Q(x)dx + \int \frac{(a_1x^2 + b_1x + c_1)dx}{(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)}.$$

Ví dụ 7: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. (ĐHQG HN Khối D – 1999): $f(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}.$

b. (ĐHNT HN – 1998): $f(x) = \frac{x^4 - 2}{x^3 - x}.$

 **Giải**

a. Ta biến đổi:

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(x-1)(x+1)}.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{1}{x(x+1)^2} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx \\ &= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$

b. Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - 2}{x^3 - x} &= x + \frac{x^2 - 2}{x^3 - x} = x + \frac{x^2 - 2}{x(x^2 - 1)} = x + \frac{x^2 - 2}{x(x-1)(x+1)} \\ &= x + \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} = \frac{(a+b+c)x^2 + (b-c)x - a}{x(x-1)(x+1)}. \end{aligned}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ b-c=0 \\ -a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=c=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^4 - 2}{x^3 - x} = x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{x^4 - 2}{x^3 - x} dx = \int \left(x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 + 2 \ln|x| - \frac{1}{2} (\ln|x-1| + \ln|x+1|) + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 + 2 \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C\end{aligned}$$

Ví dụ 8: (ĐHQG HN Khối D – 1995): Cho hàm số $f(x) = \frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2}$

- a. Xác định các hằng số a, b, c để $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$.
- b. Tìm họ nguyên hàm của $f(x)$.

 **Giải**

a. Với giả thiết:

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2} &= \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2} \\ &= \frac{(b+c)x^2 + (a+b-2c)x + 2a-2b+c}{(x+2)(x-1)^2}\end{aligned}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} b+c=3 \\ a+b-2c=3 \\ 2a-2b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

b. Khi đó:

$$\frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2}.$$

Do đó:

$$\int f(x)dx = \int \left[\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2} \right] dx = -\frac{3}{x-1} + 2 \ln|x-1| + \ln|x+2| + C.$$

Ví dụ 9: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x^3 + 1}$.

 **Giải**

Biến đổi:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 2x - 2}{x^3 + 1} &= \frac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B(2x-1)}{x^2 - x + 1} + \frac{C}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{(A+2B)x^2 - (A-B-C)x + A-B+C}{x^3 + 1}.\end{aligned}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A + 2B = 1 \\ -A + B + C = 2 \\ A - B + C = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 0 \end{cases}$$

Khi đó:

$$\frac{x^2 + 2x - 2}{x^3 + 1} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2-x+1}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2-x+1} \right) dx = -\ln|x+1| + \ln|x^2-x+1| + C \\ &= \ln \left| \frac{x^2-x+1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

DANG 6: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2}$, với $a \neq b$.

Sử dụng đồng nhất thức:

$$\left[\frac{(x+a)-(x+b)}{a-b} \right]^2 = 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} &= \left[\frac{(x+a)-(x+b)}{(a-b)(x+a)(x+b)} \right]^2 = \frac{1}{(a-b)^2} \left[\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a} \right]^2 \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} \left[\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{(x+a)(x+b)} + \frac{1}{(x+a)^2} \right] \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} \left[\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{a-b} \cdot \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+b)(x+a)} + \frac{1}{(x+a)^2} \right] \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} \left[\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{a-b} \left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a} \right) + \frac{1}{(x+a)^2} \right] \end{aligned}$$

ta được:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \frac{1}{(a-b)^2} \left[\int \frac{1dx}{(x+b)^2} - \frac{2}{a-b} \left(\int \frac{1dx}{x+b} - \int \frac{1dx}{x+a} \right) + \int \frac{1dx}{(x+a)^2} \right] \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} \left[-\frac{1}{x+b} - \frac{2}{a-b} (\ln|x+b| - \ln|x+a|) - \frac{1}{x+a} \right] + C \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} \left[\frac{2}{a-b} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| - \frac{2x+a+b}{(x+b)(x+a)} \right] + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 10: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2(x+1)^2}$.

 **Giải**

Sử dụng đồng nhất thức:

$$\left[\frac{(x+3) - (x+1)}{2} \right]^2 = 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+3)^2(x+1)^2} &= \left[\frac{(x+3) - (x+1)}{2(x+3)(x+1)} \right]^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{(x+3) - (x+1)}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x+3)^2} \right]. \end{aligned}$$

ta được:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{4} \left[\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{dx}{(x+3)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + \ln|x+3| - \frac{1}{x+3} \right] + C \\ &= \frac{1}{4} \left[\ln \left| \frac{x+3}{x+1} \right| - \frac{2x+4}{(x+1)(x+3)} \right] + C. \end{aligned}$$

 **Tổng quát:** Để tìm nguyên hàm $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ bằng phương pháp hệ số

bất định ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Phân tích $Q(x)$ thành các đa thức bất khả quy, giả sử là:

$$Q(x) = A^n(x) \cdot B^m(x) \cdot C^k(x), \text{ với } n, m, k \in \mathbb{N}.$$

trong đó $A(x), B(x), C(x)$ là đa thức bậc hai hoặc bậc nhất.

Bước 2: Khi đó ta phân tích:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= D(x) + \frac{E(x)}{A^n(x) \cdot B^m(x) \cdot C^k(x)} \\ &= D(x) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{a_i^1 \cdot A'(x)}{A^i(x)} + \frac{a_i^2}{A^i(x)} \right] + \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \left[\frac{b_j^1 \cdot B'(x)}{B^j(x)} + \frac{b_j^2}{B^j(x)} \right] + \sum_{t=1}^k \left[\frac{c_t^1 \cdot C'(x)}{C^t(x)} + \frac{c_t^2}{C^t(x)} \right] \end{aligned}$$

Xác định được các hệ số $a_1^i, a_2^i, b_1^j, b_2^j, c_1^t, c_2^t$ bằng phương pháp hệ số bất định..

Bước 3: Xác định:

$$I = \int D(x)dx + \sum_{i=1}^n \int \left[\frac{a_1^i \cdot A'(x)}{A^i(x)} + \frac{a_2^i}{A^i(x)} \right] + \\ + \sum_{j=1}^m \int \left[\frac{b_1^j \cdot B'(x)}{B^j(x)} + \frac{b_2^j}{B^j(x)} \right] + \sum_{t=1}^k \int \left[\frac{c_1^t \cdot C'(x)}{C^t(x)} + \frac{c_2^t}{C^t(x)} \right]$$

Ví dụ 11: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{7x-4}{x^3-3x+2}$.

 **Giải**

Ta biến đổi:

$$\frac{7x-4}{x^3-3x+2} = \frac{7x-4}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2} \\ = \frac{(b+c)x^2 + (a+b-2c)x + 2a-2b+c}{(x+2)(x-1)^2}$$

Ta được đồng nhất thức:

$$7x-4 = a(x+2) + b(x-1)(x+2) + c(x-1)^2. \quad (1)$$

Để xác định a, b, c trong (1) ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Phương pháp đồng nhất hệ số): Khai triển vế phải của (1) và sắp xếp đa thức theo thứ tự bậc lùi dần, ta có:

$$7x-4 = (b+c)x^2 + (a+b-2c)x + 2a-2b+c.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} b+c=0 \\ a+b-2c=7 \\ 2a-2b+c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-2 \end{cases}.$$

Cách 2: (Phương pháp trị số riêng): Lần lượt thay $x=0, x=2, x=3$ vào hai vế của (1) ta được hệ:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{7x-4}{x^3-3x+2} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2}.$$

Do đó:

$$\int f(x)dx = \int \left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2} \right] dx = -\frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C.$$

Ví dụ 12: (ĐHQG HN Khối A – 2000): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{x^{2001}}{(x^2 + 1)^{1002}}.$$

 **Giải**

Ta biến đổi:

$$f(x) = \frac{x^{2000}}{(x^2 + 1)^{1000}} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x^{2000}}{(x^2 + 1)^{1000}} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right)^{1000} d\left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1001} \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right)^{1001} + C = \frac{1}{2002} \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right)^{1001} + C. \end{aligned}$$

DẠNG 7: (Phương pháp đổi biến): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{x^{k-1} \cdot P(x^k)}{Q(x^k)}.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt $t = x^k$, suy ra $dt = kx^{k-1} dx$. Khi đó:

$$I = \frac{1}{k} \int \frac{P_1(t) dt}{Q_1(t)}. \quad (1)$$

trong đó $P_1(x)$, $Q_1(x)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn $P(x)$ và $Q(x)$.

Bước 2: Tính tích phân trong (1).

 **Chú ý:** Ta nhận thấy sự mở rộng tự nhiên với dạng:

$$I = \int \frac{\varphi'(x) \cdot P[\varphi(x)] dx}{Q[\varphi(x)]} \text{ trong đó } \varphi(x) \text{ là một đa thức bậc } k \text{ của } x.$$

Khi đó đặt $t = \varphi(x)$.

Ví dụ 13: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3}{(x^8 - 4)^2}$.

 **Giải**

Đặt $t = x^4$, suy ra:

$$dt = 4x^3 dx \text{ \& } \frac{x^3 dx}{(x^8 - 4)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{dt}{(t^2 - 4)^2}.$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t^2 - 4)^2}.$$

Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{1}{16} [(t+2) - (t-2)]^2$$

Ta được:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{64} \int \frac{[(t+2) - (t-2)]^2}{(t^2-4)^2} dt = \frac{1}{64} \int \left[\frac{1}{(t-2)^2} - \frac{2}{t^2-4} + \frac{1}{(t+2)^2} \right] dt \\ &= \frac{1}{64} \left[-\frac{1}{t-2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| - \frac{1}{t+2} \right] + C \\ &= -\frac{1}{64} \left(\frac{2t}{t^2-4} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| \right) + C = -\frac{1}{64} \left(\frac{2x^4}{x^8-4} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^4-2}{x^4+2} \right| \right) + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 14: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}$.

 **Giải**

Biến đổi:

$$\int f(x) dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + x^2} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} dx.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ suy ra:

$$dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \quad \& \quad \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} = \frac{dt}{t^2 - 2}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{dt}{t^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để tìm được nguyên hàm của hàm số trên chúng ta cần tới một phép biến đổi đại số để làm xuất hiện ẩn phụ. Ngược lại, chúng ta đôi khi cần sử dụng ẩn phụ để chuyển hàm số $f(x)$ về dạng đơn giản hơn trước khi thực hiện các phép phân tích đại số.

Ví dụ 15: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x(x^4 + 3x^2 + 2)}$.

 *Giải*

Đặt $t = x^2$, suy ra:

$$dt = 2x dx \text{ \& } \frac{x^2 - 3}{x(x^4 + 3x^2 + 2)} dx = \frac{(t - 3)dt}{t(t + 1)(t + 2)} dt.$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \int \frac{t - 3}{t(t + 1)(t + 2)} dt$$

Ta có:

$$\frac{t - 3}{t(t + 1)(t + 2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t + 1} + \frac{c}{t + 2} = \frac{(a + b + c)t^2 + (3a + 2b + c)t + 2a}{t(t + 1)(t + 2)}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 1 \\ 2a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3/2 \\ b = 4 \\ c = -5/2 \end{cases} \Rightarrow \frac{t - 3}{t(t + 1)(t + 2)} = -\frac{3}{2} \frac{1}{t} + \frac{4}{t + 1} - \frac{5}{2} \frac{1}{t + 2}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(-\frac{3}{2} \frac{1}{t} + \frac{4}{t + 1} - \frac{5}{2} \frac{1}{t + 2} \right) dt = -\frac{3}{2} \ln|t| + 4 \ln|t + 1| - \frac{5}{2} \ln|t + 2| + C \\ &= -\frac{3}{2} \ln(x^2) + 4 \ln(x^2 + 1) - \frac{5}{2} \ln(x^2 + 2) + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 16: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1 - x^4}{x(1 + x^4)}$.

 *Giải*

Đặt $t = x^4$, suy ra:

$$dt = 4x^3 dx \text{ \& } \frac{1 - x^4}{x(1 + x^4)} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - t}{t(1 + t)} dt$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - t}{t(1 + t)} dt.$$

Ta có:

$$\frac{1 - t}{t(1 + t)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t + 1} = \frac{(a + b)t + a}{t(t + 1)}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1 - t}{t(1 + t)} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t + 1}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t+1} \right) dt = \ln|t| - 2\ln|t+1| + C = \ln \frac{|t|}{(t+1)^2} + C \\ &= \ln \frac{x^4}{(x^4+1)^2} + C.\end{aligned}$$

DANG 8: (Phương pháp nguyên hàm từng phần): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{P(x)Q'(x)}{Q^n(x)}.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \frac{Q'(x)dx}{Q^n(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}.$$

Bước 2: Khi đó, ta được:

$$\int f(x)dx = uv - \int vdu.$$

Ví dụ 17: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^4}{(x^2-1)^3}$.

 **Giải**

Biến đổi:

$$\int f(x)dx = \int \frac{x^3 \cdot xdx}{(x^2-1)^3}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = x^3 \\ dv = \frac{xdx}{(x^2-1)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3x^2dx \\ v = -\frac{1}{4(x^2-1)^2} \end{cases}$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = -\frac{x^3}{4(x^2-1)^2} + \underbrace{\frac{3}{4} \int \frac{x^2dx}{(x^2-1)^2}}_J. \quad (1)$$

Xét tích phân J bằng cách biến đổi:

$$\begin{aligned}J &= \frac{1}{4} \int \frac{[(x+1) + (x-1)]^2 dx}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{x-1} + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{x+1} \right) + C = \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{2x}{x^2-1} \right) + C. \quad (2)\end{aligned}$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\int f(x)dx = -\frac{x^3}{4(x^2-1)^3} + \frac{3}{16} \left(\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{2x}{x^2-1} \right) + C.$$

 **Chú ý:** Để xác định tích phân J chúng ta cũng có thể tiếp tục sử dụng tích phân từng phần, như sau:

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{xdx}{(x^2-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2(x^2-1)} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = -\frac{x}{2(x^2-1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{x}{2(x^2-1)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|.$$

Vấn đề 4: PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ VÔ TỈ

Để tìm nguyên hàm các hàm số vô tỉ ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Phương pháp tam thức bậc hai.
2. Phương pháp phân tích.
3. Phương pháp đổi biến.
4. Phương pháp tích phân từng phần.
5. Sử dụng các phương pháp khác nhau.

Sau đây chúng ta cùng đi xem xét từng dạng.

DẠNG 1: Tìm nguyên hàm các hàm vô tỉ dựa trên tam thức bậc hai

Trên cơ sở đưa tam thức bậc hai về dạng chính tắc và dùng các công thức sau:

$$1. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \sqrt{x^2 \pm a} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C.$$

$$3. \int \sqrt{x^2 \pm a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a} \pm \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C.$$

Ví dụ 1: Tìm:

a. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

b. $\int \frac{(2x + 1) dx}{\sqrt{2x^2 + 2x}}.$

 **Giải**

a. Ta có thể lựa chọn các cách trình bày sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{d(x^2 + 1)}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + C.$$

Cách 2: Đặt $u = x^2 + 1$, suy ra:

$$du = 2x dx \Leftrightarrow x dx = \frac{1}{2} du.$$

Từ đó:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 + 1} + C.$$

Cách 3: Đặt $u = \sqrt{x^2 + 1}$, suy ra:

$$u^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2u du = 2x dx \Leftrightarrow x dx = u du.$$

Từ đó:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{u du}{u} = \int du = u + C = \sqrt{x^2 + 1} + C.$$

b. Ta có thể lựa chọn các cách trình bày sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$\int \frac{(2x + 1) dx}{\sqrt{2x^2 + 2x}} = \int \frac{d(2x^2 + 2x)}{2\sqrt{2x^2 + 2x}} = \sqrt{2x^2 + 2x} + C.$$

Cách 2: Đặt $u = 2x^2 + 2x$, suy ra:

$$du = (4x + 2) dx = 2(2x + 1) dx \Leftrightarrow (2x + 1) dx = \frac{1}{2} du.$$

Từ đó:

$$\int \frac{(2x + 1) dx}{\sqrt{2x^2 + 2x}} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{2x^2 + 2x} + C.$$

Cách 3: Đặt $u = \sqrt{2x^2 + 2x}$, suy ra:

$$u^2 = 2x^2 + 2x \Rightarrow 2u du = (4x + 2) dx = 2(2x + 1) dx \Leftrightarrow (2x + 1) dx = u du.$$

Từ đó:

$$\int \frac{(2x + 1) dx}{\sqrt{2x^2 + 2x}} = \int \frac{u du}{u} = \int du = u + C = \sqrt{2x^2 + 2x} + C.$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a}}$.

b. (ĐHY TB – 2000): $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 1}}$.

 *Giải*

a. Đặt $t = x + \sqrt{x^2 - a}$ suy ra:

$$dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a}}\right) dx = \frac{\sqrt{x^2 - a} + x}{\sqrt{x^2 - a}} dx = \frac{tdx}{\sqrt{x^2 - a}} \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a}} = \frac{dt}{t}.$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 - a}| + C.$$

b. Ta có thể lựa chọn các cách trình bày sau:

Cách 1: Ta có:

$$\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}}.$$

$$\text{Đặt } t = x - \frac{1}{2} \Rightarrow dt = dx.$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{5}{4}}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 - \frac{5}{4}} \right| + C = \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x - 1} \right| + C.$$

Cách 2: Ta có:

$$\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}}.$$

$$\text{Đặt } t = x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x - 1} \text{ suy ra:}$$

$$dt = \left(1 + \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 1}}\right) dx = \left(1 + \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 - x - 1}}\right) dx = \frac{\left(\sqrt{x^2 - x - 1} + x - \frac{1}{2}\right) dx}{\sqrt{x^2 - x - 1}}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 1}} = \frac{dt}{t}.$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 1}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x - 1} \right| + C.$$

Ví dụ 3: (ĐHY HN – 1999): *Biết rằng* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = \ln(x + \sqrt{x^2+3}) + C$.

Tìm nguyên hàm $I = \int \sqrt{x^2+3} dx$.

 *Giải*

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2+3} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} dx \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= x\sqrt{x^2+3} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+3}} = x\sqrt{x^2+3} - \int \frac{(x^2+3-3)dx}{\sqrt{x^2+3}} \\ &= x\sqrt{x^2+3} - \int \sqrt{x^2+3} dx + \int \frac{3dx}{\sqrt{x^2+3}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2I = x\sqrt{x^2+3} + 3\ln(x + \sqrt{x^2+3}) + C.$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+3} + \frac{3}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+3}) + C.$$

 **Chú ý:** Với các em học sinh đã có kinh nghiệm trong việc tính nguyên hàm có thể trình bày theo cách sau:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+3} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x^2+6}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{x^2+3} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} \right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x\sqrt{x^2+3})' + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int (x\sqrt{x^2+3})' dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} \\ &= \frac{1}{2} x\sqrt{x^2+3} + \frac{3}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+3}) + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 4: *Tìm nguyên hàm của hàm số* $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

 *Giải*

Ta có:

$$\int f(x) dx = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{[(x^2+1)-1] dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \sqrt{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{x}{2} \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln|x+\sqrt{x^2+1}| - \ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C \\
&= \frac{x}{2} \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C.
\end{aligned}$$

DẠNG 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$, với $a > 0$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Vì điều kiện:

$$\frac{x-a}{x+a} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x < -a \end{cases},$$

ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $x \geq a$ thì:

$$\begin{aligned}
\int f(x) dx &= \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx = \int \frac{(x-a)dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{2xdx}{2\sqrt{x^2-a^2}} - a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \\
&= \sqrt{x^2-a^2} - \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C.
\end{aligned}$$

Trường hợp 2: Với $x < -a$ thì:

$$\begin{aligned}
\int f(x) dx &= \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx = - \int \frac{(x-a)dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = - \int \frac{2xdx}{2\sqrt{x^2-a^2}} + a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \\
&= -\sqrt{x^2-a^2} + \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C.
\end{aligned}$$

Cách 2: Đặt:

$$t = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} \Rightarrow t^2 = \frac{x-a}{x+a} \Rightarrow x = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{4at \cdot dt}{(1-t^2)^2}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
\int f(x) dx &= \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx = \int \frac{4at^2 \cdot dt}{(1-t^2)^2} = 4a \int \frac{[(t^2-1)+1] \cdot dt}{(t^2-1)^2} \\
&= 4a \left[\underbrace{\int \frac{dt}{t^2-1}}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2-1)^2}}_{I_2} \right].
\end{aligned}$$

Các nguyên hàm I_1 và I_2 chúng ta đã biết cách tìm.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

 *Giải*

Vì điều kiện: $\frac{x-1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < -1 \end{cases}$, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $x \geq 1$ thì:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{2x dx}{2\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \sqrt{x^2-1} - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C. \end{aligned}$$

Trường hợp 2: Với $x < -1$ thì:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = - \int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-1}} = - \int \frac{2x dx}{2\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= -\sqrt{x^2-1} + \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C. \end{aligned}$$

DẠNG 3: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{dx}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{ax+c}}$, với $a \neq 0$ và

$$b - c \neq 0.$$

Khử tính vô tỉ ở mẫu số bằng cách trục căn thức, ta được:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{b-c} \int (\sqrt{ax+b} + \sqrt{ax+c}) dx \\ &= \frac{1}{a(b-c)} [\int (ax+b)^{1/2} d(ax+b) + \int (ax+c)^{1/2} d(ax+c)] \\ &= \frac{2}{3a(b-c)} [\sqrt{(ax+b)^3} + \sqrt{(ax+c)^3}] + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 1: (ĐHKTQD HN – 99): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \tan x + \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}}.$$

 *Giải*

Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(\tan x + \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}} \right) dx \\ &= \int \frac{\sin x \cdot dx}{\cos x} + \int \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}}{2} dx \\ &= -\ln|\cos x| + \frac{1}{3} [(2x+1)^{3/2} - (2x-1)^{3/2}] + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: (Đề 71 – Bộ đề 1996): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

 **Giải**

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Sử dụng phương pháp biến đổi): Ta có:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{2x(x - \sqrt{x^2 - 1})}{x^2 - x^2 + 1} dx = \int 2x^2 dx - \int 2x\sqrt{x^2 - 1} dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \int \sqrt{x^2 - 1} d(x^2 - 1) + C = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 - 1)^3} + C.\end{aligned}$$

Cách 2: (Sử dụng phương pháp đổi biến số): Đặt $t = x + \sqrt{x^2 - 1}$ ta có:

$$t - x = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x = \frac{t^2 + 1}{2t} \Rightarrow dx = \frac{t^2 - 1}{2t^2} dt.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{2x dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{2 \cdot \frac{t^2 + 1}{2t} \cdot \frac{t^2 - 1}{2t^2} dt}{t} = \int \frac{(t^4 - 1)dt}{2t^4} = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t^4}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{3t^3}\right) + C = \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 - 1}) + \frac{1}{6(x + \sqrt{x^2 - 1})^3} + C.\end{aligned}$$

DANG 4: Tìm nguyên hàm của hàm số vô tỉ sử dụng các đồng nhất thức.

Ví dụ 1: (HV BCVT TPHCM – 99): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[10]{x+1}}.$$

 **Giải**

Sử dụng đồng nhất thức $x = x + 1 - 1$, ta được:

$$f(x) = \frac{x + 1 - 1}{\sqrt[10]{x+1}} = (x+1)^{9/10} - (x+1)^{-1/10}.$$

Do đó:

$$\int f(x)dx = \int [(x+1)^{9/10} - (x+1)^{-1/10}] dx = \frac{10}{19} (x+1)^{19/10} - \frac{10}{9} (x+1)^{9/10} + C.$$

DANG 5: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{v(x)dx}{\sqrt{u^2(x) \pm \alpha}}$.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Phân tích:

$$\frac{v(x)}{\sqrt{u^2(x) + \alpha}} = \frac{a[u^2(x) + \alpha]}{\sqrt{u^2(x) + \alpha}} + \frac{bu(x)}{\sqrt{u^2(x) + \alpha}} + \frac{c}{\sqrt{u^2(x) + \alpha}}.$$

Sử dụng phương pháp hằng số bất định ta xác định được a, b, c.

Bước 2: Áp dụng các công thức:

$$1. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \sqrt{x^2 \pm a} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$$

$$3. \int \sqrt{x^2 \pm a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a} \pm \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$.

 **Giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} &= \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}} = \frac{a[(x+1)^2 - 1]}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}} + \frac{b(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}} + \frac{c}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}} \\ &= \frac{ax^2 + (2a+b)x + b+c}{\sqrt{x^2 + 2x}}. \end{aligned}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} = 2\sqrt{(x+1)^2 - 1} - \frac{4(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}} + \frac{5}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left[2\sqrt{(x+1)^2 - 1} - \frac{4(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}} + \frac{5}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}} \right] dx \\ &= (x+1)\sqrt{x^2 + 2x} - \ln|x+1 + \sqrt{x^2 + 2x}| - 4\sqrt{x^2 + 2x} + \\ &\quad + 5\ln|x+1 + \sqrt{x^2 + 2x}| + C \\ &= (x+1)\sqrt{x^2 + 2x} + 4\ln|x+1 + \sqrt{x^2 + 2x}| - 4\sqrt{x^2 + 2x} + C. \end{aligned}$$

DẠNG 6: (Phương pháp đổi biến): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với:

$$\begin{cases} x+a > 0 \\ x+b > 0 \end{cases}.$$

Đặt $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$, suy ra:

$$dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+a}} + \frac{1}{2\sqrt{x+b}} \right) dx = \frac{(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b})dx}{2\sqrt{(x+a)(x+b)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = \frac{2dt}{t}$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = 2 \int \frac{dt}{t} = 2\ln|t| + C = 2\ln|\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}| + C.$$

Trường hợp 2: Với:

$$\begin{cases} x+a < 0 \\ x+b < 0 \end{cases}.$$

Đặt $t = \sqrt{-(x+a)} + \sqrt{-(x+b)}$, suy ra:

$$dt = \left[-\frac{1}{2\sqrt{-(x+a)}} - \frac{1}{2\sqrt{-(x+b)}} \right] dx = -\frac{[\sqrt{-(x+a)} + \sqrt{-(x+b)}]dx}{2\sqrt{(x+a)(x+b)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = -\frac{2dt}{t}.$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = -2 \int \frac{dt}{t} = -2\ln|t| + C = -2\ln|\sqrt{-(x+a)} + \sqrt{-(x+b)}| + C$$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$.

 **Giải**

Biến đổi I về dạng:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}.$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với:

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Đặt $t = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}$, suy ra:

$$dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}} + \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \right) dx = \frac{(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3})dx}{2\sqrt{(x-2)(x-3)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = \frac{2dt}{t}.$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = 2 \int \frac{dt}{t} = 2\ln|t| + C = 2\ln|\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}| + C.$$

Trường hợp 2: Với:

$$\begin{cases} x-2 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 2.$$

Đặt $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x}$, suy ra:

$$dt = \left[-\frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} \right] dx = -\frac{[\sqrt{2-x} + \sqrt{3-x}]dx}{2\sqrt{(x-2)(x-3)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = -\frac{2dt}{t}.$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = -2 \int \frac{dt}{t} = -2\ln|t| + C = -2\ln|\sqrt{2-x} + \sqrt{3-x}| + C.$$

DẠNG 7: (Phương pháp đổi biến): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$I = \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx, \text{ với } a > 0.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} x = |a| \sin t \text{ với } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ (hoặc có thể } t = x + \sqrt{a^2 - x^2} \text{)}. \\ x = |a| \cos t \text{ với } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

Bước 2: Bài toán được chuyển về $I = \int S(\sin t, \cos t)dt$.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$.

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đặt $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra:

$$dx = \cos t \cdot dt \text{ \& } \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin^3 t \cdot \cos t dt}{\cos t} = \sin^3 t \cdot dt = \frac{1}{4} (3 \sin t - \sin 3t) dt.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{4} \int (3 \sin t - \sin 3t) dt = -\frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{12} \cos 3t + C \\ &= -\frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{12} (4 \cos^3 t - 3 \cos t) + C = \frac{1}{3} \cos^3 t - \cos t + C \\ &= \left(\frac{1}{3} \cos^2 t - 1 \right) \cos t + C = \left[\frac{1}{3} (1 - \sin^2 t) - 1 \right] \cos t + C \\ &= \left[\frac{1}{3} (1 - x^2) - 1 \right] \sqrt{1-x^2} + C = -\frac{1}{3} (x^2 + 2) \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

 **Chú ý:** Trong cách giải trên ta có:

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \\ \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2} \end{cases}.$$

Cách 2: Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$, suy ra $x^2 = 1 - t^2$, từ đó:

$$2x dx = -2t dt \text{ \& } \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2 \cdot x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-t^2)(-t dt)}{t} = (t^2 - 1) dt.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (t^2 - 1) dt = \frac{1}{3} t^3 - t + C = \frac{1}{3} (t^2 - 3) t + C \\ &= -\frac{1}{3} (x^2 + 2) \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

DẠNG 8: (Phương pháp đổi biến): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$I = \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \text{ với } a > 0.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} x = a \tan t \text{ với } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ (hoặc có thể } t = x + \sqrt{a^2 + x^2} \text{).} \\ x = a \cot t \text{ với } 0 < t < \pi \end{cases}$$

Bước 2: Bài toán được chuyển về $I = \int S(\sin t, \cos t) dt$.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đặt $x = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra:

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \text{ \& } \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{dt}{\cos^3 t}.$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^4 t} = \int \frac{\cos t dt}{(1 - \sin^2 t)^2}.$$

Đặt $u = \sin t$ suy ra:

$$du = \cos t dt \text{ \& } \frac{\cos t dt}{(1 - \sin^2 t)^2} = \frac{du}{(u+1)^2(u-1)^2}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{du}{(u+1)^2(u-1)^2} = \frac{1}{4} \left[\ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| - \frac{2u}{(u+1)(u-1)} \right] + C \\ &= \frac{1}{4} \left[\ln \left| \frac{\sin t + 1}{\sin t - 1} \right| - \frac{2 \sin t}{(\sin t + 1)(\sin t - 1)} \right] + C \\ &= \frac{1}{4} \left[\ln \left| \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1} \right| - \frac{2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1)(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1)} \right] + C \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{1+x^2}} \right| + 2x\sqrt{1+x^2} \right) + C \\ &= \frac{1}{4} (2 \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + 2x\sqrt{1+x^2}) + C \\ &= \frac{1}{2} (\ln |x + \sqrt{1+x^2}| + x\sqrt{1+x^2}) + C \end{aligned}$$

Cách 2: Đặt $t = x + \sqrt{1+x^2}$, suy ra:

$$\begin{aligned} t - x &= \sqrt{1+x^2} \Rightarrow (t-x)^2 = 1+x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t} \\ \Rightarrow \sqrt{1+x^2} &= t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t} \\ \Rightarrow dt &= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{2t^2}{t^2+1} dx \Leftrightarrow dx = \frac{t^2+1}{2t^2} dt, \\ \sqrt{1+x^2} \, dx &= \frac{t^2+1}{2t} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2} dt = \frac{1}{4} \frac{(t^2+1)^2}{t^3} dt = \frac{1}{4} \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \frac{1}{4} \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}t^2 + 2\ln|t| - \frac{1}{2t^2}\right) + C \\ &= \frac{1}{8} \left[\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + 4\ln|t|\right] + C = \frac{1}{8} [4x\sqrt{1+x^2} + 4\ln|x + \sqrt{1+x^2}|] + C \\ &= \frac{1}{2} (\ln|x + \sqrt{1+x^2}| + x\sqrt{1+x^2}) + C.\end{aligned}$$

Cách 3: (Sử dụng phương pháp tích phân từng phần): Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + 1} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ v = x \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = \int f(x)dx = x\sqrt{x^2 + 1} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}. \quad (1)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \int \frac{[(x^2 + 1) - 1]dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int \sqrt{x^2 + 1} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= I - \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| + C.\end{aligned} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\begin{aligned}I &= x\sqrt{x^2 + 1} - (I - \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| + C) \\ \Leftrightarrow 2I &= x\sqrt{x^2 + 1} + \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| + C \\ \Leftrightarrow I &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| + C.\end{aligned}$$

 **Chú ý:**

1. Trong cách giải thứ nhất sử dụng ta có:

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t} \text{ và } \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

là bởi:

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \\ \sin t = \tan t \cdot \cos t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

2. Cả ba phương pháp trên (tốt nhất là phương pháp 2) được áp dụng để tìm các nguyên hàm:

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$$

3. Với nguyên hàm $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^{2k+1}}}$, với $k \in \mathbb{Z}$ tốt nhất là sử dụng phương pháp 1.

4. Với nguyên hàm $I = \int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx$ ta có thể thực hiện như sau:

Đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$ & $A = -\frac{(b-a)^2}{4}$, suy ra:

$$dt = dx \text{ \& } \sqrt{(x+a)(x+b)} dx = \sqrt{t^2 + A} dt.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{t^2 + A} dt = \frac{A}{2} \ln|t + \sqrt{t^2 + A}| + \frac{t}{2} \sqrt{t^2 + A} + C. \\ &= -\frac{(b-a)^2}{8} \ln|x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x+a)(x+b)}| + \\ &\quad + \frac{2x+a+b}{4} \sqrt{(x+a)(x+b)} + C. \end{aligned}$$

DANG 9: (Phương pháp đổi biến): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$I = \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, \text{ với } a > 0.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} x = \frac{|a|}{\sin t} & \text{với } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ x = \frac{|a|}{\cos t} & \text{với } t \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \end{cases} \quad (\text{hoặc có thể } t = \sqrt{x^2 - a^2}).$$

Bước 2: Bài toán được chuyển về $I = \int S(\sin t, \cos t) dt$.

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{2x^2 - 1 + 3\sqrt{x^2 - 1}}$.

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đặt $t = \sqrt{x^2 - 1}$ thì $t^2 = x^2 - 1$, suy ra:

$$2tdt = 2xdx \text{ \& } \frac{xdx}{2x^2 - 1 + 3\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{xdx}{2(x^2 - 1) + 3\sqrt{x^2 - 1} + 1} = \frac{tdt}{2t^2 + 3t + 1}$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \int \frac{tdt}{2t^2 + 3t + 1}.$$

Ta có:

$$\frac{t}{2t^2 + 3t + 1} = \frac{t}{(2t+1)(t+1)} = \frac{a}{2t+1} + \frac{b}{t+1} = \frac{(a+2b)t + a + b}{(2t+1)(t+1)}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{t}{2t^2 + 3t + 1} = -\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{t+1}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(-\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{t+1} \right) dt = -\frac{1}{2} \ln|2t+1| + \ln|t+1| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(t+1)^2}{|2t+1|} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{x^2-1}+1)^2}{2\sqrt{x^2-1}+1} + C. \end{aligned}$$

Cách 2: Vì điều kiện $|x| > 1$, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $x > 1$ thì đặt $x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in [0; \frac{\pi}{2})$ suy ra $dx = \frac{\sin t \cdot dt}{\cos^2 t}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int f(x) dx = \int \frac{xdx}{2x^2 - 1 + 3\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\frac{1}{\cos t} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt}{\frac{2}{\cos^2 t} - 1 + 3 \tan t} \\ &= \int \frac{(1 + \tan^2 t) \tan t \cdot dt}{2(1 + \tan^2 t) - 1 + 3 \tan t} = \int \frac{(1 + \tan^2 t) \tan t \cdot dt}{2 \tan^2 t + 3 \tan t + 1}. \end{aligned}$$

Đặt $u = \tan t$ suy ra:

$$du = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \tan^2 t) dt.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{u \cdot du}{2u^2 + 3u + 1} = \int \left(-\frac{1}{2u+1} + \frac{1}{u+1} \right) du = -\frac{1}{2} \ln|2u+1| + \ln|u+1| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(u+1)^2}{|2u+1|} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{(\tan t + 1)^2}{|2 \tan t + 1|} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{x^2-1}+1)^2}{2\sqrt{x^2-1}+1} + C. \end{aligned}$$

Trường hợp 2: Với $x < -1$ Đề nghị bạn đọc tự làm.

 **Nhận xét:** Như vậy, cho dù trên phương diện lý thuyết cách giải 2 rất tường minh xong trên thực tế lại khá cồng kềnh cho dù nó tùy thuộc nhiều vào đặc thù của hàm số dưới dấu tích phân, điều đó chỉ nhằm mục đích để các em học sinh luôn định hướng một cách đúng đắn lựa chọn của mình.

DANG 10: (Phương pháp đổi biến): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$I = \int R(x, \sqrt{(x-a)(b-x)}) dx.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt $x = a + (b-a)\sin^2 t$.

Bước 2: Bài toán được chuyển về: $I = \int S(\sin t, \cos t) dt$.

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{[(x-a)(b-x)]^3}}$, với $a < b$.

 **Giải**

Đặt $x = a + (b-a)\sin^2 t$, với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = 2(b-a)\sin t \cdot \cos t \cdot dt = (b-a)\sin 2t \cdot dt,$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{[(x-a)(b-x)]^3}} &= \frac{(b-a)\sin 2t \cdot dt}{\sqrt{[(b-a)\sin^2 t \cdot (b-a)\cos^2 t]^3}} \\ &= \frac{(b-a)\sin 2t \cdot dt}{(b-a)^3 \sin^3 2t} = \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \frac{dt}{\sin^2 2t}. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{(b-a)^2} \int \frac{dt}{\sin^2 2t} = -\frac{\cot 2t}{2 \cdot (b-a)^2} + C = -\frac{a+b-2x}{2\sqrt{(x-a)(b-x)}} + C.$$

DANG 11: (Phương pháp đổi biến): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Đưa I về các dạng nguyên hàm cơ bản đã biết): Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $a > 0$ và $\Delta < 0$ thì ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Ta có:

$$ax^2 + bx + c = -\frac{\Delta}{4a} \left[1 + \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 \right].$$

Bước 2: Thực hiện phép đổi biến $t = \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$.

Bước 3: Bài toán được chuyển về $I = \int S(t, \sqrt{1+t^2}) dt$.

Trường hợp 2: Nếu $a < 0$ và $\Delta > 0$ thì ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Ta có:

$$ax^2 + bx + c = -\frac{\Delta}{4a} \left[1 - \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \right)^2 \right].$$

Bước 2: Thực hiện phép đổi biến $t = \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}}$.

Bước 3: Bài toán được chuyển về: $I = \int S(t, \sqrt{1-t^2}) dt$.

Trường hợp 3: Nếu $a > 0$ và $\Delta > 0$ thì ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Ta có:

$$ax^2 + bx + c = \frac{\Delta}{4a} \left[\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} \right)^2 - 1 \right].$$

Bước 2: Thực hiện phép đổi biến $t = \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}}$.

Bước 3: Bài toán được chuyển về $I = \int S(t, \sqrt{t^2 - 1}) dt$.

Cách 2: (Sử dụng phép thế Euler): Ta xét các trường hợp sau:

1. Nếu $a > 0$, đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$ hoặc $t + x\sqrt{a}$.
2. Nếu $c > 0$, đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}$ hoặc $tx - \sqrt{c}$.
3. Nếu tam thức $ax^2 + bx + c$ có biệt số $\Delta > 0$ thì:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Khi đó, đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$.

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phép đổi biến $t = x + 1$ suy ra $dt = dx$.

Khi đó:

$$I = \int \sqrt{t^2 + 1} dt.$$

Tích phân trên chúng ta đã biết cách xác định.

Cách 2: Sử dụng phép đổi biến:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - x &\Rightarrow x^2 + 2x + 2 = (t - x)^2 \\ \Leftrightarrow x = \frac{t^2 - 2}{2(t + 1)} &\Rightarrow dx = \frac{(t^2 + 2t + 2)dt}{2(t + 1)^2}. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \int \sqrt{x^2 + 2x + 2} dx = \int \left[t - \frac{t^2 - 2}{2(t + 1)} \right] \cdot \frac{(t^2 + 2t + 2)dt}{2(t + 1)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{(t^4 + 4)dt}{(t + 1)^3}.$$

Sử dụng đồng nhất thức:

$$t^4 + 4 = [(t + 1) - 1]^4 + 4 = (t + 1)^4 - 4(t + 1)^3 + 6(t + 1)^2 - 4(t + 1) + 5$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \frac{1}{4} \int \left[t + 1 - 4 + \frac{6}{t+1} - \frac{4}{(t+1)^2} \right] dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{t^2}{2} - 3t + 6\ln|t+1| + \frac{4}{t+1} \right] + C \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{(\sqrt{x^2+2x+2}+x)^2}{2} - 3(\sqrt{x^2+2x+2}+x) + \right. \\ &\quad \left. + 6\ln|\sqrt{x^2+2x+2}+x+1| + \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+2}+x+1} \right] + C.\end{aligned}$$

DANG 12: (Phương pháp đổi biến): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{dx}{(\lambda x + \mu)\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt $t = \frac{1}{\lambda x + \mu}$.

Bước 2: Bài toán được chuyển về $I = \int \frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}}$.

 **Chú ý:** Phương pháp trên có thể được áp dụng cho dạng tổng quát hơn là:

$$I = \int \frac{(Ax + B)dx}{(\lambda x + \mu)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

 **Giải**

Đặt $t = \frac{1}{x+1}$ thì $x = \frac{1}{t} - 1$ suy ra:

$$dx = -\frac{1}{t^2} dt,$$

$$\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{t(-\frac{1}{t^2})dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -\frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = \begin{cases} -\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} & \text{khi } t > 0 \\ \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} & \text{khi } t < 0 \end{cases}.$$

Khi đó, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $t > 0$, ta được:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln t + \sqrt{1+t^2} + C = -\ln \left| \frac{1}{x+1} \right| + \sqrt{1 + \frac{1}{(x+1)^2}} + C \\ &= -\ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x+1} \right| + C = \ln \left| \frac{x+1}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x+1} \right| + C.\end{aligned}$$

Trường hợp 2: Với $t < 0$, ta được:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln t + \sqrt{1+t^2} + C = \ln \left| \frac{1}{x+1} \right| + \sqrt{1 + \frac{1}{(x+1)^2}} + C \\ &= \ln \left| \frac{1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x+1} \right| + C.\end{aligned}$$

Tóm lại với $t \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ ta luôn có:

$$\int f(x)dx = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x+1} \right| + C.$$

DẠNG 13: (Phương pháp đổi biến): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$I = \int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx, \text{ với } ad - bc \neq 0.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a}$$

Bước 2: Bài toán được chuyển về:

$$I = \int S(t)dt.$$

 **Chú ý:**

1. Với hai dạng đặc biệt:

$$I = \int R(x, \sqrt{\frac{a+x}{a-x}})dx \text{ hoặc } I = \int R(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}})dx$$

chúng ta đã biết với phép đổi biến $x = a \cos 2t$.

Trường hợp đặc biệt, với $I = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$, ta thực hiện:

Vì $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ có nghĩa khi $-a \leq x < a$ nên $x+a > 0$, do đó $\sqrt{(a+x)^2} = a+x$.

Khi đó:

$$I = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = a \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Trong đó:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ được xác định bằng phép đổi biến } x = a \cdot \sin t.$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -a \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

2. Tổng quát

$$I = \int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{a_1}{b_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{a_k}{b_k}}) dx,$$

với a_i, b_i ($i = \overline{1, k}$) là các số nguyên dương và a, b, c, d là các hằng số.

Ta thực hiện phép đổi biến:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m, \text{ với } m \text{ là bội số chung nhỏ nhất của các } b_i, i = \overline{1, k}.$$

DANG 14: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{dx}{y}$, trong đó

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Phân tích hàm hữu tỉ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ thành các phân số tối giản.

Bước 2: Lựa chọn các phương pháp phù hợp cho mỗi tích phân mới.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{6x^3 + 8x + 1}{(3x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 1}}.$

 **Giải**

Ta có:

$$\frac{6x^3 + 8x + 1}{3x^2 + 4} = 2x + \frac{1}{3x^2 + 4}.$$

Do đó:

$$I = \int f(x) dx = \int \left(2x + \frac{1}{3x^2 + 4} \right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \underbrace{\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{dx}{(3x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 1}}}_{I_2}.$$

Trong đó:

$$I_1 = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + C. \quad (2)$$

Với I_2 ta thực hiện phép đổi biến $t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ thì $x^2 = \frac{t^2}{1-t^2}$ suy ra:

$$dt = \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(3x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} dt}{(3x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{\left(\frac{t^2}{1-t^2} + 1\right) dt}{\frac{3t^2}{1-t^2} + 4} = \int \frac{dt}{4-t^2} \\ &= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+2}{t-2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2\sqrt{x^2+1}}{x-2\sqrt{x^2+1}} \right| + C. \end{aligned} \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào I ta được:

$$I = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2\sqrt{x^2+1}}{x-2\sqrt{x^2+1}} \right| + C.$$

DANG 15: Phương pháp nguyên hàm từng phần

Với các hàm vô tỉ, trong phạm vi phổ thông phương pháp tích phân từng phần ít được sử dụng, tuy nhiên chúng ta cũng cần xem xét một ví dụ để minh họa.

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + a}$.

 **Giải**

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + a} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a}} \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \int f(x) dx = x \sqrt{x^2 + a} - \underbrace{\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a}}}_J. \quad (1)$$

Biến đổi J như sau:

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{[(x^2 + a) - a] dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \sqrt{x^2 + a} dx - a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} \\ &= I - a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C. \end{aligned} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$I = x\sqrt{x^2 + a} - (I - a\ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C)$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$$

Chú ý: Chúng ta đã biết tính tích phân bất định $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$, với $a \neq 0$ bằng

phương pháp đổi biến số.

Mở rộng bài toán trên ta tính được tích phân bất định:

$$I = \int x^2 \sqrt{x^2 + a} dx$$

bằng cách thực hiện:

Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int x \cdot x \sqrt{x^2 + a} dx.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = x\sqrt{x^2 + a} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + a)^3} = \frac{1}{3}(x^2 + a)\sqrt{x^2 + a} \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}x\sqrt{(x^2 + a)^3} - \frac{1}{3}\int(x^2 + a)\sqrt{x^2 + a} dx \\ &= \frac{1}{3}x\sqrt{(x^2 + a)^3} - \frac{1}{3}\int x^2\sqrt{x^2 + a} dx - \frac{1}{3}a\int\sqrt{x^2 + a} dx \\ &= \frac{1}{3}x\sqrt{(x^2 + a)^3} - \frac{1}{3}I - \frac{1}{3}a\int\sqrt{x^2 + a} dx \\ \Leftrightarrow I &= \frac{1}{4}x\sqrt{(x^2 + a)^3} - \frac{1}{4}a\int\sqrt{x^2 + a} dx \\ &= \frac{1}{4}x\sqrt{(x^2 + a)^3} - \frac{1}{4}a\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + a}|\right] + C \\ &= \frac{1}{4}x\sqrt{(x^2 + a)^3} - \frac{ax}{8}\sqrt{x^2 + a} - \frac{a^2}{8}\ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C \end{aligned}$$

Vấn đề 5: PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Việc xác định nguyên hàm của các hàm số lượng giác rất phổ biến trong các đề thi tuyển sinh vào các trường đại học và trung học chuyên nghiệp.

Để xác định nguyên hàm các hàm lượng giác ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.
2. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác đưa về các nguyên hàm cơ bản.
3. Phương pháp đổi biến.
4. Phương pháp tích phân từng phần.

DẠNG 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(a-b)}.$$

Bước 2: Ta được:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x+a) \cdot \cos(x+b) - \cos(x+a) \cdot \sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \left[\int \frac{\cos(x+b) \cdot dx}{\sin(x+b)} - \int \frac{\cos(x+a) \cdot dx}{\sin(x+a)} \right] \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} [\ln|\sin(x+b)| - \ln|\sin(x+a)|] + C \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| + C. \end{aligned}$$

 **Chú ý:** Phương pháp trên cũng được áp dụng cho các dạng:

$$1. \quad I = \int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}, \text{ sử dụng đồng nhất thức } 1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)}.$$

$$2. \quad I = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)} \text{ hoặc } I = \int \frac{dx}{\cos(x+a)\sin(x+b)},$$

$$\text{sử dụng đồng nhất thức } 1 = \frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)}.$$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$

b. (ĐHQG HN Khối D – 2000): $f(x) = \frac{1}{\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$

 **Giải**

a. Ta có thể lựa chọn các cách trình bày sau:

Cách 1: (Sử dụng phương pháp trong dạng toán cơ bản): Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos\left[\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - x\right]}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - x\right].$$

Ta được:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \sqrt{2} \int \frac{\cos\left[\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - x\right] dx}{\sin x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \sqrt{2} \int \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin x}{\sin x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx \\ &= \sqrt{2} \left[\int \frac{\cos x \cdot dx}{\sin x} + \int \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot dx}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \right] \\ &= \sqrt{2} [\ln|\sin x| - \ln|\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)|] + C = \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sin x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \right| + C. \end{aligned}$$

Cách 2: (Dựa trên đặc thù của hàm $f(x)$): Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \sqrt{2} \int \frac{dx}{\sin x \cdot (\cos x - \sin x)} = \sqrt{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot (\cot x - 1)} \\ &= -\sqrt{2} \int \frac{d(\cot x)}{\cot x - 1} = -\sqrt{2} \int \frac{d(\cot x - 1)}{\cot x - 1} = -\sqrt{2} \ln|\cot x - 1| + C. \end{aligned}$$

b. Ta có thể lựa chọn các cách trình bày sau:

Cách 1: (Sử dụng phương pháp trong dạng toán cơ bản): Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin \left[\left(x + \frac{\pi}{4} \right) - x \right]}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \sin \left[\left(x + \frac{\pi}{4} \right) - x \right].$$

Ta được:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \sqrt{2} \int \frac{\sin \left[\left(x + \frac{\pi}{4} \right) - x \right] dx}{\cos x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} \\ &= \sqrt{2} \int \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos x - \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \sin x}{\cos x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} dx \\ &= \sqrt{2} \left[\int \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot dx}{\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} - \int \frac{\sin x \cdot dx}{\cos x} \right] \\ &= \sqrt{2} \left[-\ln \left| \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \ln |\cos x| \right] + C = \sqrt{2} \ln \left| \frac{\cos x}{\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} \right| + C. \end{aligned}$$

Cách 2: (Dựa trên đặc thù của hàm $f(x)$): Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \sqrt{2} \int \frac{dx}{\cos x \cdot (\cos x - \sin x)} = \sqrt{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (1 - \tan x)} \\ &= \sqrt{2} \int \frac{d(\tan x)}{1 - \tan x} = -\sqrt{2} \int \frac{d(1 - \tan x)}{1 - \tan x} = -\sqrt{2} \ln |1 - \tan x| + C. \end{aligned}$$

DẠNG 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x + \sin \alpha}$.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi I về dạng:

$$I = \int \frac{dx}{\sin x + \sin \alpha} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{x+\alpha}{2} \cdot \cos \frac{x-\alpha}{2}}.$$

Bước 2: Áp dụng kiến thức trong dạng 1 để giải tiếp.

☞ **Chú ý:** Phương pháp trên cũng được áp dụng cho các dạng:

$$1. I = \int \frac{dx}{\sin x + m}, \text{ với } |m| \leq 1.$$

$$2. I = \int \frac{dx}{\cos x + \cos \alpha} \text{ và } I = \int \frac{dx}{\cos x + m}, \text{ với } |m| \leq 1.$$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

$$a. f(x) = \frac{1}{2 \sin x + 1}.$$

$$b. (\text{ĐHBK HN Khối A} - 2000): f(x) = \frac{1}{\sqrt{2} + \sin x - \cos x}.$$

✍ **Giải**

a. Biến đổi $f(x)$ về dạng:

$$f(x) = \frac{1}{2(\sin x + \frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin x + \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sin \frac{6x + \pi}{12} \cdot \cos \frac{6x - \pi}{12}}. \quad (1)$$

Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\cos(\frac{6x + \pi}{12} - \frac{6x - \pi}{12})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\frac{6x + \pi}{12} - \frac{6x - \pi}{12}).$$

Ta được:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{\cos(\frac{6x + \pi}{12} - \frac{6x - \pi}{12})}{\sin \frac{6x + \pi}{12} \cdot \cos \frac{6x - \pi}{12}} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{\cos \frac{6x + \pi}{12} \cdot \cos \frac{6x - \pi}{12} + \sin \frac{6x + \pi}{12} \cdot \sin \frac{6x - \pi}{12}}{\sin \frac{6x + \pi}{12} \cdot \cos \frac{6x - \pi}{12}} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\int \frac{\cos \frac{6x + \pi}{12}}{\sin \frac{6x + \pi}{12}} dx + \int \frac{\sin \frac{6x - \pi}{12}}{\cos \frac{6x - \pi}{12}} dx \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} [\ln |\sin \frac{6x + \pi}{12}| - \ln |\cos \frac{6x - \pi}{12}|] + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sin \frac{6x + \pi}{12}}{\cos \frac{6x - \pi}{12}} \right| + C. \end{aligned}$$

b. Biến đổi $f(x)$ về dạng:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2} \left[1 - \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right]} = \frac{1}{2\sqrt{2} \sin^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right)}.$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right)}{\sin^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cot \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) + C.$$

DẠNG 3: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x \cdot \tan(x + \alpha)$.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi I về dạng:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \tan x \cdot \tan(x + \alpha) dx = \int \frac{\sin x \cdot \sin(x + \alpha)}{\cos x \cdot \cos(x + \alpha)} dx \\ &= \int \left(\frac{\cos x \cdot \cos(x + \alpha) + \sin x \cdot \sin(x + \alpha)}{\cos x \cdot \cos(x + \alpha)} - 1 \right) dx \\ &= \int \frac{\cos \alpha dx}{\cos x \cdot \cos(x + \alpha)} - \int dx = \cos \alpha \int \frac{dx}{\cos x \cdot \cos(x + \alpha)} - x. \end{aligned}$$

Bước 2: Áp dụng kiến thức trong dạng 1 để giải tiếp.

 **Chú ý:** Phương pháp trên cũng được áp dụng cho các dạng:

1. $I = \int \tan(x + \alpha) \cdot \cot(x + \beta) dx.$
2. $I = \int \cot(x + \alpha) \cdot \cot(x + \beta) dx.$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x \cdot \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$

 **Giải**

Biến đổi $f(x)$ về dạng:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{\cos x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} - 1 \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\cos x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} - 1. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dx}{\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} - \int dx = -x + \frac{\sqrt{2}}{2} \int \underbrace{\frac{dx}{\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}}_J$$

Ta có:

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{2} \int \frac{dx}{\cos x \cdot (\cos x - \sin x)} = \sqrt{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (1 - \tan x)} \\ &= \sqrt{2} \int \frac{d(\tan x)}{1 - \tan x} = -\sqrt{2} \int \frac{d(1 - \tan x)}{1 - \tan x} = -\sqrt{2} \ln|1 - \tan x| + C. \end{aligned}$$

Vậy ta được:

$$\int f(x)dx = -x - \ln|1 - \tan x| + C.$$

DANG 4: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x}$.

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \alpha)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x + \alpha}{2} \cos \frac{x + \alpha}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{2 \tan \frac{x + \alpha}{2} \cos^2 \frac{x + \alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{d\left(\tan \frac{x + \alpha}{2}\right)}{\tan \frac{x + \alpha}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \tan \frac{x + \alpha}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

Cách 2: Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \alpha)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{\sin(x + \alpha) \cdot dx}{\sin^2(x + \alpha)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{d[\cos(x + \alpha)]}{\cos^2(x + \alpha) - 1} = -\frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{\cos(x + \alpha) - 1}{\cos(x + \alpha) + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

☞ **Chú ý:** Chúng ta cũng có thể thực hiện: bằng phương pháp đại số hoá với việc đổi biến $t = \tan \frac{x}{2}$.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3} \sin x + \cos x}$.

 *Giải*

Ta có:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)} \\&= \int \frac{dx}{2\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)} = \frac{d\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\right]}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)} \\&= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\right| + C.\end{aligned}$$

DẠNG 5: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a_2 \sin x + b_2 \cos x}$.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a_2 \sin x + b_2 \cos x) + B(a_2 \cos x - b_2 \sin x)$$

Bước 2: Khi đó:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{A(a_2 \sin x + b_2 \cos x) + B(a_2 \cos x - b_2 \sin x)}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} dx \\&= A \int dx + B \int \frac{a_2 \cos x - b_2 \sin x}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} dx \\&= Ax + B \ln|a_2 \sin x + b_2 \cos x| + C.\end{aligned}$$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4 \sin x + 3 \cos x}{\sin x + 2 \cos x}$.

 *Giải*

Biến đổi:

$$\begin{aligned}4 \sin x + 3 \cos x &= a(\sin x + 2 \cos x) + b(\cos x - 2 \sin x) \\&= (a - 2b) \sin x + (2a + b) \cos x\end{aligned}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a - 2b = 4 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$f(x) = \frac{2(\sin x + 2 \cos x) - (\cos x - 2 \sin x)}{\sin x + 2 \cos x} = 2 - \frac{\cos x - 2 \sin x}{\sin x + 2 \cos x}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \left(2 - \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}\right)dx = 2\int dx - \int \frac{d(\sin x + 2\cos x)}{\sin x + 2\cos x} \\ &= 2x - \ln|\sin x + 2\cos x| + C.\end{aligned}$$

Ví dụ 2: (HVNH HN - 99): Tìm $I = \int \frac{\cos^2 x \cdot dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x}$.

 *Giải*

Biến đổi:

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= (a\sin x + b\cos x)(\sin x + \sqrt{3}\cos x) + c(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= (a + c)\sin^2 x + (a\sqrt{3} + b)\sin x \cdot \cos x + (b\sqrt{3} + c)\cos^2 x.\end{aligned}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a\sqrt{3} + b = 0 \\ b\sqrt{3} + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/4 \\ b = \sqrt{3}/4 \\ c = 1/4 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}I &= \frac{\left(-\frac{1}{4}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos x\right)(\sin x + \cos x) + \frac{1}{4}}{\sin x + \sqrt{3}\cos x} \\ &= \int \left(-\frac{1}{4}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos x\right)dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sin x + \sqrt{3}\cos x} \\ &= \frac{1}{2} \int \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)dx + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \int \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)d\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{8} \int \frac{d\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right]}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{8} \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right| + C.\end{aligned}$$

DANG 6: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a_2 \sin x + b_2 \cos x)^2}$.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a_2 \sin x + b_2 \cos x) + B(a_2 \cos x - b_2 \sin x)$$

Bước 2: Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{A(a_2 \sin x + b_2 \cos x) + B(a_2 \cos x - b_2 \sin x)}{(a_2 \sin x + b_2 \cos x)^2} dx \\ &= A \int \frac{dx}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} + B \int \frac{a_2 \cos x - b_2 \sin x}{(a_2 \sin x + b_2 \cos x)^2} dx \\ &= \frac{A}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \alpha)} - \frac{B}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} \\ &= \frac{A}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \ln \left| \tan \frac{x + \alpha}{2} \right| - \frac{B}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} + C. \end{aligned}$$

$$\text{trong đó } \sin \alpha = \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \text{ và } \cos \alpha = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Ví dụ 1: (HVNH HN – 2000): Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin 2x}$.

 **Giải**

Biến đổi $f(x)$ về dạng:

$$f(x) = \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

Biến đổi:

$$\sin x = a(\sin x + \cos x) + b(\cos x - \sin x) = (a - b)\sin x + (a + b)\cos x.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \pi/4)} - \frac{1}{2} \int \frac{(\cos x - \sin x) dx}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + \frac{1}{2(\sin x + \cos x)} + C. \end{aligned}$$

DANG 7: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + c}$.

Ta xét 3 khả năng sau:

Khả năng 1: Nếu $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ thì ta thực hiện phép biến đổi:

$$\frac{1}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{1}{c[1 + \cos(x - \alpha)]} = \frac{1}{2c} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x - \alpha}{2}}.$$

trong đó $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ và $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2c} \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x - \alpha}{2}} = \frac{1}{c} \int \frac{d\left(\frac{x - \alpha}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x - \alpha}{2}} = \frac{1}{c} \tan \frac{x - \alpha}{2} + C.$$

Khả năng 2: Nếu $c = -\sqrt{a^2 + b^2}$ thì ta thực hiện phép biến đổi:

$$\frac{1}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{1}{c[1 - \cos(x - \alpha)]} = \frac{1}{2c} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{x - \alpha}{2}}.$$

trong đó $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ và $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2c} \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x - \alpha}{2}} = \frac{1}{c} \int \frac{d\left(\frac{x - \alpha}{2}\right)}{\sin^2 \frac{x - \alpha}{2}} = \frac{1}{c} \cot \frac{x - \alpha}{2} + C.$$

Khả năng 3: Nếu $c^2 \neq a^2 + b^2$ thì ta thực hiện phép đổi biến $t = \tan \frac{x}{2}$. Khi đó:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \& \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2dx}{2 \sin x - \cos x + 1}$.

 **Giải**

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, ta được:

$$dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{\frac{4dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{2dt}{t^2 + 2t} = 2 \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - 1} = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 1}{\tan \frac{x}{2} + 1} \right| + C = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| + C\end{aligned}$$

DANG 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 = A(a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2) + B(a_2 \cos x - b_2 \sin x) + C$$

Bước 2: Khi đó:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{A(a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2) + B(a_2 \cos x - b_2 \sin x) + C}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx \\ &= A \int dx + B \int \frac{a_2 \cos x - b_2 \sin x}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx + \\ &\quad + C \int \frac{dx}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} \\ &= Ax + B \ln |a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2| + C \int \frac{dx}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}.\end{aligned}$$

trong đó $\int \frac{dx}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$ được xác định nhờ dạng 7.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{5 \sin x}{2 \sin x - \cos x + 1}$.

 **Giải**

Giả sử:

$$\begin{aligned}5 \sin x &= a(2 \sin x - \cos x + 1) + b(2 \cos x + \sin x) + c \\ &= (2a + b) \sin x + (2b - a) \cos x + a + c.\end{aligned}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ 2b - a = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{2(2\sin x - \cos x + 1) + (2\cos x + \sin x) - 2}{2\sin x - \cos x + 1} \\&= 2 + \frac{2\cos x + \sin x}{2\sin x - \cos x + 1} - \frac{2}{2\sin x - \cos x + 1}\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int 2dx + \int \frac{2\cos x + \sin x}{2\sin x - \cos x + 1} dx - \int \frac{2}{2\sin x - \cos x + 1} dx \\&= 2\int dx + \int \frac{d(2\sin x - \cos x + 1)}{2\sin x - \cos x + 1} - \int \frac{2dx}{2\sin x - \cos x + 1} \\&= 2x + \ln|2\sin x - \cos x + 1| - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.\end{aligned}$$

 **Chú ý:** Trong lời giải trên ta đã tận dụng kết quả:

$$\int \frac{2dx}{2\sin x - \cos x + 1} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

DẠNG 9: Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{a_1 \sin^2 x + b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a_2 \sin x + b_2 \cos x}.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi:

$$\begin{aligned}&a_1 \sin^2 x + b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x \\&= (A \sin x + B \cos x)(a_2 \sin x + b_2 \cos x) + C(\sin^2 x + \cos^2 x)\end{aligned}$$

Bước 2: Khi đó:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{(A \sin x + B \cos x)(a_2 \sin x + b_2 \cos x) + C}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} dx \\&= \int (A \sin x + B \cos x) dx + C \int \frac{dx}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} \\&= -A \cos x + B \sin x + \frac{C}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \alpha)} \\&= -A \cos x + B \sin x + \frac{C}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \ln\left|\tan \frac{x + \alpha}{2}\right| + C.\end{aligned}$$

$$\text{trong đó } \sin \alpha = \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \text{ và } \cos \alpha = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4 \sin^2 x + 1}{\sqrt{3} \sin x + \cos x}$.

 **Giải**

Giả sử:

$$\begin{aligned} 4\sin^2 x + 1 &= 5\sin^2 x + \cos^2 x = (a\sin x + b\cos x)(\sqrt{3} \sin x + \cos x) + c(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= (a\sqrt{3} + c)\sin^2 x + (a + b\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x + (b + c)\cos^2 x. \end{aligned}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a\sqrt{3} + c = 5 \\ a + b\sqrt{3} = 0 \\ b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sqrt{3} \sin x - \cos x)(\sqrt{3} \sin x + \cos x) + 2}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} \\ &= \sqrt{3} \sin x - \cos x + \frac{2}{\sqrt{3} \sin x + \cos x}. \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (\sqrt{3} \sin x - \cos x) dx - \int \frac{2 dx}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} \\ &= -\sqrt{3} \cos x - \sin x - \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \right| + C \end{aligned}$$

 **Chú ý:** Trong lời giải trên ta đã tận dụng kết quả:

$$\int \frac{2 dx}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \right| + C.$$

DẠNG 10: Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x}.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi I về dạng:

$$I = \int \frac{dx}{(a \tan^2 x + b \tan x + c) \cos^2 x}$$

Bước 2: Thực hiện phép đổi biến $t = \tan x$, suy ra:

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad \& \quad \frac{dx}{(a \tan^2 x + b \tan x + c) \cos^2 x} = \frac{dt}{at^2 + bt + c}.$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dt}{at^2 + bt + c}.$$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x}$.

 *Giải*

Sử dụng đẳng thức $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x)$, ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{dx}{(3\tan^2 x - 2\tan x - 1)\cos^2 x} = \frac{1}{3} \int \frac{d(\tan x)}{\left(\tan x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d\left(\tan x - \frac{1}{3}\right)}{\left(\tan x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\tan x - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{\tan x - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}} \right| + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\tan x - 1}{3\tan x + 1} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - \cos x}{3\sin x + \cos x} \right| + C. \end{aligned}$$

DẠNG 11: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x \cdot \cos x}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^\alpha}$.

Nhận xét rằng:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \cdot d(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x).$$

Ta đi xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\alpha = 1$, ta được:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cdot \cos x dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \int \frac{d(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) + C. \end{aligned}$$

Trường hợp 2: Với $\alpha \neq 1$, ta được:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \int \frac{d(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^\alpha} \\ &= \frac{1}{2(a^2 - b^2)(1 - \alpha)} (a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^{-\alpha+1} + C. \end{aligned}$$

DANG 12: Tìm nguyên hàm của hàm số lượng giác sử dụng các phép biến đổi lượng giác

Sử dụng các phép biến đổi lượng giác đưa biểu thức dưới dấu tích phân về dạng quen thuộc. Các phép biến đổi thường dùng bao gồm:

- *Phép biến đổi tích thành tổng* (chúng ta đã thấy trong phương pháp phân tích). Ở đây chúng ta nhớ lại các công thức sau:

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

- *Hạ bậc.* Ở đây chúng ta nhớ lại các công thức sau:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

$$\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}; \quad \cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}$$

được sử dụng trong các phép hạ bậc mang tính cục bộ, còn hằng đẳng thức:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

được sử dụng trong các phép hạ bậc mang tính toàn cục cho các biểu thức, ví dụ như:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) = \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{3}{4}.$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4x) = \frac{3}{8} \cos 4x + \frac{5}{8}.$$

- Các kỹ thuật biến đổi khác.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số

a. (ĐHAN – 1997): $f(x) = \cos 3x \cdot \cos 5x$.

b. (ĐHBK HN – 1999): $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 5x$.

 *Giải*

- a. Sử dụng các phép biến đổi tích thành tổng, ta được:

$$f(x) = \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 2x).$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2} \int (\cos 8x + \cos 2x)dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \sin 8x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C.$$

b. Sử dụng các phép biến đổi tích thành tổng, ta được:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} (\sin 6x - \sin 2x) \sin 2x = \frac{1}{2} (\sin 6x \cdot \sin 2x - \sin^2 2x) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 8x) - \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) \right] = \frac{1}{4} (\cos 2x + \cos 4x - \cos 8x - 1). \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \frac{1}{4} \int (\cos 2x + \cos 4x - \cos 8x - 1)dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: (HVQHQT – 1997): *Tìm nguyên hàm của hàm số:*

$$f(x) = (\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^6 x + \cos^6 x).$$

 *Giải*

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \\ &= 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x = \frac{1}{4} (3 + \cos 4x). \\ \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x \\ &= \frac{1}{8} (5 + 3\cos 4x). \end{aligned}$$

Do đó $f(x)$ được biến đổi về dạng:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{32} (3 + \cos 4x)(5 + 3\cos 4x) = \frac{1}{32} (15 + 14\cos 4x + 3\cos^2 4x) \\ &= \frac{1}{32} \left[15 + 14\cos 4x + 3 \cdot \frac{1 + \cos 8x}{2} \right] = \frac{1}{64} (33 + 28\cos 4x + 3\cos 8x). \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \frac{1}{64} \int (33 + 28\cos 4x + 3\cos 8x)dx \\ &= \frac{1}{64} \left(33x + 7\sin 4x + \frac{3}{8} \sin 8x \right) + C. \end{aligned}$$

 **Chú ý:** Nhiều bài toán cần vận dụng đồng thời hai kỹ thuật biến đổi tổng thành tích và hạ bậc.

Ví dụ 3: (HVQHQT – 1998): Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \sin^3 x \cdot \sin 3x$.

b. $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x$.

 *Giải*

a. Biến đổi $f(x)$ về dạng:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \cdot \sin 3x = \frac{3}{4} \sin 3x \cdot \sin x - \frac{1}{4} \sin^2 3x \\ &= \frac{3}{8} (\cos 2x - \cos 4x) x - \frac{1}{8} (1 - \cos 6x) = \frac{1}{8} (3 \cos 2x - 3 \cos 4x + \cos 6x - 1). \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{8} \int (3 \cos 2x - 3 \cos 4x + \cos 6x - 1) dx \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{3}{2} \sin 2x - \frac{3}{4} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin 6x - x \right) + C. \end{aligned}$$

b. Biến đổi $f(x)$ về dạng:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \cdot \cos 3x + \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4} \cdot \sin 3x \\ &= \frac{3}{4} (\cos 3x \cdot \sin x + \sin 3x \cdot \cos x) = \frac{3}{4} \sin 4x. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \frac{3}{4} \int \sin 4x dx = -\frac{3}{16} \cos 4x + C.$$

Ví dụ 4: (ĐHNT TPHCM – 1999): Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

b. $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$.

 *Giải*

a. Ta có:

$$\int f(x) dx = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = - \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = -\ln(\sin x + \cos x) + C.$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int (\cos x - \sin x) dx = \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. (ĐHSP II HN – 1999): $f(x) = \frac{\sin^3 x}{3 \sin 4x - \sin 6x - 3 \sin 2x}$.

b. (ĐHNT HN – 1997): $f(x) = \frac{\sin 3x \cdot \sin 4x}{\tan x + \cot 2x}$.

 *Giải*

a. Biến đổi $f(x)$ về dạng:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin^3 x}{3(\sin 4x - \sin 2x) - \sin 6x} = \frac{\sin^3 x}{6\cos 3x \cdot \sin x - 2\sin 3x \cdot \cos 3x} \\ &= \frac{\sin^3 x}{2\cos 3x(3\sin x - \sin 3x)} = \frac{\sin^3 x}{8\cos 3x \cdot \sin^3 x} = \frac{1}{8\cos 3x}. \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\cos 3x} = \frac{1}{8} \int \frac{\cos 3x dx}{\cos^2 3x} = -\frac{1}{24} \int \frac{d(\sin 3x)}{\sin^2 3x - 1} \\ &= -\frac{1}{48} \ln \left| \frac{\sin 3x - 1}{\sin 3x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

b. Biến đổi $f(x)$ về dạng:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3x \cdot \sin 4x}{\tan x + \cot 2x} &= \frac{\sin 3x \cdot \sin 4x}{\frac{\cos x}{\cos x \cdot \sin 2x}} = \sin 4x \cdot \sin 3x \cdot \sin 2x = \frac{1}{2} (\cos x - \cos 7x) \sin 2x \\ &= \frac{1}{2} (\sin 2x \cdot \cos x - \cos 7x \cdot \sin 2x) = \frac{1}{4} (\sin 3x + \sin x - \sin 9x + \sin 5x) \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \frac{1}{4} \int (\sin x + \sin 3x + \sin 5x - \sin 9x) dx \\ &= -\frac{1}{4} \left(\cos x + \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{9} \cos 9x \right) + C. \end{aligned}$$

DANG 13: Tìm nguyên hàm của hàm số lượng giác bằng phương pháp đổi biến

Với nguyên hàm:

$$I = \int R(\sin x, \cos x) dx, \text{ trong đó } R \text{ là hàm hữu tỉ.}$$

Ta lựa chọn một trong các hướng sau:

Hướng 1: Nếu:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

thì sử dụng phép đổi biến tương ứng là $t = \cos x$.

Hướng 2: Nếu:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

thì sử dụng phép đổi biến tương ứng là $t = \sin x$.

Hướng 3: Nếu:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

thì sử dụng phép đổi biến $t = \tan x$ (đôi khi có thể là $t = \cot x$).

Do đó, với các nguyên hàm dạng:

1. $I = \int \tan^n x dx$, với $n \in \mathbb{Z}$ thì đặt $t = \tan x$.
2. $I = \int \cot^n x dx$, với $n \in \mathbb{Z}$ thì đặt $t = \cot x$.

Hướng 4: Mọi trường hợp đều có thể đưa về tích phân các hàm hữu tỉ bằng phép đổi biến $t = \tan \frac{x}{2}$.

Ví dụ 1: (ĐHNT TPHCM – 1997): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{\cos x + \sin x \cdot \cos x}{2 + \sin x}.$$

 **Giải**

Biến đổi:

$$\int f(x) dx = \int \frac{(1 + \sin x) \cos x}{2 + \sin x} dx.$$

Đặt $t = \sin x$ suy ra

$$dt = \cos x dx \text{ \& } \frac{(1 + \sin x) \cos x}{2 + \sin x} dx = \frac{1+t}{2+t} dt.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{1+t}{2+t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{2+t} \right) dt = t - \ln|2+t| + C \\ &= \sin x - \ln|2 + \sin x| + C. \end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Trong bài toán trên sở dĩ ta định hướng được phép biến đổi như vậy là bởi nhận xét rằng:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

do đó sử dụng phép đổi biến tương ứng là $t = \sin x$.

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos^3 x}$.

 **Giải**

Biến đổi:

$$\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\tan x \cdot \cos^4 x}.$$

Đặt $t = \tan x$ suy ra

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ \& } \frac{dx}{\tan x \cdot \cos^4 x} = \frac{1}{\tan x} (1 + \tan^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{(1+t^2)dt}{t} = \left(\frac{1}{t} + t \right) dt$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{t} + t \right) dt = \ln|t| + \frac{1}{2} t^2 + C = \ln|\tan x| + \frac{1}{2} \tan^2 x + C.$$

 **Nhận xét:** 1. Trong bài toán trên sở dĩ ta định hướng được phép biến đổi như vậy là bởi nhận xét rằng:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

do đó, sử dụng phép đổi biến tương ứng là $t = \tan x$.

2. Việc đánh giá hàm số dưới dấu tích phân như trên để lựa chọn phép đặt ẩn phụ thích hợp luôn tỏ ra rất hiệu quả đối với bài toán xác định nguyên hàm của các hàm lượng giác chứa căn. Ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: (ĐH TCKT HN – 1996): *Tìm nguyên hàm của hàm số:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}}.$$

 **Giải**

Biến đổi:

$$\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\tan^3 x \cdot \cos^8 x}} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt[4]{\tan^3 x}}.$$

Đặt $t = \tan x$ suy ra $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt[4]{\tan^3 x}} = \int \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}} = 4\sqrt[4]{t} + C = 4\sqrt[4]{\tan x} + C.$$

Ví dụ 4: (ĐHHH – 1999): *Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin 2x - 2 \sin x}$.*

 **Giải**

Biến đổi I về dạng:

$$\int f(x) dx = \int \frac{dx}{2 \sin x (\cos x - 1)} = \int \frac{\sin x dx}{2 \sin^2 x (\cos x - 1)} = \frac{1}{2} \int \frac{\sin x dx}{(1 - \cos^2 x)(\cos x - 1)}.$$

Đặt $t = \cos x$ thì $dt = -\sin x dx$, khi đó:

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{(1-t^2)(t-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t-1)^2(t+1)}.$$

Ta có:

$$\frac{1}{(t-1)^2(t+1)} = \frac{a}{(t-1)^2} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1} = \frac{(b+c)t^2 + (a-2c)t + a-b+c}{(t-1)^2(t+1)}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} b+c=0 \\ a-2c=0 \\ a-b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b=-1/4 \\ c=1/4 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{1}{(t-1)^2(t+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t+1} = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{(t-1)^2} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right]$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{8} \int \left[\frac{2}{(t-1)^2} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right] dx \\ &= \frac{1}{8} \left(-\frac{2}{t-1} - \ln|t-1| + \ln|t+1| \right) + C \\ &= \frac{1}{8} \left(-\frac{2}{t-1} + \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \right) + C = \frac{1}{8} \left(\frac{2}{1-\cos x} + \ln \left| \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \right| \right) + C. \end{aligned}$$

DANG 14: Tìm nguyên hàm của hàm số lượng giác bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần

Chúng ta đã được biết trong phần *Xác định nguyên hàm bằng phương pháp tích phân từng phần*, đối với các dạng nguyên hàm:

Dạng 1: Tính:

$$\int P(x) \sin \alpha x dx \text{ hoặc } \int P(x) \cos \alpha x dx$$

với P là một đa thức thuộc $R[X]$ và $\alpha \in R^*$.

Khi đó, ta đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin \alpha x dx \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos \alpha x dx \end{cases}.$$

Dạng 2: Tính:

$$\int e^{ax} \cos(bx) \text{ (hoặc } \int e^{ax} \sin(bx) \text{ với } a, b \neq 0.$$

Khi đó, ta đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(bx) \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = \sin(bx) \\ dv = e^{ax} dx \end{cases}.$$

Ví dụ 1: (HVQY – 1998): Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$.

 *Giải*

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= -x.\cot x + \int \cot x dx = -x.\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= -x.\cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x.\cot x + \ln|\sin x| + C.\end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$.

 **Giải**

Biến đổi:

$$\int f(x)dx = \int \frac{\cos x \cdot d(\sin x)}{\sin^3 x}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \cos x \\ dv = \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = -\frac{1}{\sin^2 x} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \int d(\ln|\tan \frac{x}{2}|) \\ &= -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C.\end{aligned}$$

 **Chú ý:** Bài toán trên cũng có thể giải được bằng phương pháp đổi biến số, bằng cách nhận xét rằng:

$$\begin{aligned}R(-\sin x, \cos x) &= -R(\sin x, \cos x) \\ \text{ta sử dụng phép đổi biến tương ứng là } t &= \cos x.\end{aligned}$$

Vấn đề 6: PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ MŨ VÀ LÔGARIT

Để xác định nguyên hàm của các hàm số mũ và lôgarit ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.
2. Phương pháp phân tích.
3. Phương pháp đổi biến.
4. Phương pháp tích phân từng phần.

DANG 1: Tìm nguyên hàm của hàm số mũ và lôgarit dựa trên các dạng nguyên hàm cơ bản

Bằng các phép biến đổi đại số, ta biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân về các dạng nguyên hàm cơ bản đã biết.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}.$

b. $\frac{2^{2x} \cdot 3^x}{16^x - 9^x}.$

 *Giải*

a. Ta có:

$$\int f(x) dx = \int \frac{d(e^x)}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C.$$

b. Chia tử số và mẫu số của biểu thức dưới dấu tích phân cho 4^x , ta được:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 1} dx = \frac{1}{\ln \frac{4}{3}} \int \frac{d\left[\left(\frac{4}{3}\right)^x\right]}{\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 1} dx = \frac{1}{\ln \frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x - 1}{\left(\frac{4}{3}\right)^x + 1} \right| + C. \\ &= \frac{1}{2(\ln 4 - \ln 3)} \cdot \ln \left| \frac{4^x - 3^x}{4^x + 3^x} \right| + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. (HVNHN HN Khối A – 2000): $f(x) = \frac{1}{1 + 8^x}.$

b. (HV QHQT – 1996): $f(x) = \frac{\ln(ex)}{3 + x \ln x}.$

 *Giải*

a. Ta có:

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{1 + 8^x} dx = \int \left(1 - \frac{8^x}{1 + 8^x} \right) dx = x - \frac{\ln(1 + 8^x)}{\ln 8} + C.$$

b. Ta có:

$$\int f(x) dx = \int \frac{1 + \ln x}{3 + x \ln x} dx = \int \frac{d(x \ln x)}{3 + x \ln x} = \int \frac{d(3 + x \ln x)}{3 + x \ln x} = \ln|3 + x \ln x| + C.$$

DANG 2: Tìm nguyên hàm của hàm số mũ và lôgarit bằng phương pháp phân tích

Chúng ta đã được làm quen với phương pháp phân tích để tính các xác định nguyên hàm nói chung. Bây giờ đi xem xét chi tiết hơn về việc sử dụng phương pháp này để xác định nguyên hàm của các hàm số mũ và lôgarit. Cần hiểu rằng thực chất nó là một dạng của phương pháp hệ số bất định, nhưng ở đây ta sử dụng các đồng nhất thức quen thuộc.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$.

 **Giải**

Sử dụng đồng nhất thức $1 = (1 - e^x) + e^x$, ta được:

$$\frac{1}{1-e^x} = \frac{(1-e^x)+e^x}{1-e^x} = 1 + \frac{e^x}{1-e^x}.$$

Suy ra:

$$\int f(x)dx = \int \left(1 + \frac{e^x}{1-e^x}\right)dx = \int dx - \int \frac{d(1-e^x)}{1-e^x} = x - \ln|1-e^x| + C.$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 2}$.

 **Giải**

Ta có:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int e^x \sqrt{(e^x - 1)^2 + 1} dx = \int \sqrt{(e^x - 1)^2 + 1} d(e^x - 1) \\&= \frac{e^x - 1}{2} \sqrt{(e^x - 1)^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln|(e^x - 1) + \sqrt{(e^x - 1)^2 + 1}| + C \\&= \frac{e^x - 1}{2} \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 2} + \frac{1}{2} \ln|e^x - 1 + \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 2}| + C.\end{aligned}$$

 **Chú ý:** Nếu các em học sinh thấy khó hình dùng một cách cặn kẽ cách biến đổi để đưa về dạng cơ bản trong bài toán trên thì thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1: Thực hiện phép đổi biến $t = e^x$, suy ra:

$$dt = e^x dx,$$

$$e^x \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 2} dx = \sqrt{t^2 - 2t + 2} dt = \sqrt{(t-1)^2 + 1} dt.$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = \int \sqrt{(t-1)^2 + 1} dt.$$

Bước 2: Thực hiện phép đổi biến $u = t - 1$, suy ra:

$$du = dt \text{ \& } \sqrt{(t-1)^2 + 1} dt = \sqrt{u^2 + 1} du.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \sqrt{u^2 + 1} du \\&= \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 + 1}| + C \\&= \frac{t-1}{2} \sqrt{(t-1)^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln|t-1 + \sqrt{(t-1)^2 + 1}| + C \\&= \frac{e^x - 1}{2} \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 2} + \frac{1}{2} \ln|e^x - 1 + \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 2}| + C\end{aligned}$$

DẠNG 3: Tìm nguyên hàm của hàm số mũ và lôgarit bằng phương pháp đổi biến

Phương pháp đổi biến được sử dụng cho các hàm số mũ và lôgarit với mục đích chủ đạo để chuyển biểu thức dưới dấu tích phân về các dạng hữu tỉ hoặc vô tỉ, tuy nhiên trong nhiều trường hợp cần tiếp thu những kinh nghiệm nhỏ đã được trình bày bằng các chú ý.

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

 **Giải**

Ta có thể lựa chọn các cách trình bày sau:

Cách 1: Ta có;

$$\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{dx}{e^x \sqrt{e^{-2x}+1}} = \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = -\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{e^{-2x}+1}}.$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = -\int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = -\ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}) + C$$

Cách 2: Đặt $t = \sqrt{1+e^{2x}}$, suy ra:

$$t^2 = 1 + e^{2x} \Rightarrow 2tdt = 2e^{2x} dx \Leftrightarrow dx = \frac{tdt}{t^2-1}.$$

Khi đó:

$$\int f(x) dx = \int \frac{tdt}{t(t^2-1)} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right| + C.$$

Cách 3: Đặt $t = e^x$, suy ra $dt = e^x dx$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 \sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} \\ &= -\ln \left| \frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2}+1} \right| + C = -\ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}) + C. \end{aligned}$$

Cách 4: Đặt $t = e^{-x}$, suy ra:

$$dt = -e^{-x} dx \Leftrightarrow -dt = \frac{dx}{e^x}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}(e^{-2x}+1)}} = \int \frac{dx}{e^x \sqrt{e^{-2x}+1}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{t^2+1}} \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\ln|t + \sqrt{t^2+1}| + C = -\ln|e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}| + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: (ĐHQG HN Khối D – 1999): Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 4e^{-x}}.$$

 *Giải*

Đặt $e^x = t$, suy ra $e^x dx = dt$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{dx}{e^x - 4e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 4} = \int \frac{dt}{t^2 - 4} = \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{e^x - 2}{e^x + 2} \right| + C. \end{aligned}$$

DẠNG 4: Tìm nguyên hàm của hàm số mũ và lôgarit bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần

Chúng ta đã được biết trong phần *Xác định nguyên hàm bằng phương pháp tích phân từng phần*, đối với các dạng nguyên hàm:

Dạng 1: Tính:

$$\int e^{ax} \cos(bx) \quad (\text{hoặc } \int e^{ax} \sin(bx) \text{ với } a, b \neq 0).$$

Khi đó, ta đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(bx) \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} u = \sin(bx) \\ dv = e^{ax} dx \end{cases}.$$

Ngoài ra cũng có thể sử dụng phương pháp hằng số bất định.

Dạng 2: Tính:

$$\int P(x) e^{\alpha x} dx \text{ với } \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Khi đó, ta đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{\alpha x} dx \end{cases}.$$

Ngoài ra cũng có thể sử dụng phương pháp hằng số bất định.

Ví dụ 1: (ĐHHH – 1998) Tìm $I = \int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx$.

 *Giải*

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln \frac{1-x}{1+x} \\ dv = x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{-1}{1-x^2} dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} + \int \frac{x^2}{2(1-x^2)} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} + \int \left(\frac{1}{2(1-x^2)} - \frac{1}{2} \right) dx + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2}x + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (\tan^2 x + \tan x + 1)e^x$.

 **Giải**

Ta có:

$$\int f(x) dx = \int (\tan^2 x + \tan x + 1)e^x = \int (\tan^2 x + 1)e^x + \int e^x \tan x dx. \quad (1)$$

Xét tích phân $J = \int e^x \tan x dx$, đặt:

$$\begin{cases} u = \tan x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x) dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = e^x \tan x - \int (\tan^2 x + 1)e^x. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\int f(x) dx = e^x \tan x + C.$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = 3x \sqrt{7-3x^2}$.

b. $f(x) = \cos(3x+4)$.

c. $f(x) = x^2 \left(\frac{x^3}{18} - 1 \right)^5$.

d. $f(x) = \frac{1}{\cos^2(3x+2)}$.

e. $f(x) = \sin^5 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}$.

Bài tập 2: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \sin^4 x \cos x$.

b. $f(x) = x \cos(x^2)$.

Bài tập 3: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = x^2(1-x^2)^2$.

b. $f(x) = x^3(1+x^4)^3$.

c. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$.

d. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

e. $f(x) = \frac{1}{x^2} \cos \left(\frac{1}{x} - 1 \right)$.

Bài tập 4: Tìm:

a. $I = \int x^3(2-3x^2)^8 dx$.

b. $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x}}$.

Bài tập 5: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = x^2 \cos 2x$.

b. $y = xe^{-x}$.

Bài tập 6: Tìm:

a. $I = \int \frac{x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

b. $I = \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$.

c. $I = \int \sin(\ln x) dx$.

Bài tập 7: Tìm nguyên hàm của các hàm số:

a. $f(x) = x \cdot \cos \frac{x}{2}$.

b. $f(x) = x \cdot \cos^2 x$.

Bài tập 8: Tính $I = \int x \cdot \sin x \cdot \cos x dx$.

Bài tập 9: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cdot \sin x$.

Bài tập 10: Tính $I = \int (x^3 - x^2 + 2x - 3) \sin x dx$.

Bài tập 11: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = x \cdot e^{3x}$.

b. $f(x) = (x + 1) \cdot e^x$.

Bài tập 12: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = x^2 e^{2x}$.

b. $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1) \cdot e^x$.

Bài tập 13: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = x \cdot \ln x$.

b. $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1) \ln(2x)$.

Bài tập 14: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = x \cdot \ln(x + 1)$.

b. $f(x) = (3x^2 + 2x + 1) \cdot \ln(x + 1)$.

Bài tập 15: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = e^x \cdot \sin 2x$.

b. $f(x) = e^x \cdot \cos x$.

Bài tập 16: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = e^x \cdot \sin^2 x$.

b. $f(x) = (\tan^2 x + \tan x - 1) e^x$.

Bài tập 17: Đặt $I_n = \int \sin^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

a. Chứng minh rằng $I_n = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

b. Tìm I_3 .

Bài tập 18: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x - 5}$.

c. $f(x) = \frac{x}{x^4 - 2x^2 - 2}$.

b. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3x + 2}$.

d. $f(x) = \frac{x^3}{x^4 - x^2 - 2}$.

Bài tập 19: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^{2009}}$.

b. $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^{2009}}$.

Bài tập 20: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - (m+2)x + 2m}$.

Tính tích phân bất định $I = \int f(x) dx$ biết:

a. $m = 1$.

b. $m = 2$.

Bài tập 21: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 3x + 2)^3}$.

c. $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$.

b. $f(x) = \frac{(4x - 3)dx}{(x^2 - 2x - 3)^3}$.

d. $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$.

Bài tập 22: (ĐHTM – 1994): Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 5}{x^3 - 3x + 2}$.

a. Tìm m, n, p để $f(x) = \frac{m}{(x-1)^2} + \frac{n}{x-1} + \frac{p}{x+2}$.

b. Tìm họ nguyên hàm của f(x).

Bài tập 23: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x}$.

b. $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x - 1}{x^4 + x^3}$.

Bài tập 24: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{2x + 1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3}$.

b. $f(x) = \frac{1}{x(x^6 + 1)^2}$.

Bài tập 25: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x(x^3 - 4)(x^4 - 4x + 1)}$.

b. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1}$.

Bài tập 26: Tìm $I = \int \frac{(8x^3 + 24x^2 + 15x)dx}{(8x^2 + 16x - 1)\sqrt{x^2 + 2x}}$.

Bài tập 27: Tìm:

a. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

b. $\int \frac{(4x + 1)dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$.

Bài tập 28: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$.

Bài tập 29: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

b. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Bài tập 30: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9x^2 - 6x}}$.

b. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x|\sqrt{x^4 + 1}}$.

Bài tập 31: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{(1 + x^2)^3}}}$.

b. $f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1 + x^{n+2}}}$.

Bài tập 32: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{2x\sqrt{2x+1}}.$

b. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2-1}.$

Bài tập 33: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}.$

b. $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}}.$

Bài tập 34: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1 + 2x\sqrt{x^2+1} + 2x^2}{1 + x + \sqrt{x^2+1}}.$

b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}[\sqrt[3]{(x+1)^2+1}]}.$

Bài tập 35: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \sin^4 2x.$

c. $f(x) = \cos x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x.$

b. $f(x) = \sin^8 x + \cos^8 x.$

d. $f(x) = \cos^3 x \cdot \sin 8x.$

Bài tập 36: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(2 + \sin 2x).$

b. $f(x) = \tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$

Bài tập 37: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{\sin^2 x + 1}}.$

b. $f(x) = \frac{8 \cos x}{2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x}.$

Bài tập 38: Tìm:

a. $I = \int \frac{x \cdot dx}{\cos^2 2x}.$

b. $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

Bài tập 39: (ĐHNT TPHCM Khối A,D – 2000): Tìm:

a. $J = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x} dx.$

b. $H = \int \frac{dx}{1 + \sin 2x}.$

Bài tập 40: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^x.$

h. $f(x) = \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}.$

b. $f(x) = (3^{2x} + 2^x)^2.$

c. $f(x) = 2^{2x} \cdot 3^{3x} \cdot 4^x.$

i. $f(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

d. $f(x) = \sin(\ln x).$

e. $f(x) = x^n \ln x.$

j. $f(x) = \frac{(1 + \sin x)e^x}{1 + \cos x}.$

f. $f(x) = \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}.$

k. $f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}.$

g. $f(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}.$

CHỦ ĐỀ 3 TÍCH PHÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng I và a, b là hai số bất kì thuộc I . Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của $f(x)$ từ a đến b và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Ta có công thức Niuton – Laipnit:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

 **Chú ý:** Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ chỉ phụ thuộc vào f, a, b mà không phụ thuộc vào cách ký hiệu biến số tích phân. Vì vậy, ta có thể viết:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$

Định lý 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên khoảng I và a, b là hai số thuộc I ($a < b$). Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là:

$$S = \int_a^b f(x).dx.$$

2. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Định lý 2: Giả sử các hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên I và a, b, c là ba số bất kì thuộc I . Khi đó ta có:

Tính chất 1: $\int_a^a f(x)dx = 0.$

Tính chất 2: $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$

Tính chất 3: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$

Tính chất 4: $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$, với $k \in \mathbb{R}.$

Tính chất 5: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

Để tính $\int_a^b f(x)dx$ ta sử dụng:

- Bảng nguyên hàm các hàm số sơ cấp cơ bản.
- Sử dụng máy tính CASIO fx — 570MS, bằng cách thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thiết lập môi trường bằng cách ấn:

MODE **1**

Bước 2: Để tính $\int_a^b f(x)dx$, ta khai báo theo cú pháp:

∫dx < hàm số f(x) > **,** a **,** b **) =**.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: TÍNH TÍCH PHÂN SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN VÀ BẢNG NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^2 (x^2 - 3x^{-4}) dx$.

b. $\int_0^2 (x\sqrt{x} - x) dx$.

c. $\int_0^{-1} x^3(x+1)dx$.

d. $\int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 dx$.

 **Giải**

a. Ta có:

$$\int_1^2 (x^2 - 3x^{-4}) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^{-3} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{35}{24}.$$

b. Ta có:

$$\int_0^2 (x\sqrt{x} - x) dx = \int_0^2 (x^{\frac{3}{2}} - x) dx = \left(\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{5} \cdot 2^{5/2} - \frac{1}{2} \cdot 2^2 = \frac{8\sqrt{2}}{5} - 2.$$

c. Ta có:

$$\int_0^{-1} x^3(x+1)dx = \int_0^{-1} (x^4 + x^3)dx = \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^{-1} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

d. Ta có:

$$\begin{aligned} \int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 dx &= \int_1^4 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x \right) \Big|_1^4 \\ &= \left(\frac{16}{2} - \frac{32}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 \right) = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để tính các tích phân trên:

- Ở câu a) chúng ta chỉ việc sử dụng công thức sẵn trong bảng nguyên hàm là chỉ ra được nguyên hàm của hàm số. Từ đó nhận được giá trị của tích phân.
- Ở câu b) chúng ta cần chuyển $x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$ để sử dụng công thức $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$ trong bảng nguyên hàm.
- Ở câu c) và câu d) chúng ta cần chuyển biểu thức dưới dấu tích phân về dạng tổng của các đơn thức.

Ví dụ 2: Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^2 \frac{(x^2 - 2)dx}{x}$.

b. $\int_1^3 \frac{(x^3 - x^2 + x)dx}{x}$.

 **Giải**

a. Ta có:

$$\int_1^2 \frac{(x^2 - 2)dx}{x} = \int_1^2 \left(x - \frac{2}{x} \right) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\ln|x| \right) \Big|_1^2 = (2 - 2\ln 2) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{(x^3 - x^2 + x)dx}{x} &= \int_1^3 (x^2 - x + 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right) \Big|_1^3 \\ &= \left(9 - \frac{9}{2} + 3 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để tính các tích phân trên chúng ta chỉ cần tách hàm số dưới dấu tích phân thành các hàm số nhỏ rồi sử dụng công thức có sẵn trong bảng nguyên hàm.

Ví dụ 3: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^1 \left(e^{2x} + \frac{3}{x+1} \right) dx$.

b. $\int_{-2}^2 \left(10^{\frac{x}{4}} - \sin \pi x \right) dx$.

 **Giải**

a. Ta có:

$$\int_0^1 \left(e^{2x} + \frac{3}{x+1} \right) dx = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + 3\ln|x+1| \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} + 3\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

b. Ta có:

$$\int_{-2}^2 \left(10^{\frac{x}{4}} - \sin \pi x \right) dx = \left(\frac{10^{x/4}}{4\ln 10} + \frac{\cos \pi x}{\pi} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{36}{\sqrt{10} \cdot \ln 10}.$$

Ví dụ 4: Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x}} dx.$

b. $\int_0^1 (\sqrt{e^x} - 1) dx.$

 **Giải**

a. Ta có:

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x}} dx = 4 \int_1^2 e^{-2x} dx = -2e^{-2x} \Big|_1^2 = -2(e^{-4} - e^{-2}).$$

b. Ta có:

$$\int_0^1 (\sqrt{e^x} - 1) dx = \int_0^1 (e^{\frac{x}{2}} - 1) dx = (2e^{\frac{x}{2}} - x) \Big|_0^1 = 2\sqrt{e} - 3.$$

 **Nhận xét:** Vì trong bảng nguyên hàm các hàm số thường gặp chúng ta chỉ có công thức $\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$ nên cần thực hiện các phép

biến đổi $\frac{4}{e^{2x}} = 4e^{-2x}$ và $\sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}.$

Ví dụ 5: a. Tìm b, biết $\int_0^b (2x - 4) dx = 0.$ b. Tìm a dương, biết $\int_a^{1/\sqrt{e}} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}.$
c. Tìm n, biết $\int_0^{\pi/6} \sin^n x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{64}.$

 **Giải**

a. Ta có:

$$0 = \int_0^b (2x - 4) dx = (x^2 - 4x) \Big|_0^b = b^2 - 4b \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 4 \end{cases}.$$

Vậy, với b = 0 hoặc b = 4 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có:

$$\frac{1}{2} = \int_a^{1/\sqrt{e}} \frac{dx}{x} = (\ln |x|) \Big|_a^{1/\sqrt{e}} = \ln \frac{1}{\sqrt{e}} - \ln |a| \Leftrightarrow \ln |a| = -1 \Leftrightarrow |a| = \frac{1}{e} \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{e}.$$

Vậy, với $a = \frac{1}{e}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

c. Ta có:

$$\frac{1}{64} = \int_0^{\pi/6} \sin^n x \cdot \cos x \cdot dx = \int_0^{\pi/6} \sin^n x \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} \Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow (n+1) \cdot 2^{n+1} = 64 \Leftrightarrow n = 3.$$

Vậy, với n = 3 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 6: Hàm số $f(x) = a \cdot \sin \pi x + b$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $\int_0^1 f(x) dx = 4$. Tìm a, b .

 *Giải*

Ta lần lượt xét các giả thiết:

▪ Với $f(1) = 2$ thì $a \cdot \sin \pi + b = 2 \Leftrightarrow b = 2$. (1)

▪ Với $\int_0^1 f(x) dx = 4$ thì:

$$4 = \int_0^1 (a \cdot \sin \pi x + b) dx = \left(-\frac{a}{\pi} \cos \pi x + bx \right) \Big|_0^1 = \frac{2a}{\pi} + b \stackrel{(1)}{\Rightarrow} a = \pi.$$

Vậy, với $a = \pi, b = 2$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 7: (Bài 45/tr 176 – Sgk): Xác định số b dương để tích phân $\int_0^b (x - x^2) dx$ có giá trị lớn nhất.

 *Giải*

Ta có:

$$\int_0^b (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^b = \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3}.$$

Xét hàm số $y = \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3}$ trên tập $D(0; +\infty)$, ta có:

$$y' = b - b^2; \quad y' = 0 \Leftrightarrow b - b^2 = 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ hoặc } b = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'			+	0	-
y		0	$\nearrow$ CĐ $\searrow$	0	$-\infty$

Vậy, hàm số có giá trị lớn nhất khi $b = 1$.

 **Chú ý:** Trong các ví dụ trên, ta đã sử dụng định nghĩa cùng các tính chất 4 và 5 để tính tích phân. Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa việc sử dụng tính chất 3 để tính tích phân.

Ví dụ 8: (Bài 46/tr 176 – Sgk): Cho biết $\int_1^9 f(x) dx = -1, \int_7^9 f(x) dx = 5, \int_7^9 g(x) dx = 4$.

Hãy tìm:

a. $\int_1^9 -2f(x) dx$.

b. $\int_7^9 [f(x) + g(x)] dx$

c. $\int_7^9 [2f(x) - 3g(x)] dx$.

d. $\int_1^9 f(x) dx$.

 *Giải*

a. Ta có:

$$\int_1^9 -2f(x)dx = -2 \int_1^9 f(x)dx = -2(-1) = 2.$$

b. Ta có:

$$\int_7^9 [f(x) + g(x)]dx = \int_7^9 f(x)dx + \int_7^9 g(x)dx = 5 + 4 = 9.$$

c. Ta có:

$$\int_7^9 [2f(x) - 3g(x)]dx = 2 \int_7^9 f(x)dx - 3 \int_7^9 g(x)dx = 2.5 - 3.4 = -2.$$

d. Ta có:

$$\int_1^9 f(x)dx = \int_1^7 f(x)dx + \int_7^9 f(x)dx \Leftrightarrow \int_1^7 f(x)dx = \int_1^9 f(x)dx - \int_7^9 f(x)dx = -6.$$



Chú ý: Trước khi thực hiện ví dụ 9, các em học sinh cần nhớ lại rằng:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$

Ví dụ 9: a. Giả sử $\int_0^3 f(z)dz = 3$, $\int_0^4 f(x)dx = 7$. Tính $\int_3^4 f(t)dt$.

b. Giả sử $\int_{-1}^1 f(t)dt = 5$ và $\int_{-1}^3 f(r)dr = 6$. Tính $\int_1^3 f(u)du$.

 *Giải*

a. Ta có:

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = \int_0^3 f(z)dz + \int_3^4 f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \int_3^4 f(t)dt = \int_0^4 f(x)dx - \int_0^3 f(z)dz = 7 - 3 = 4.$$

b. Ta có:

$$\Leftrightarrow \int_1^3 f(u)du = \int_{-1}^3 f(u)du - \int_{-1}^1 f(u)du = \int_{-1}^3 f(r)dr - \int_{-1}^1 f(t)dt = 6 - 5 = 1.$$



Chú ý: Tính chất còn được sử dụng trong việc tính tích phân của các hàm số chứa dấu trị tuyệt đối. Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa cho dạng toán này.

Ví dụ 10: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^2 |1-x|dx$.

b. $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|dx$.

c. $\int_0^{\pi} |\cos x|dx$.

 Giải

a. Xét hàm số $y = |1 - x|$ trên đoạn $[0; 2]$, ta có:

$$1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1, \quad 1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Từ đó, suy ra:

$$\begin{aligned} \int_0^2 |1 - x| dx &= \int_0^1 |1 - x| dx + \int_1^2 |1 - x| dx = \int_0^1 (1 - x) dx - \int_1^2 (1 - x) dx \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 - \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 1. \end{aligned}$$

b. Xét hàm số $y = \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e}; e \right]$, ta có:

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1, \quad \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Từ đó, suy ra:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx &= \int_{\frac{1}{e}}^1 |\ln x| dx + \int_1^e |\ln x| dx = - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx \\ &= -x(\ln x - 1) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + x(\ln x - 1) \Big|_1^e = 2 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

c. Xét hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[0; \pi]$, ta có:

$$\cos x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{2}, \quad \cos x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{2}.$$

Từ đó, suy ra:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |\cos x| dx &= \int_0^{\pi/2} |\cos x| dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx \\ &= \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2. \end{aligned}$$

Ví dụ 11: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}.$

b. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}.$

 Giải

a. Ta có:

$$\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} = \frac{1}{9} \int_0^{16} (\sqrt{x+9} + \sqrt{x}) dx = \frac{2}{27} \left[(x+9)^{3/2} + x^{3/2} \right] \Big|_0^{16} = 12.$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} &= \frac{1}{4} \int_2^5 (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} [(x+2)^{3/2} - (x-2)^{3/2}] \Big|_2^5 = \frac{1}{6} (7^{3/2} - 3^{3/2} - 4^{3/2}). \end{aligned}$$

 **Chú ý:** Việc sử dụng đúng đắn các công thức cho phép ta xác định được chính xác các tích phân chứa tham số.

Ví dụ 12: Tính tích phân $I = \int_0^a (1+x)^n dx$ với $n \in \mathbb{Z}^+$.

 **Giải**

Ta có:

$$I = \int_0^a (1+x)^n d(x+1) = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^a = \frac{(a+1)^{n+1} - 1}{n+1}.$$

 **Chú ý:** Với hàm số $f(x)$ được cho bởi các khoảng, khi đó để tính $\int_a^b f(x)dx$ trước hết cần khẳng định hàm số liên tục trên $[a; b]$ rồi sử dụng tính chất 3 để tính tích phân.

Ví dụ 13: Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ |x-1| & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}.$$

a. Chứng tỏ rằng hàm số liên tục toàn trục số.

b. Với kết quả từ a) hãy tính $\int_{-2}^3 f(x)dx$.

 **Giải**

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{khi } x > 1 \\ \cos \frac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ 1-x & \text{khi } x < -1 \end{cases}.$$

a. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

▪ Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x = 1$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \\ f(1) = 0$$

Suy ra, hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.

▪ Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x = -1$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (1-x) = 0 \\ f(-1) = 0$$

Suy ra, hàm số liên tục tại điểm $x = -1$.

Vậy, hàm số liên tục trên toàn trục số.

b. Ta có ngay:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^3 f(x)dx &= \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (1-x)dx + \int_{-1}^1 \cos \frac{\pi x}{2} dx + \int_1^3 (x-1)dx \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{-1} + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{4}{\pi}.\end{aligned}$$

 **Chú ý:** Một dạng toán mà các em học sinh cần quan tâm là "Đạo hàm của hàm số xác định bởi tích phân". Ta có các dạng sau:

Dạng 1. Với $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ thì $F'(x) = f(x)$.

Với $F(x) = \int_x^a f(t)dt$ thì viết lại:

$$F(x) = -\int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = -f(x).$$

Dạng 2. Với $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt$ thì $F'(x) = u'(x)f[u(x)]$.

Dạng 3. Với $F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$ thì viết lại:

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_a^{u(x)} f(t)dt - \int_a^{v(x)} f(t)dt \\ \Rightarrow F'(x) &= u'(x)f[u(x)] - v'(x)f[v(x)].\end{aligned}$$

Ví dụ 14: Tính đạo hàm của các hàm số:

$$\text{a. } F(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 + 1}}. \quad \text{b. } G(x) = \int_{\sin^2 x}^{\sin x^2} (\sin t^2 + \cos 2t)dt.$$

 **Giải**

a. Ta biến đổi:

$$F(x) = \int_{2x}^0 \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 + 1}} + \int_0^{x^2} \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = -\int_0^{2x} \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 + 1}} + \int_0^{x^2} \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

Từ đó, suy ra:

$$F'(x) = -(2x)' \frac{(2x)^2}{\sqrt{(2x)^2 + 1}} + (x^2)' \frac{(x^2)^2}{\sqrt{(x^2)^2 + 1}} = \frac{-8x^2}{\sqrt{4x^2 + 1}} + \frac{2x^5}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

b. Ta biến đổi:

$$\begin{aligned}G(x) &= \int_{\sin^2 x}^0 (\sin t^2 + \cos 2t)dt + \int_0^{\sin x^2} (\sin t^2 + \cos 2t)dt \\ &= -\int_0^{\sin^2 x} (\sin t^2 + \cos 2t)dt + \int_0^{\sin x^2} (\sin t^2 + \cos 2t)dt.\end{aligned}$$

Từ đó, suy ra:

$$\begin{aligned} G'(x) &= -(\sin^2 x)' [\sin(\sin^2 x)^2 + \cos 2(\sin^2 x)] + \\ &\quad + (\sin x^2)' [\sin(\sin x^2) + \cos 2(\sin x^2)]. \\ &= -2\cos x \cdot \sin x [\sin(\sin^2 x)^2 + \cos 2(\sin^2 x)] + \\ &\quad + 2x \cdot \cos x^2 [\sin(\sin x^2) + \cos 2(\sin x^2)]. \end{aligned}$$

Vấn đề 2: TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

Sử dụng kiến thức đã thu nhận được trong phần "*Tìm nguyên hàm bằng phương pháp phân tích*".

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

a. (HVKTS – 1995): $I = \int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)^2}.$

b. (ĐHTM – 1999): $I = \int_1^4 \frac{1}{x^2(x+1)} dx.$

 **Giải**

a. Sử dụng đồng nhất thức:

$$x = x + 1 - 1.$$

Ta được:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \left[\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} \right] \Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

b. Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = x^2 - x^2 - x + x + 1.$$

Ta được:

$$I = \int_1^4 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^4 = \ln \frac{5}{8} + \frac{3}{4}.$$

Ví dụ 2: (ĐHY HN – 2000): Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^2}{x^2 - 7x + 12} dx$

 **Giải**

Ta đi biến đổi:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2 - 7x + 12} &= 1 + \frac{7x - 12}{x^2 - 7x + 12} = 1 + \frac{7x - 12}{(x-3)(x-4)} = 1 + \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4} \\ &= 1 + \frac{(A+B)x - 4A - 3B}{(x-3)(x-4)}. \end{aligned}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A + B = 7 \\ -4A - 3B = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -9 \\ B = 16 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \int_1^2 \left(1 - \frac{9}{x-3} + \frac{16}{x-4} \right) dx = \left(x - 9 \ln|x-3| + 16 \ln|x-4| \right) \Big|_1^2 = 1 + 25\ln 2 - 16\ln 3.$$

Ví dụ 3: Tính các tích phân sau:

a. (CĐHQ TPHCM – 2000): $I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$.

b. (ĐHTM – 1995): $I = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

 *Giải*

a. Ta có:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x) dx = \frac{1}{4} \left(-3 \cos x + \frac{1}{3} \cos 3x \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

b. Ta có:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 x) d(\tan x) = \left(\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{4}{3}.$$

Ví dụ 4: (Đề 91 – Bộ đề 1996): Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$.

a. Tìm hai số A, B sao cho $f(x) = A + B \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right)$.

b. Tính $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$.

 *Giải*

a. Ta có:

$$\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = A + B \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right) = \frac{(A+B)\cos x + (A-B)\sin x}{\cos x + \sin x}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

b. Với kết quả ở câu a) ta được:

$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos x - \sin x}{2(\cos x + \sin x)} \right] dx = \left[\frac{1}{2} x - \ln(\cos x + \sin x) \right] \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

 **Chú ý:** Thông thường các đề thi không đưa ra câu gợi ý a) như trên, khi đó với các tích phân dạng:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx.$$

các em học sinh cần hiểu rằng ta phải thực hiện phép phân tích:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 = A(a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2) + B(a_2 \cos x - b_2 \sin x) + C.$$

ở đó A, B, C được xác định bằng phương pháp hệ số bất định.

Ví dụ 5: (ĐHTCKT – 1999): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + 7 \cos x + 6}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$.

 **Giải**

Giả sử:

$$\begin{aligned} \sin x + 7 \cos x + 6 &= a(4 \sin x + 3 \cos x + 5) + b(4 \cos x - 3 \sin x) + c \\ &= (4a - 3b) \sin x + (3a + 4b) \cos x + 5a + c. \end{aligned}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} 4a - 3b = 1 \\ 3a + 4b = 7 \\ 5a + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{4 \cos x - 3 \sin x}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} + \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} \right) dx \\ &= (x + \ln |4 \sin x + 3 \cos x + 5|) \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} \\ &= \frac{\pi}{2} + \ln 3 + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}}_J. \end{aligned} \tag{1}$$

Với tính tích phân J ta đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, suy ra:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \& \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \& \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$.
- Với $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Khi đó:

$$J = \int_0^1 \frac{2}{8t + 3(1-t^2) + 5(1+t^2)} dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+2)^2} dt = - \frac{1}{t+2} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được $I = \frac{\pi}{2} + \ln 3 + \frac{1}{6}$.

Vấn đề 3: Ý NGHĨA CỦA TÍCH PHÂN

Sử dụng kiến thức trong bài toán về diện tích hình thang cong và quãng đường đi của một vật.

Ví dụ 1: (Bài 10/tr 152 – Sgk): *Hãy tính các tích phân sau:*

$$\text{a. } \int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3 \right) dx. \quad \text{b. } \int_{-1}^2 |x| dx. \quad \text{c. } \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx.$$

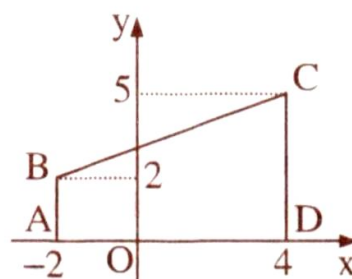
 *Giải*

a. Tích phân $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3 \right) dx$ là diện tích hình thang

ABCD giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x}{2} + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2$, $x = 4$.

Ta có:

$$\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3 \right) dx = S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD) AD = \frac{1}{2} (2 + 5) 6 = 21.$$

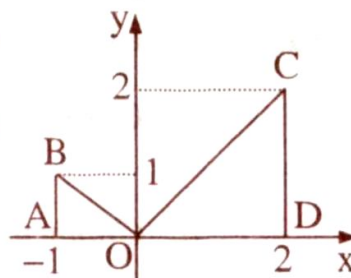


b. Tích phân $\int_{-1}^2 |x| dx$ là diện tích của hai tam giác OAB

và OCD giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x|$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 |x| dx &= S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} AB \cdot OA + \frac{1}{2} CD \cdot OD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$



c. Hàm số $y = \sqrt{9 - x^2}$ là một hàm số không âm liên tục trên $[-3; 3]$ và có đồ thị là nửa đường tròn tâm O bán kính $R = 3$ (gọi là (C)) trên mặt phẳng tọa độ, do đó tích phân trên là diện tích của nửa đường tròn (C).

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{9\pi}{2}.$$

Ví dụ 2: (Bài 48/tr 176 – Sgk): Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi $t = 0$ (s) chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = t(5 - t)$ (m/s). Tìm quãng đường vật đi được cho tới khi nó dừng lại.

 **Giải**

Trước tiên, ta có thời điểm vật dừng lại được cho bởi:

$$t(5 - t) = 0 \stackrel{t \neq 0}{\Leftrightarrow} t = 5.$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 5 giây được cho bởi:

$$L = \int_0^5 t(5 - t) dt = \int_0^5 (5t - t^2) dt = \left(\frac{5t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^5 = \frac{125}{6}.$$

Ví dụ 3: (Bài 15/tr 153 – Sgk): Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ (m/s²). Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

 **Giải**

Công thức tính vận tốc được cho bởi:

$$v(t) = 10 + \int_0^x (3t + t^2) dt = 10 + \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^x = 10 + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc được cho bởi:

$$L = \int_0^{10} \left(10 + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) dx = \left(10x + \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{12} \right) \Big|_0^{10} = \frac{4300}{3}.$$

Vấn đề 4: MỞ ĐẦU VỀ BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Ví dụ 1: (Bài 13/tr 152 – Sgk):

a. Chứng minh rằng nếu $f(x) > 0$ trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx > 0$.

b. Chứng minh rằng nếu $f(x) > g(x)$ trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$.

 **Giải**

a. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và với $a < c < b$, ta có:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b - a) = f(c)(b - a) > 0, \text{ đpcm.}$$

b. Gọi $F(x)$, $G(x)$ theo thứ tự là một nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$ và với $a < c < b$, ta có:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \cdot dx - \int_a^b g(x) \cdot dx &= [F(b) - F(a)] - [G(b) - G(a)] \\ &= F'(c)(b-a) - G'(c)(b-a) = f(c)(b-a) - g(c)(b-a) \\ &= [f(c) - g(c)](b-a) > 0.\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: a. Giả sử M và m theo thứ tự là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Chứng minh rằng:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

b. Sử dụng bất đẳng thức ở trên để đánh giá các tích phân:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, J = \int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^2}, L = \int_{0.5}^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

c. Từ công thức $I = J + L$, hãy đưa ra một đánh giá chính xác hơn cho I .

 **Giải**

a. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, ta có:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b-a) = f(c) \cdot (b-a), \text{ với } a < c < b.$$

Từ giả thiết $m \leq f(c) \leq M$, suy ra: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$, đpcm.

b. Ta lần lượt có:

■ Với $x \in [0; 1]$ thì:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_0^1 dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} x \Big|_0^1 \leq I \leq x \Big|_0^1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq I \leq 1.$$

■ Với $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ thì:

$$\begin{aligned}\frac{4}{5} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 &\Rightarrow \frac{4}{5} \int_0^{1/2} dx \leq \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_0^{1/2} dx \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{5} x \Big|_0^{1/2} \leq J \leq x \Big|_0^{1/2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq J \leq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

■ Với $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ thì:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{4}{5} &\Rightarrow \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 dx \leq \int_{1/2}^1 \frac{dx}{1+x^2} \leq \frac{4}{5} \int_{1/2}^1 dx \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} x \Big|_{1/2}^1 \leq L \leq \frac{4}{5} x \Big|_{1/2}^1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq L \leq \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

c. Ta có:

$$\begin{cases} \frac{2}{5} \leq J \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \leq J \leq \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \leq J + L \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{13}{20} \leq I \leq \frac{9}{10}.$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng:

$$\text{a. } \frac{\pi}{2} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{3+2\sin^2 x} \, dx \leq \frac{\pi\sqrt{5}}{4}. \quad \text{b. } 1 \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \, dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

 **Giải**

a. Với $x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ ta có nhận xét:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq 1 &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq 3 + 2\sin^2 x \leq 5 \\ \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{3+2\sin^2 x} \leq \sqrt{5} &\Rightarrow \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2 \, dx \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{3+2\sin^2 x} \, dx \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{5} \, dx \\ \Leftrightarrow 2x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{3+2\sin^2 x} \, dx \leq \sqrt{5} x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{3+2\sin^2 x} \, dx \leq \frac{\pi\sqrt{5}}{4}, \text{ đpcm.} \end{aligned}$$

b. Với $x \in [0; 1]$ ta có nhận xét:

$$\begin{aligned} 0 \leq x^2 \leq 1 &\Rightarrow 4 \leq 4 + x^2 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \Rightarrow \int_0^1 dx &\leq \int_0^1 \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \, dx \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{2} \, dx \Leftrightarrow x \Big|_0^1 \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \, dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \Big|_0^1 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq \int_0^1 \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \, dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: (Bài 47/tr 176 – Sgk): Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Tỷ số $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ và được kí hiệu là $m(f)$. Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (a; b)$ sao cho $m(f) = f(c)$.

 **Giải**

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, ta có:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Theo định lí Lagrange thì tồn tại một điểm $c \in (a; b)$ sao cho:

$$F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a) \Leftrightarrow f(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx.$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^3 (x^2 + x - 2x^{-3}) dx.$

c. $\int_1^9 (\sqrt{x} + 2)^2 dx.$

b. $\int_0^1 (x^2 \sqrt{x} - 2x + 1) dx.$

d. $\int_1^{-2} x^2 (x^3 + 1) dx.$

Bài tập 2: Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^3 \frac{(x^3 - 2x^2 + x + 3) dx}{x}.$

b. $\int_1^3 \frac{(3x^3 + x^2 + 2x + 1) dx}{x^2}.$

Bài tập 3: Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 dx.$

b. $\int_0^1 \left(e^{1-2x} + \frac{2}{x+2} \right) dx.$

Bài tập 4: Tính các tích phân sau:

a. $\int_{-1}^1 (e^x - e^{-x})^2 dx.$

b. $\int_0^2 (\sqrt{e^x} + x) dx.$

Bài tập 5: Tính các tích phân sau:

a. $J = \int_0^4 (3x - e^{\frac{x}{4}}) dx.$

b. $I = \int_1^2 \frac{(x^2 - 2x) dx}{x^3}.$

Bài tập 6: Tính các tích phân sau:

a. $J = \int_0^1 \frac{x dx}{4 - x^2}.$

b. $I = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{4 - x^2}.$

Bài tập 7: Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 7x \cdot \sin 2x dx.$

b. $J = \int_0^{\pi/4} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx.$

Bài tập 8: a. Giả sử $\int_0^3 f(z) dz = 1$, $\int_0^4 f(x) dx = 4$. Tính $\int_0^4 f(t) dt$

b. Giả sử $\int_{-1}^1 f(t) dt = 3$ và $\int_{-1}^3 f(r) dr = 9$. Tính $\int_1^3 f(u) du$.

Bài tập 9: Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^{2e} |1 - \ln x| dx.$

b. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| dx.$

Bài tập 10: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}.$

b. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}.$

Bài tập 11: Cho biết $\int_1^2 f(x)dx = -4$, $\int_1^5 f(x)dx = 6$, $\int_1^5 g(x)dx = 8$. Hãy tính:

a. $\int_1^5 [f(x) - g(x)]dx$.

b. $\int_1^5 [4f(x) - g(x)]dx$.

Bài tập 12: Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$.

c. $I = \int_0^{\pi/2} \cos 2x (\cos^4 x + \sin^4 x) dx$.

b. $I = \int_0^{\pi/4} \sin^4 x dx$.

d. $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx$.

Bài tập 13: Cho $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$.

a. Tìm A, B sao cho $f(x) = A + B \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right)$.

b. Tính $I = \int_0^{\pi/3} f(x)dx$.

Bài tập 14: Xác định các hằng số A, B, C sao cho:

$$\sin x - \cos x + 1 = A(\sin x + 2\cos x + 3) + B(\cos x - 2\sin x) + C.$$

Dựa vào kết quả đó tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + 2\cos x + 3} dx$

Bài tập 15: (ĐH XD HN - 97): Cho hàm số

$$f(x) = 4\cos x + 3\sin x; \quad g(x) = \cos x + 2\sin x:$$

a. Tìm A, B để $g(x) = A.f(x) + B.f(x)$.

b. Tính $I = \int_0^{\pi/4} \frac{g(x)}{f(x)} dx$.

Bài tập 16: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1,2 + \frac{t^2 + 4}{t + 3}$ (m/s). Tìm quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian 1,5 giây (chính xác đến 0,01m).

Bài tập 17: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $F(x) = \int_a^x (e^t + \cos t^2) dt$.

b. $G(x) = \int_{x^2}^a (t^2 + \sqrt{t^2 + 1}) dt$.

Bài tập 18: Lập bảng biến thiên của họ hàm số:

$$y = x + \int (4x^2 + e^x) dx.$$

Bài tập 19: Chứng minh rằng:

a. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx \leq 2 \int_0^{\pi/2} \sin x dx$.

b. $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{dx}{3 - 2\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{2}$.

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**1. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ**

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là công thức sau:

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)du, \text{ với } \alpha = u(a) \text{ và } \beta = u(b).$$

Từ đó, chúng ta thấy có hai phương pháp đổi biến:

Phương pháp 1: Để tính tích phân:

$$I = \int_a^b g(x)dx$$

ta thực hiện các bước:

Bước 1: Chọn:

- Phân tích $g(x)dx = f[u(x)]u'(x)dx = f[u(x)]d[u(x)]$.
- Đặt $u = u(x)$.

Bước 2: Thực hiện phép đổi cận:

- Với $x = a$ thì $u = u(a)$.
- Với $x = b$ thì $u = u(b)$.

Bước 3: Khi đó:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

Phương pháp 2: Để tính tích phân:

$$I = \int_a^b f(x)dx, \text{ với giả thiết hàm số } f(x) \text{ liên tục trên } [a, b]$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số được lựa chọn một cách thích hợp (ảnh của φ nằm trong tập xác định của f).

Bước 2: Lấy vi phân $dx = \varphi'(t)dt$, giả sử $\varphi'(t)$ liên tục.

Bước 3: Ta lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Nếu tính được các cận α và β tương ứng theo a và b (với $a = \varphi(\alpha)$ và $b = \varphi(\beta)$) thì ta được:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Hướng 2: Nếu không tính được dễ dàng các cận tương ứng theo a và b thì ta lựa chọn việc xác định nguyên hàm, từ đó suy ra giá trị của tích phân xác định (trong trường hợp này φ phải là đơn ánh để diễn tả kết quả hàm số của t thành hàm số của x).

 **Chú ý:** Để minh họa việc lựa chọn một trong hai hướng trên, ta có ví dụ:

a. Với $I = \int_0^{1/2} f(x)dx$, việc lựa chọn ẩn phụ $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

cho phép ta lựa chọn hướng 1, bởi khi đó:

- Với $x = 0$, suy ra $t = 0$.
- Với $x = \frac{1}{2}$, suy ra $t = \frac{\pi}{6}$.

b. Với $I = \int_0^{1/3} f(x)dx$, việc lựa chọn ẩn phụ $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ta

thường lựa chọn hướng 2, bởi khi đó:

- Với $x = 0$, suy ra $t = 0$.
- Với $x = \frac{1}{3}$, ta không chỉ ra được số đo góc t .

2. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Cơ sở của phương pháp tích phân từng phần là công sau:

$$\int_a^b u(x).v'(x).dx = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x).u'(x).dx. \quad (1)$$

Để sử dụng (1) trong việc tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ ta thực hiện các bước:

Bước 1: Biến đổi tích phân ban đầu về dạng:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x).f_2(x)dx.$$

Bước 2: Đặt:

$$\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}.$$

Bước 3: Khi đó:

$$I = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

 **Chú ý:** Khi sử dụng phương pháp tích phân từng phần để tính tích phân chúng ta cần tuân thủ các nguyên tắc sau:

1. Lựa chọn phép đặt dv sao cho v được xác định một cách dễ dàng.
2. Tích phân $\int_a^b vdu$ được xác định một cách dễ dàng hơn so với I .
3. Chúng ta cần nhớ các dạng cơ bản sau:

Dạng 1: Tích phân $I = \int x^\alpha \cdot \ln x dx$, với $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ khi đó đặt $u = \ln x$.

Dạng 2: Tích phân $I = \int P(x)e^{\alpha x} dx$ (hoặc $I = \int P(x)e^{\alpha x} dx$) với P là một đa thức thuộc $\mathbf{R}[X]$ và $\alpha \in \mathbf{R}^*$ khi đó đặt $u = P(x)$.

Dạng 3: Tích phân $I = \int P(x)\sin \alpha x dx$ (hoặc $\int P(x)\cos \alpha x dx$) với P là một đa thức thuộc $\mathbf{R}[X]$ và $\alpha \in \mathbf{R}^*$ khi đó đặt $u = P(x)$.

Dạng 4: Tích phân $I = \int e^{ax}\cos(bx)dx$ (hoặc $\int e^{ax}\sin(bx)dx$) với $a, b \neq 0$ khi đó đặt $u = \cos(bx)$ (hoặc $u = \sin(bx)$).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN DẠNG 1

Sử dụng kiến thức trong phương pháp 1 của phần phương pháp đổi biến số.

Ví dụ 1: (Bài 17.c và 17.d/tr 161 – Sgk): Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3 dt.$

b. $\int_0^1 \frac{5x \cdot dx}{(x^2 + 4)^2}.$

 *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = 1 + t^4$, suy ra $du = 4t^3 dt$.

Đổi cận:

- Với $t = 0$ thì $u = 1$,
- Với $t = 1$ thì $u = 2$.

Từ đó:

$$\int_0^1 t^3(1+t^4)^3 dt = \frac{1}{4} \int_1^2 u^3 du = \frac{1}{16} u^4 \Big|_1^2 = \frac{15}{16}.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^1 t^3(1+t^4)^3 dt = \frac{1}{4} \int_0^1 (1+t^4)^3 d(1+t^4) = \frac{1}{16} (1+t^4)^4 \Big|_0^1 = \frac{15}{16}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = x^2 + 4$, suy ra $du = 2x dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 4$,
- Với $x = 1$ thì $u = 5$.

Từ đó:

$$\int_0^1 \frac{5x}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{5}{2} \int_4^5 \frac{du}{u^2} = -\frac{5}{2u} \Big|_4^5 = \frac{1}{8}.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^1 \frac{5x}{(x^2+4)^2} dx = \frac{5}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2+4)}{(x^2+4)^2} = -\frac{5}{2(x^2+4)} \Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

 **Nhận xét:** Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

1. Ở cách 1 chúng ta sử dụng phương pháp đổi biến dạng 1.
2. Ở cách 2 chúng ta lựa chọn cách trình bày theo kiểu:

$$\int_a^b f(u) du = F(u) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

dựa trên ý tưởng của cách 1 và sẽ tránh được bước đổi cận, do đó lời giải ngắn gọn hơn.

Ví dụ 2: (ĐHKT HN – 97): Tính tích phân $I = \int_0^1 x^5(1-x^3)^6 dx$.

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int_0^1 x^3(1-x^3)^6 x^2 dx.$$

Đặt $t = 1 - x^3$ suy ra $dt = -3x^2 dx$.

Đổi cận:

- $x = 0$ thì $t = 1$,
- $x = 1$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I = -\frac{1}{3} \int_1^0 (1-t)t^6 dt = \frac{1}{3} \int_0^1 (1-t)t^6 dt = \frac{1}{3} \int_0^1 (t^6 - t^7) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} t^7 - \frac{1}{8} t^8 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{168}.$$

Cách 2: Viết lại I dưới dạng:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^3(1-x^3)^6 x^2 dx = \int_0^1 [1 - (1-x^3)](1-x^3)^6 x^2 dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^1 [(1-x^3)^6 - (1-x^3)^7] d(1-x^3) = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{7} (1-x^3)^7 - \frac{1}{8} (1-x^3)^8 \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{168}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tính các tích phân sau:

a. (Bài 17.a/tr 161 – Sgk): $\int_0^1 \sqrt{x+1} dx$.

b. (Bài 24.c/tr 162 – Sgk): $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx$.

c. (ĐHGT – 1996): $\int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx$.

 *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \sqrt{x+1}$, suy ra:

$$u^2 = x + 1 \Rightarrow 2udu = dx.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 1$,
- Với $x = 1$ thì $u = \sqrt{2}$.

Từ đó:

$$\int_0^1 \sqrt{x+1} dx = 2 \int_1^{\sqrt{2}} u^2 du = \frac{2}{3} u^3 \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

Cách 2: Đặt $u = x + 1$, suy ra $du = dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 1$,
- Với $x = 1$ thì $u = 2$.

Từ đó:

$$\int_0^1 \sqrt{x+1} dx = \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

Cách 3: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^1 \sqrt{x+1} dx = \int_0^1 (x+1)^{\frac{1}{2}} d(x+1) = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \sqrt{x^2+1}$, suy ra:

$$u^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2udu = 2xdx \Leftrightarrow udu = xdx.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 1$,
- Với $x = \sqrt{3}$ thì $u = 2$.

Từ đó:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx = \int_1^2 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{7}{3}.$$

Cách 2: Đặt $u = x^2 + 1$, suy ra $du = 2xdx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 1$,
- Với $x = \sqrt{3}$ thì $u = 4$.

Từ đó:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{u} du = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{7}{3}.$$

Cách 3: Thực hiện phép biến đổi:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) \\ &= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

c. Đặt $u = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow u^2 = 1+x^2 \Rightarrow 2udu = 2xdx$.

Đổi cận:

- $x = 0$ thì $u = 1$,
- $x = \sqrt{3}$ thì $u = 2$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx &= \int_1^2 (u^2-1)^2 u^2 du = \int_1^2 (u^6 - 2u^4 + u^2) du \\ &= \left(\frac{1}{7} u^7 - \frac{2}{5} u^5 + \frac{1}{3} u^3 \right) \Big|_1^2 = \frac{848}{105}. \end{aligned}$$

 **Chú ý:** Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trong a), b):

- Cách 1 và cách 2 được đề xuất dựa trên dấu hiệu thứ hai trong bảng dấu hiệu ở chủ đề 2.
- Cách 3 được trình bày dựa trên ý tưởng đổi biến của cách 2.

Ví dụ 4: (Bài 17.e và 20.b/tr 161 – Sgk): Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$

b. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx.$

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \sqrt{x^2+1}$, suy ra:

$$u^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2udu = 2xdx \Leftrightarrow udu = xdx.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 1$,
- Với $x = \sqrt{3}$ thì $u = 2$.

Từ đó:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx = 4 \int_1^2 \frac{udu}{u} = 4 \int_1^2 du = 4u \Big|_1^2 = 4.$$

Cách 2: Đặt $u = x^2 + 1$, suy ra $du = 2xdx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 1$,
- Với $x = \sqrt{3}$ thì $u = 4$.

Từ đó:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = 2 \int_1^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = 4 \int_1^4 \frac{du}{2\sqrt{u}} = 4\sqrt{u} \Big|_1^4 = 4.$$

Cách 3: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = 4 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{d(x^2 + 1)}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 4\sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^{\sqrt{3}} = 4.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \sqrt{x^2 + 1}$, suy ra:

$$u^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2udu = 2xdx \Leftrightarrow udu = xdx.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 1$,
- Với $x = \sqrt{3}$ thì $u = 2$.

Từ đó:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_1^2 \frac{(u^2 - 1)udu}{u} = \int_1^2 (u^2 - 1)du = \left(\frac{u^3}{3} - u \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

Cách 2: Đặt $u = x^2 + 1$, suy ra $du = 2xdx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 1$,
- Với $x = \sqrt{3}$ thì $u = 4$.

Từ đó:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{(u - 1)du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_1^4 \left(\frac{\sqrt{u}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{u}} \right) du = \left(\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} - \sqrt{u} \right) \Big|_1^4 = \frac{4}{3}.$$

Ví dụ 5: (Bài 17.f và 20.a/tr 161 – Sgk): Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 3x) \sin 3x dx.$

b. $\int_0^{\pi} 5(5 - 4 \cos t)^{\frac{1}{4}} \sin t dt.$

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = 1 - \cos 3x$, suy ra $du = 3 \sin 3x dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 0$,
- Với $x = \frac{\pi}{6}$ thì $u = 1$.

Từ đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 3x) \sin 3x dx = \frac{1}{3} \int_0^1 u du = \frac{1}{6} u^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 3x) \sin 3x dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 3x) \cdot d(1 - \cos 3x) = \frac{1}{6} (1 - \cos 3x)^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{6}$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = 5 - 4\cos t$, suy ra $du = 4\sin t \cdot dt$.

Đổi cận:

- Với $t = 0$ thì $u = 1$,
- Với $t = \pi$ thì $u = 9$.

Từ đó:

$$\int_0^{\pi} 5(5 - 4\cos t)^{\frac{1}{4}} \sin t \cdot dt = \frac{5}{4} \int_1^9 u^{\frac{1}{4}} du = u^{\frac{5}{4}} \Big|_1^9 = 9^{\frac{5}{4}} - 1.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} 5(5 - 4\cos t)^{\frac{1}{4}} \sin t \cdot dt &= \frac{5}{4} \int_0^{\pi} (5 - 4\cos t)^{\frac{1}{4}} \cdot d(5 - 4\cos t) = (5 - 4\cos x)^{\frac{5}{4}} \Big|_0^{\pi} \\ &= 9^{\frac{5}{4}} - 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 6: Tính các tích phân sau:

a. (Bài 17.b/tr 161 – Sgk): $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x \cdot dx}{\cos^2 x}.$

b. (Bài 24.e/tr 162 – Sgk): $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot dx}{1 + \sin x}.$

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \tan x$, suy ra $du = \frac{dx}{\cos^2 x}.$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 0$,
- Với $x = \frac{\pi}{4}$ thì $u = 1$.

Từ đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int_0^1 u du = \frac{1}{2} u^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x \cdot dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\pi/4} \tan x \cdot d(\tan x) = \frac{1}{2} \tan^2 x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \sin x$, suy ra $du = \cos x \cdot dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 0$,
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u = 1$.

Từ đó:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \cdot dx}{1 + \sin x} = \int_0^1 \frac{du}{1 + u} = \ln |1 + u| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Cách 2: Đặt $u = 1 + \sin x$, suy ra $du = \cos x \cdot dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 1$,
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u = 2$.

Từ đó:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \cdot dx}{1 + \sin x} = \int_1^2 \frac{du}{u} = \ln |u| \Big|_1^2 = \ln 2.$$

Cách 3: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \cdot dx}{1 + \sin x} = \int_0^{\pi/2} \frac{d(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = \ln |1 + \sin x| \Big|_0^{\pi/2} = \ln 2.$$

Ví dụ 7: Tính các tích phân sau:

a. (CĐSP TPHCM – 1997): $I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x \cdot dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x}.$

b. (HV BCVT HN – 1998): $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cdot \cos^3 x \cdot dx}{1 + \cos^2 x}.$

 **Giải**

a. Đặt $t = \sin x$, suy ra $dt = \cos x \cdot dx$.

Đổi cận:

- $x = 0$ thì $t = 0$,
- $x = \frac{\pi}{6}$ thì $t = \frac{1}{2}.$

Khi đó:

$$I = \int_0^{1/2} \frac{dt}{6 - 5t + t^2} = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} \right) dt = \ln \left| \frac{t-3}{t-2} \right| \Big|_0^{1/2} = \ln \frac{10}{9}.$$

b. Đặt $t = \cos x$ suy ra $dt = -\sin x \cdot dx$.

Đổi cận:

▪ $x = 0$ thì $t = 1$,

▪ $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= - \int_1^0 \frac{t^3 dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{t^3 dt}{1+t^2} = \int_0^1 \left(t - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \left[\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Ví dụ 8: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin 2x \cdot dx}{2 \sin^2 x + \cos^2 x}.$

b. $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos 2x}.$

 *Giải*

a. Đặt $u = 2 \sin^2 x + \cos^2 x$ suy ra:

$$du = (4 \sin x \cdot \cos x - 2 \cos x \cdot \sin x) dx = \sin 2x \cdot dx.$$

Đổi cận:

▪ $x = 0$ thì $u = 1$,

▪ $x = \frac{\pi}{6}$ thì $u = \frac{5}{4}$.

Khi đó:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\sin 2x \cdot dx}{2 \sin^2 x + \cos^2 x} = \int_1^{5/4} \frac{du}{u} = \ln |u| \Big|_1^{5/4} = \ln \frac{5}{4}.$$

b. Đặt $u = \tan x$, suy ra:

$$du = \frac{du}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x) dx = (1 + u^2) dx \Rightarrow dx = \frac{du}{1 + u^2}.$$

Đổi cận:

▪ Với $x = 0$ thì $u = 0$,

▪ Với $x = \frac{\pi}{6}$ thì $u = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Từ đó:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos 2x} &= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{du}{\frac{1+u^2}{1-u^2}} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{du}{1-u^2} = -\frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{3}} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= -\frac{1}{2} (\ln |u-1| - \ln |u+1|) \Big|_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| \Big|_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}. \end{aligned}$$

Ví dụ 9: (Bài 24.b và 25.b/tr 162 – Sgk): Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^3 \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx.$

b. $\int_0^1 \frac{\ln(2-x)}{2-x} dx.$

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \ln x$, suy ra $du = \frac{dx}{x}.$

Đổi cận:

- Với $x = 1$ thì $u = 0$,
- Với $x = 3$ thì $u = \ln 3$.

Từ đó:

$$\int_1^3 \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx = \int_0^{\ln 3} u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_0^{\ln 3} = \frac{\ln^3 3}{3}.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_1^3 \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx = \int_1^3 (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{(\ln x)^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{\ln^3 3}{3}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \ln(2-x)$, suy ra $du = -\frac{dx}{2-x}.$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = \ln 2$,
- Với $x = 1$ thì $u = 0$.

Từ đó:

$$\int_0^1 \frac{\ln(2-x)}{2-x} dx = - \int_{\ln 2}^0 u du = - \frac{u^2}{2} \Big|_{\ln 2}^0 = \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^1 \frac{\ln(2-x)}{2-x} dx = - \int_0^1 \ln(2-x) \cdot d[\ln(2-x)] = - \frac{1}{2} \ln^2(2-x) \Big|_0^1 = \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Ví dụ 10: (Bài 24.a và 24.d/tr 162 – Sgk): Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx.$

b. $\int_0^1 x^2 e^{3x^3} dx.$

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = x^3$, suy ra $du = 3x^2 dx.$

Đổi cận:

- Với $x = 1$ thì $u = 1$,
- Với $x = 2$ thì $u = 8$.

Từ đó:

$$\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int_1^8 e^u du = \frac{e^u}{3} \Big|_1^8 = \frac{1}{3}(e^8 - e).$$

Cách 2: Đặt $u = e^{x^3}$, suy ra $du = 3x^2 e^{x^3} dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 1$ thì $u = e$,
- Với $x = 2$ thì $u = e^8$.

Từ đó:

$$\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int_e^{e^8} du = \frac{u}{3} \Big|_e^{e^8} = \frac{1}{3}(e^8 - e).$$

Cách 3: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 e^{x^3} d(x^3) = \frac{e^{x^3}}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(e^8 - e).$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = 3x^3$, suy ra $du = 9x^2 dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 0$,
- Với $x = 1$ thì $u = 3$.

Từ đó:

$$\int_0^1 x^2 e^{3x^3} dx = \frac{1}{9} \int_0^3 e^u du = \frac{e^u}{9} \Big|_0^3 = \frac{1}{9}(e^3 - 1).$$

Cách 2: Đặt $u = e^{3x^3}$, suy ra $du = 9x^2 e^{3x^3} dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 1$,
- Với $x = 1$ thì $u = e^3$.

Từ đó:

$$\int_0^1 x^2 e^{3x^3} dx = \frac{1}{9} \int_1^{e^3} du = \frac{u}{9} \Big|_1^{e^3} = \frac{1}{9}(e^3 - 1).$$

Cách 3: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^1 x^2 e^{3x^3} dx = \frac{1}{9} \int_0^1 e^{3x^3} d(3x^3) = \frac{e^{3x^3}}{9} \Big|_0^1 = \frac{1}{9}(e^3 - 1).$$

Ví dụ 11: Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_1^e \frac{(1 + \ln^2 x) dx}{x}.$

b. $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 2}}.$

 *Giải*

a. Đặt $t = \ln x$ suy ra $dt = \frac{dx}{x}$.

Đổi cận:

- $x = 1 \Rightarrow t = 0$,
- $x = e \Rightarrow t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^1 (t^2 + 1) dt = \left(\frac{1}{3} t^3 + t \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

b. Đặt $t = \sqrt{e^x + 2}$ suy ra:

$$t^2 = e^x + 2 \Rightarrow 2t dt = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{2t dt}{t^2 - 2}.$$

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{3}$,
- $x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó:

$$I = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{dt}{t^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| \Big|_{\sqrt{3}}^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{(2 - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}.$$

Vấn đề 2: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN DẠNG 2

Sử dụng kiến thức trong phương pháp 2 của phần phương pháp đổi biến số.

Ví dụ 1: (Bài 14.a và 14.b/Tr. 213): Tính các tích phân sau:

a. (ĐHTCKT – 1997): $I = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ b. $I = \int_1^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$

 *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Đặt $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = \cos t dt$.

Đổi cận:

- $x = 0$ thì $t = 0$,
- $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{|\cos t|} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{\cos t} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Cách 2: Đặt $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$ suy ra $dx = -\sin t \cdot dt$.

Đổi cận:

- $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{2}$,
- $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{\cos^2 t \cdot \sin t \cdot dt}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} = - \int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{\cos^2 t \cdot \sin t \cdot dt}{|\sin t|} = - \int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{\cos^2 t \cdot \sin t \cdot dt}{\sin t} \\ &= - \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi/4} (1 + \cos 2t) dt = - \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

b. Đặt $x = 2\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = 2\cos t \cdot dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{6}$,
- Với $x = 2$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} 4\sin^2 t \cdot \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t \cdot dt = 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 2t \cdot dt = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - \cos 4t) \cdot dt \\ &= 2 \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = 2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right). \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

a. Với $a = 0$ và $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. Với $a = 0$ và $b = \frac{1}{3}$.

 **Giải**

Đặt $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = \cos t \cdot dt$.

a. Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$.
- Với $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{3}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos t \cdot dt}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos t \cdot dt}{\cos^3 t} = \int_0^{\pi/3} \frac{dt}{\cos^2 t} \\ &= \tan t \Big|_0^{\pi/3} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

b. Ta lựa chọn hướng xác định nguyên hàm:

$$\left[\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \right]_{x=\sin t} = \int \frac{\cos t \cdot dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C = \frac{\sin t}{\cos t} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Khi đó:

$$I = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_0^{1/3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

 **Chú ý:**

1. Trong lời giải của câu b) sở dĩ ta có $\sqrt{(1-x^2)^3} = \cos^3 t$ và $\tan t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

là bởi:

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2} \end{cases}.$$

Tuy nhiên, chúng ta hoàn toàn có thể thực hiện theo hướng 1, thật vậy:

$$\begin{aligned} I &= \left[\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \right]_{x=\sin t} = \int_0^{t_1} \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t \Big|_0^{t_1} = \tan t_1 \\ &= \frac{\sin t_1}{\sqrt{1-\sin^2 t_1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

2. Cần để ý rằng, dùng hướng 2 thì khi đổi biến số cần đơn ánh $t \mapsto x = \phi(t)$ để đổi kết quả từ t sang x , còn với hướng 1 thì không cần.

Ví dụ 3: Tính tích phân $I = \int_a^b \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

a. Với $a = \sqrt{2}$ và $b = \sqrt{5}$. b. Với $a = -2$ và $b = -\sqrt{2}$.

 **Giải**

a. Đặt $x = \frac{1}{\sin 2t}$, vì $x \in [\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ nên:

$$\sqrt{2} \leq \frac{1}{\sin 2t} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \leq \sin 2t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

do đó, để thoả mãn tính chất đơn ánh ta chọn $0 < t < \frac{\pi}{4}$.

Ta có $dx = -\frac{2 \cos 2t dt}{\sin^2 2t}$, và lựa chọn hướng xác định nguyên hàm:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 1}} &= - \int \frac{2 dt}{\sin^3 2t} = - \int \frac{2(\cos^2 t + \sin^2 t)^2 dt}{8 \sin^3 t \cos^3 t} \\ &= -\frac{1}{4} \int \left(\cot t \cdot \frac{1}{\sin^2 t} + \tan t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2}{\sin t \cos t} \right) dt \\ &= -\frac{1}{4} \int \left(\cot t \cdot \frac{1}{\sin^2 t} + \tan t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2}{\tan t \cos^2 t} \right) dt \\ &= -\frac{1}{4} \left[- \int \cot t \cdot d(\cot t) + \int \tan t \cdot d(\tan t) + 2 \int \frac{d(\tan t)}{\tan t} \right] \\ &= -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \cot^2 t + \frac{1}{2} \tan^2 t + 2 \ln |\tan t| \right) + C \\ &= \frac{1}{8} (\cot^2 t - \tan^2 t) - \frac{1}{2} \ln |\tan t| + C \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x - \sqrt{x^2 - 1}| + C. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$I = \left(\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x - \sqrt{x^2 - 1}| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} (2\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \sqrt{5} \ln \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{5} - 2}.$$

b. Đề nghị bạn đọc tự làm – Theo hướng đối cạm.

 **Chú ý:** Trong lời giải câu a) sở dĩ ta có:

$$\cot^2 t - \tan^2 t = 4x\sqrt{x^2 - 1} \quad \text{và} \quad \tan t = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

là bởi:

$$\begin{aligned} \cot^2 t - \tan^2 t &= \frac{\cos^4 t - \sin^4 t}{\cos^2 t \cdot \sin^2 t} = \frac{4 \cos 2t}{\sin^2 2t} = \frac{4\sqrt{1 - \sin^2 2t}}{\sin^2 2t} \\ &= \frac{4}{\sin 2t} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2t} - 1} = 4x\sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan t &= \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin^2 t}{\sin t \cos t} = \frac{1 - \cos 2t}{\sin 2t} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 2t}}{\sin 2t} \\ &= x - \sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4: (Bài 14.a và 14.b/Tr. 213): *Tính các tích phân sau:*

a. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}.$

b. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$

 **Giải**

a. Đặt $x = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \tan^2 t)dt$.

Đổi cận:

- $x = 0$ thì $t = 0$.
- $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \tan^2 t)dt}{\tan^2 t + 1} = \int_0^{\pi/4} dt = t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}.$$

b. Biến đổi tích phân về dạng:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int_0^1 \frac{4dx}{4x^2 + 4x + 4} = 4 \int_0^1 \frac{dx}{(2x + 1)^2 + 3}.$$

Đặt $2x + 1 = \sqrt{3} \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = \frac{\sqrt{3}dt}{2 \cos^2 t} = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 t)dt$.

Đổi cận:

- $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.
- $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{3}$.

Khi đó:

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(1 + \tan^2 t)dt}{\tan^2 t + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\pi/3} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} t \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Ví dụ 5: (ĐH TCKT – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

 *Giải*

Đặt $t = x^2$ suy ra $dt = 2x dx$.

Đổi cận:

- $x = 0$ thì $t = 0$,
- $x = 1$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

Đặt $t + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan u$ suy ra $dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 u) du$.

Đổi cận:

- $t = 0$ thì $u = \frac{\pi}{6}$,
- $t = 1$ thì $u = \frac{\pi}{3}$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 u) du}{\frac{3}{4} \tan^2 u + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\pi/3} du = \frac{1}{\sqrt{3}} u \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 6: Tính tích phân $I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

a. Với $a = 0$ và $b = \sqrt{3}$.

b. Với $a = 0$ và $b = 2$.

 *Giải*

Đặt $x = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$.

a. Đổi cận:

- $x = 0$ thì $t = 0$,
- $x = \sqrt{3}$ thì $t = \frac{\pi}{3}$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int_0^{\pi/3} \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{(1+\tan^2 t)^3}} = \int_0^{\pi/3} \cos t \cdot dt = \sin t \Big|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b. Ta lựa chọn hướng xác định nguyên hàm:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{\cos^3 t dt}{\cos^2 t} = \int \cos t \cdot dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Khi đó:

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \left. \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right|_0^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

 **Chú ý:**

1. Trong lời giải câu b) sở dĩ ta có $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos t$ và $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ là bởi:

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \\ \sin t = \tan t \cdot \cos t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}.$$

2. Phương pháp trên được áp dụng để giải bài toán tổng quát:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^{2k+1}}}, \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 7: Tính tích phân $I = \int_{-a}^0 \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$, với $a > 0$.

 **Giải**

Đặt $x = a \cdot \cos 2t$, $t \in (0; \frac{\pi}{2}]$ suy ra $dx = -2a \cdot \sin 2t \cdot dt$,

Đổi cận:

▪ $x = -a$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

▪ $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/2}^{\pi/4} \sqrt{\frac{a+a \cdot \cos 2t}{a-a \cdot \cos 2t}} (-2a \cdot \sin 2t \cdot dt) = -2a \int_{\pi/2}^{\pi/4} |\cot t| \cdot \sin 2t \cdot dt \\ &= -4a \int_{\pi/2}^{\pi/4} \cos^2 t \cdot dt = -2a \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = -2a \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = a \left(1 - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Ví dụ 8: Tính tích phân $I = \int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}} \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$ với $0 < a < b$.

 *Giải*

Đặt $x = a + (b - a)\sin^2 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ suy ra $dx = (b - a) \cdot \sin 2t \cdot dt$.

Đổi cận:

▪ $x = \frac{3a + b}{4}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.

▪ $x = \frac{a + b}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{(b-a)^2}{4} \sin^2 2t \cdot dt = \frac{(b-a)^2}{8} \int_{\pi/6}^{\pi/4} (1 - \cos 4t) dt \\ &= \frac{(b-a)^2}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{(b-a)^2}{8} \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right). \end{aligned}$$

Ví dụ 9: (CĐHQ TPHCM – 1999): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \cdot dx}{\sqrt{7 + \cos 2x}}$.

 *Giải*

Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \cdot dx}{\sqrt{8 - 2\sin^2 x}}$$

Đặt $t = \sin x$ suy ra $dt = \cos x \cdot dx$.

Đổi cận:

▪ $x = 0$ thì $t = 0$,

▪ $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{8 - 2t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}}.$$

Đặt $t = 2\sin u$ suy ra $dt = 2\cos u \cdot du$.

Đổi cận:

▪ $t = 0$ thì $u = 0$,

▪ $t = 1$ thì $u = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/6} \frac{2\cos u \cdot du}{\sqrt{4 - 4\sin^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/6} du = \frac{1}{\sqrt{2}} u \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{6\sqrt{2}}.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 0$,
- Với $x = -1$ thì $u = 1$.

Từ đó:

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = - \int_1^0 f(-u) du = \int_0^1 f(-u) du = \int_0^1 f(-x) dx.$$

a. Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì ta được $f(-x) = -f(x)$ nên:

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx = -3.$$

b. Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì ta được $f(-x) = f(x)$ nên:

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 3.$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 x^{2004} \sin x dx$.

 **Giải**

Viết lại I dưới dạng :

$$I = \int_{-1}^0 x^{2004} \sin x dx + \underbrace{\int_0^1 x^{2004} \sin x dx}_J. \quad (1)$$

Xét tích phân J bằng phép đặt $x = -t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = -1$ thì $t = 1$.
- $x = 0$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$J = - \int_1^0 (-t)^{2004} \sin(-t) dt = - \int_0^1 t^{2004} \sin t dt = - \int_0^1 x^{2004} \sin x dx. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được $I = 0$.

 **Nhận xét:** Với bài toán trên, các em học sinh chưa có kinh nghiệm thường suy nghĩ theo hai hướng sau:

Hướng 1: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bởi nó có dạng $\int P(x) \sin \alpha x dx$ song khi đó ta cần thực hiện 2004 lần tích phân từng phần và điều đó đương nhiên không thực tế.

Hướng 2: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần cho công thức tổng quát $\int_{-1}^1 x^n \sin x dx$, từ đó bằng phương pháp truy hồi nhận được kết quả của $\int_{-1}^1 x^{2004} \sin x dx$, tuy nhiên điều đó hẳn chưa phải là một cách giải đơn giản và ngắn gọn..

Từ đó có thể thấy tính ưu việt của thủ thuật đổi biến, cho dù không phải bao giờ nó cũng dẫn đến kết quả.

Qua ví dụ trên chúng ta có:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \text{ nếu } f(-x) = -f(x).$$

Ví dụ 3: (ĐHGT TPHCM – 1999): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x \cdot dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

 **Giải**

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

- $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4(\frac{\pi}{2} - t)(-dt)}{\cos^4(\frac{\pi}{2} - t) + \sin^4(\frac{\pi}{2} - t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 t \cdot dt}{\cos^4 t + \sin^4 t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x \cdot dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}.$$

Do đó:

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 4: (HVNH HN – 1998): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \cdot dx$

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: (Sử dụng phương pháp đổi biến): Đặt $x = \pi - t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = \pi$ thì $t = 0$,
- $x = 0$ thì $t = \pi$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\pi}^0 (\pi - t) \cdot \sin(\pi - t) \cdot \cos^2(\pi - t) dt = \int_0^{\pi} (\pi - t) \cdot \sin t \cdot \cos^2 t dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos^2 t dt - \int_0^{\pi} t \cdot \sin t \cdot \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin 2t \cdot \cos t dt - I \\ \Leftrightarrow 2I &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} (\sin 3t + \sin t) dt \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{8} \left(-\frac{1}{3} \cos 3t - \cos t \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Cách 2: (Sử dụng phương pháp tích phân từng phần): Biến đổi I về dạng:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \cdot \sin 2x \cdot \cos x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} x \cdot (\sin 3x + \sin x) dx.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = (\sin 3x + \sin x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{3} \cos 3x - \cos x \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{4} \left[x \left(-\frac{1}{3} \cos 3x - \cos x \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 3x + \cos x \right) dx \right] = \frac{\pi}{3}.$$

Ví dụ 5: Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} x \cdot \cos^3 x \cdot dx$.

 Giải

Đặt $x = 2\pi - t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = 2\pi$ thì $t = 0$,
- $x = 0$ thì $t = 2\pi$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_{2\pi}^0 (2\pi - t) \cdot \cos^3(2\pi - t) (-dt) = \int_0^{2\pi} (2\pi - t) \cdot \cos^3 t dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt - \int_0^{2\pi} t \cos^3 t dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 3t + 3 \cos t) dt - I \\ \Leftrightarrow 2I &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{3} \sin 3t + 3 \sin t \right) \Big|_0^{2\pi} = 0 \Leftrightarrow I = 0. \end{aligned}$$

Vấn đề 4: PHƯƠNG PHÁP LẤY TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Sử dụng kiến thức trong phần phương pháp tích phân từng phần.

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

a. (HVKTQS – 1999): $I = \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \ln(1 + \cos x) dx$

b. (ĐHHH TPHCM – 2000): $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+x) \cdot dx}{x^2}$.

 **Giải**

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(1 + \cos x) \\ dv = \cos x \cdot dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{-\sin x}{1 + \cos x} dx \\ v = \sin x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \sin x \cdot \ln(1 + \cos x) \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos x) dx \\ &= (x - \sin x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

b. Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x} dx \\ v = -1/x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{x} \ln(x+1) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx = -\frac{1}{2} \ln 3 + \ln 2 + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln 3 + \ln 2 + (\ln|x| - \ln|x+1|) \Big|_1^2 = -\frac{3}{2} \ln 3 + 3 \ln 2. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: (ĐHGTVT HN – 1997): Tính tích phân sau:

$$I = \int_0^{1/9} \left(5^{3x} + \frac{x}{\sin^2(2x+1)} + \frac{1}{\sqrt[5]{4x-1}} \right) dx.$$

 **Giải**

Biến đổi I về dạng:

$$I = \underbrace{\int_0^{1/9} 5^{3x} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{1/9} \frac{x dx}{\sin^2(2x+1)}}_{I_2} + \underbrace{\int_0^{1/9} \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-1}}}_{I_3}. \quad (1)$$

▪ Tính tích phân I_1 bằng cách:

$$I_1 = \int_0^{1/9} 5^{3x} dx = \frac{5^{3x}}{3 \ln 5} \Big|_0^{1/9} = \frac{5^{1/3} - 1}{3 \ln 5}. \quad (2)$$

- Tính tích phân I_2 bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\sin^2(2x+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cot(2x+1) \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{x}{2} \cot(2x+1) \Big|_0^{1/9} + \frac{1}{2} \int_0^{1/9} \cot(2x+1) dx \\ &= \left[-\frac{x}{2} \cot(2x+1) + \frac{1}{4} \ln |\sin(2x+1)| \right] \Big|_0^{1/9} \\ &= -\frac{1}{18} \cot \frac{11}{9} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin 11/9}{\sin 1} \right|. \end{aligned} \quad (3)$$

- Tính tích phân I_3 bằng cách:

$$I_1 = \int_0^{1/9} \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-1}} = \int_0^{1/9} (4x-1)^{-1/5} dx = \frac{5}{16} (4x+1)^{4/5} \Big|_0^{1/9} = \frac{5}{36}. \quad (4)$$

Thay (2), (3), (4) vào (1), ta được:

$$I = \frac{5^{1/3}-1}{3 \ln 5} - \frac{1}{18} \cot \frac{11}{9} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin 11/9}{\sin 1} \right| + \frac{5}{36}.$$

Ví dụ 3: Tính các tích phân sau:

- (Bài 18.d /tr 161 – Sgk): $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x \cdot dx$.
- (Bài 25.c /tr 162 – Sgk): $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \cdot dx$.

 *Giải*

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x \cdot dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

Khi đó:

$$\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x \cdot dx = x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

b. Đặt:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x \cdot dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

Khi đó:

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \cdot dx = x^2 \cdot \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \underbrace{2 \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin x \cdot dx}_I. \quad (1)$$

Xét tích phân J bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = -x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1. \quad (2)$$

Thay (2) và (1), ta được:

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Ví dụ 4: Tính các tích phân sau:

a. (Bài 19.b /tr 161 – Sgk): $I = \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin x \cdot \cos x dx.$

b. (ĐHTCKT – 1998): $I = \int_0^{\pi/4} x(2 \cos^2 x - 1) dx.$

 **Giải**

a. Viết lại tích phân dưới dạng:

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin 2x dx.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x \cdot dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = -\frac{1}{4} x \cdot \cos 2x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8} \sin 2x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.$$

b. Viết lại tích phân dưới dạng:

$$I = \int_0^{\pi/4} x \cos 2x dx.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases},$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi - 2}{8}$$

Ví dụ 5: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^1 (x+1)e^x dx$.

b. $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

 *Giải*

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = x + 1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int_0^1 (x+1)e^x dx = (x+1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 2e - 1 - e^x \Big|_0^1 = e.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = x^2 \cdot e^x \Big|_0^1 - \underbrace{2 \int_0^1 x e^x dx}_{I_1}. \quad (1)$$

Xét tích phân I_1 , bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_1 = x \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2.$$

Cách 2: Ta đi xác định nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^x$, giả sử:

$$F(x) = \int x^2 e^x = (ax^2 + bx + c)e^x + C. \quad (3)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (3), ta được:

$$x^2 e^x = [ax^2 + (2a + b)x + b + c]e^x. \quad (4)$$

Đồng nhất hệ số, ta được:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C \Rightarrow \int_0^1 x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x \Big|_0^1 = e - 2.$$

Ví dụ 6: Tính các tích phân sau:

a. (Bài 18.a/tr 161 – Sgk): $\int_1^2 x^5 \ln x dx$.

b. (HVNH TPHCM Khối D – 2000): $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx$.

 Giải

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^5 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^6}{6} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int_1^2 x^5 \ln x dx = \frac{x^6}{6} \cdot \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{6} \int_1^2 x^5 dx = \frac{32 \ln 2}{3} - \frac{x^6}{36} \Big|_1^2 = \frac{32 \ln 2}{3} - \frac{7}{4}.$$

b. Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(1 + x^2) \\ dv = x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{1 + x^2} dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} \ln(1 + x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \int_0^1 \left(x - \frac{x}{1 + x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right] \Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 7: (PVBCTT – 1998): Tính tích phân $I = \int_1^e (x \cdot \ln x)^2 dx$.

 Giải

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ v = \frac{1}{3} x^3 \end{cases}.$$

$$I = \frac{x^3}{3} \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \underbrace{\int_1^e x^2 \ln x dx}_J. \quad (1)$$

Tích phân J được tính bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{1}{3} x^3 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right) \Big|_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{7e^3}{27} - \frac{1}{27}.$$

Ví dụ 8: Tính các tích phân sau:

a. (Bài 18.c /tr 161 – Sgk): $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$.

b. (ĐHNN I HN – 1998): $I = \int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin 3x dx$.

 *Giải*

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = e^x \cos x \Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} e^x \sin x dx}_J = -e^{\pi} - 1 + \int_0^{\pi} e^x \sin x dx. \quad (1)$$

Với tích phân J, đặt:

$$\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow J = e^x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x dx = -I. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = -e^{\pi} - 1 - I \Leftrightarrow 2I = -e^{\pi} - 1 \Leftrightarrow I = -\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1).$$

b. Đặt:

$$\begin{cases} u = \sin 3x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 3 \cos 3x dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x \Big|_0^{\pi/2} - \underbrace{\frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos 3x dx}_J = -\frac{1}{2} e^{\pi} - \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos 3x dx. \quad (1)$$

Với tích phân J, đặt:

$$\begin{cases} u = \cos 3x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -3 \sin 3x dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x \Big|_0^{\pi/2} + \underbrace{\frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin 3x dx}_I = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} I. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = -\frac{1}{2} e^{\pi} - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} I \right) \Leftrightarrow I = \frac{3 - 2e^{\pi}}{13}$$

Ví dụ 9: (Đề 37 – Bộ đề 1996): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \sin^2 x dx$.

 Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{2x} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\int_0^{\pi} e^{2x} dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{\pi} e^{2x} \cos 2x dx}_{I_2} \right). \quad (1)$$

▪ Tính tích phân I_1 bằng cách:

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^{\pi} = \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2}. \quad (2)$$

▪ Tính tích phân I_2 bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -2 \sin 2x dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_2 = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 2x \Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} e^{2x} \sin 2x dx}_{I_{2,1}} = \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2} + \int_0^{\pi} e^{2x} \sin 2x dx. \quad (3)$$

- Tính tích phân $I_{2,1}$ bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2 \cos 2x dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

Khi đó:

$$I_{2,1} = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x \Big|_0^\pi - \underbrace{\int_0^\pi e^{2x} \cos 2x dx}_{I_2} = -I_2. \quad (4)$$

Thay (4) vào (3), ta được:

$$I_2 = \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2} - I_2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e^{2\pi}}{4} - \frac{1}{4}. \quad (5)$$

Thay (2), (5) vào (1), ta được:

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2} - \left(\frac{e^{2\pi}}{4} - \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{1}{8} (e^{2\pi} - 1).$$

Vấn đề 5: PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN CỦA CÁC HÀM SỐ HỮU TỈ

Ví dụ 1: (ĐHKT TPHCM – 1994): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x dx}{(1+2x)^3}$.

 *Giải*

Sử dụng đồng nhất thức:

$$x = \frac{1}{2} (1 + 2x - 1)$$

ta được:

$$\frac{x}{(1+2x)^3} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+2x)^2} - \frac{1}{(1+2x)^3} \right]$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{(1+2x)^2} - \frac{1}{(1+2x)^3} \right] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2(1+2x)} + \frac{1}{4(1+2x)^2} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{18}.$$

Ví dụ 2: (ĐHSP TPHCM Khối A – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{(4x+11)dx}{x^2+5x+6}$.

 *Giải*

Biến đổi:

$$\frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{4x+11}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+3A+2B}{(x+2)(x+3)}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A+B=4 \\ 3A+2B=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3}.$$

Do đó:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) dx = (3 \ln|x+2| + \ln|x+3|) \Big|_0^1 = \ln \frac{9}{2}$$

Ví dụ 3: Tính các tích phân sau:

a. (ĐHNT HN – 2000): $I = \int_0^1 \frac{(x^2 + 3x + 10)dx}{x^2 + 2x + 9}$.

b. (ĐHNT HN – 2000): $I = \int_0^1 \frac{(x^3 + 2x^2 + 10x + 1)dx}{x^2 + 2x + 9}$.

 **Giải**

a. Biến đổi:

$$\frac{x^2 + 3x + 10}{x^2 + 2x + 9} = 1 + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 9} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 9}.$$

Khi đó:

$$I = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 9} \right) dx = \left(x + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 9| \right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}.$$

b. Biến đổi:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 10x + 1}{x^2 + 2x + 9} = x + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 9} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 9}.$$

Khi đó:

$$I = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 9} \right) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 9| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}.$$

Ví dụ 4: (ĐH XD HN – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{3dx}{1+x^3}$.

 **Giải**

Biến đổi:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x^3 + 1} &= \frac{3}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B(2x-1)}{x^2 - x + 1} + \frac{C}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{(A+2B)x^2 - (A-B-C)x + A-B+C}{x^3 + 1}. \end{aligned}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A-B+C=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1/2 \\ C=3/2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{3}{x^3+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2-x+1}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= (\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x^2-x+1|) \Big|_0^1 + \frac{3}{2} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= \ln 2 + \underbrace{\frac{3}{2} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}}_J. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta đi xác định tích phân J bằng cách biến đổi:

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}.$$

Đặt $\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \tan^2 t) dt.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó:

$$J = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\pi/6} \frac{(1 + \tan^2 t) dt}{\tan^2 t + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/6} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} t \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được $I = \ln 2 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Ví dụ 5: Tính các tích phân sau:

$$\text{a. } I = \int_0^1 \frac{(1+x^4)dx}{1+x^6}. \quad \text{b. (Đề 40 – Bộ đề 1996): } I = \int_0^1 \frac{(x^2-1)dx}{1+x^4}.$$

 **Giải**

a. Biến đổi:

$$\frac{1+x^4}{1+x^6} = \frac{x^4 - x^2 + 1 + x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^6+1}.$$

Khi đó:

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}}_{I_2}. \quad (1)$$

↓ Tích phân I_1 được xác định bằng cách đặt $x = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra:

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \tan^2 t)dt \text{ \& } \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{(1 + \tan^2 t)dt}{\tan^2 t + 1} = dt.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} dt = t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}. \quad (2)$$

↓ Tích phân I_2 được xác định bằng cách đặt $x^3 = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra:

$$3x^2 dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \tan^2 t)dt \text{ \& } \frac{x^2 dx}{x^6 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1 + \tan^2 t)dt}{\tan^2 t + 1} = \frac{1}{3} dt.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I_2 = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} dt = \frac{1}{3} t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{12}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được: $I = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$.

b. Xét hàm số:

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}$$

ta có:

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right)' = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}.$$

Do đó:

$$I = F(x) \Big|_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}.$$

Ví dụ 6: (ĐHMĐC – 95/ Đề 85): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 4x^2 + 3}$.

 *Giải*

Biến đổi:

$$\frac{1}{x^4 + 4x^2 + 3} = \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 3} \right).$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3}}_{I_2} \right). \quad (1)$$

✚ Tích phân I_1 được xác định bằng cách đặt $x = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra:

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \tan^2 t)dt \text{ \& } \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{(1 + \tan^2 t)dt}{\tan^2 t + 1} = dt.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} dt + t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}. \quad (2)$$

✚ Tích phân I_2 được xác định bằng cách đặt $x = \sqrt{3} \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra:

$$dx = \frac{\sqrt{3}dt}{\cos^2 t} = \sqrt{3}(1 + \tan^2 t)dt \text{ \& } \frac{dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(1 + \tan^2 t)dt}{\tan^2 t + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} dt.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó:

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/6} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} t \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được:

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right).$$

Vấn đề 6: PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN CỦA CÁC HÀM SỐ VÔ TỈ

Ví dụ 7: (ĐHQG HN Khối B – 97): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$.

 *Giải*

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^1 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx = \frac{2}{3} [(x+1)^{3/2} - x^{3/2}] \Big|_0^1 = \frac{4}{3} (\sqrt{2} - 1).$$

Ví dụ 8: Tính các tích phân sau:

a. (ĐHAN Khối A – 1999): $I = \int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$.

b. (ĐHQG HN Khối B – 1998): $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx$

 *Giải*

a. Đặt $t = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow dt = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$

Đổi cận:

- Với $x = \sqrt{7}$ thì $t = 4$,
- Với $x = 4$ thì $t = 5$

Khi đó:

$$I = \int_4^5 \frac{dx}{t^2-9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| \Big|_4^5 = \frac{1}{6} \ln \frac{7}{4}.$$

b. Đặt: $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow dt = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow dx = \frac{tdt}{x}$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$,
- Với $x = 1$ thì $t = \sqrt{2}$

Khi đó:

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)t^2 dt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^4-t^2) dt = \left(\frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{15} (\sqrt{2} + 1).$$

Ví dụ 9: Tính các tích phân sau:

a. (ĐHSP II HN Khối A – 2000): $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$.

b. (ĐHGT HN – 1998): $I = \int_0^{7/3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$

 *Giải*

a. Đặt $t = \sqrt{x^3 + 1}$ suy ra $dt = \frac{3x^2 dx}{2\sqrt{x^3 + 1}} \Leftrightarrow dx = \frac{2tdt}{3x^2}$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = \sqrt{2}$,
- Với $x = 1$ thì $t = 3$.

Khi đó:

$$I = \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách đặt ẩn phụ sau:

Cách 1: Đặt $t = 3x + 1$ suy ra $dt = 3dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$,
- Với $x = \frac{7}{3}$ thì $t = 8$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{9} \int_1^8 \frac{(t+2)dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{9} \int_1^8 (t^{2/3} + 2t^{-1/3}) dt = \frac{1}{9} \left(\frac{3}{5} t^{5/3} + 2 \cdot \frac{3}{2} t^{2/3} \right) \Big|_1^8 = \frac{46}{15}.$$

Cách 2: Đặt $t = \sqrt[3]{3x+1}$ suy ra $t^3 = 3x+1 \Rightarrow 3t^2 dt = 3dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$,
- Với $x = \frac{7}{3}$ thì $t = 2$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{(t^3+2)t^2 dt}{t} = \frac{1}{3} \int_1^2 (t^4 + 2t) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} t^5 + t^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{46}{15}.$$

Ví dụ 10: Tính các tích phân sau:

a. (HVKTQS – 1998): $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$.

b. (HVNH TPHCM Khối A – 2000): $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x + \sqrt{x^2 + 1}} dx$.

 *Giải*

a. Đặt $t = x + \sqrt{1+x^2}$ suy ra:

$$t - x = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow (t-x)^2 = 1+x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t},$$

$$\sqrt{1+x^2} = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t} \text{ \& } dx = \frac{t^2+1}{2t^2} dt.$$

Đổi cận:

▪ Với $x = -1$ thì $t = \sqrt{2} - 1$,

▪ Với $x = 1$ thì $t = \sqrt{2} + 1$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{(t^2+1)dt}{t^2(t+1)}.$$

Biến đổi:

$$\frac{t^2+1}{t^2(t+1)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t+1} = \frac{(B+C)t^2 + (A+B)t + A}{t^2(t+1)}.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} B+C=1 \\ A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{t^2+1}{t^2(t+1)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{2}{t+1}.$$

Do đó:

$$I = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t} - \ln|t| + 2\ln|t+1| \right) \Big|_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} = 1.$$

b. Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^1 x^3 (x - \sqrt{x^2+1}) dx = \underbrace{\int_0^1 x^4 dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 x^3 \sqrt{x^2+1} dx}_{I_2}. \quad (1)$$

✚ Tích phân I_1 được tính bằng cách:

$$I_1 = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{5}. \quad (2)$$

✚ Tích phân I_2 được tính bằng cách đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ suy ra:

$$t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow dt = dx \text{ \& } x^3 \sqrt{x^2+1} dx = (t^2-1)t^2 dt = (t^4 - t^2) dt.$$

Đổi cận:

▪ Với $x = 0$ thì $t = 1$,

▪ Với $x = 1$ thì $t = \sqrt{2}$.

Khi đó:

$$I_2 = \int_1^{\sqrt{2}} (t^4 - t^2) dt = \left(\frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{15}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được $I = \frac{2\sqrt{2} - 1}{15}$.

Ví dụ 11: (ĐHBK HN – 1995): Tính tích phân $I = \int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $t = \sqrt{x^2 - 1}$, suy ra:

$$dt = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \& \quad \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{dt}{t^2 + 1}$$

Đổi cận:

- Với $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ thì $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
- Với $x = \sqrt{2}$ thì $t = 1$

Khi đó:

$$I = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

Đặt $t = \tan u$, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, suy ra:

$$dt = \frac{du}{\cos^2 u} = (1 + \tan^2 u) du \quad \& \quad \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{(1 + \tan^2 u) du}{\tan^2 u + 1} = du.$$

Đổi cận:

- Với $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $u = \frac{\pi}{6}$,
- Với $t = 1$ thì $u = \frac{\pi}{4}$

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} du = u \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{\pi}{12}.$$

Cách 2: Đặt $x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in (0; \frac{\pi}{2})$, suy ra:

$$dx = \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} \quad \& \quad \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t} dt}{\frac{1}{\cos t} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} = \frac{\tan t dt}{\tan t} = dt.$$

Đổi cận:

▪ Với $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$,

▪ Với $x = \sqrt{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} dt = t \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{\pi}{12}.$$

Ví dụ 12: Tìm k , biết $\int_1^e \ln \frac{k}{x} dx < e - 2$.

 *Giải*

Ta có:

$$\int_1^e \ln \frac{k}{x} dx = \int_1^e (\ln k - \ln x) dx.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln k - \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln \frac{k}{x} dx &= x(\ln k - \ln x) \Big|_1^e + \int_1^e dx = e(\ln k - 1) - \ln k + x \Big|_1^e \\ &= e(\ln k - 1) - \ln k + e - 1 = (e + 1)\ln k - 1. \end{aligned}$$

Từ đó, ta được:

$$(e + 1)\ln k - 1 < e - 2 \Leftrightarrow \ln k < \frac{e-1}{e+1} \Leftrightarrow k < e^{\frac{e-1}{e+1}} \Rightarrow k \in \{1; 2\}.$$

Ví dụ 13: (ĐH Thái Nguyên – 2000): Tính tích phân $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)^n \sqrt{1+x^n}}$.

 *Giải*

Biến đổi I_n về dạng:

$$I_n = \int_0^1 \frac{[(1+x^n) - x^n]dx}{(1+x^n)^n \sqrt{1+x^n}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}}_{J_n} - \int_0^1 \frac{x^n dx}{(1+x^n)^n \sqrt{1+x^n}}. \quad (1)$$

Tính tích phân J_n bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}} \\ dv = dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -x^{n-1}(1+x^n)^{-\frac{1}{n}-1} dx \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J_n = \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n dx}{(1+x^n)^{\frac{n}{n}} \sqrt[n]{1+x^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \int_0^1 \frac{x^n dx}{(1+x^n)^{\frac{n}{n}} \sqrt[n]{1+x^n}}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được: $I_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$

 **Chú ý:** Hầu hết các tài liệu tham khảo trước đây giải bài toán trên bằng phương pháp biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{x^{-(n+1)} dx}{(1+x^{-n})^{\frac{n}{n}} \sqrt[n]{1+x^{-n}}} = -\frac{1}{n} \int_0^1 (1+x^{-n})^{-(1+\frac{1}{n})} d(1+x^{-n}) \\ &= \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}. \end{aligned}$$

Cho dù đáp số bài toán là hoàn toàn chính xác, xong phép biến đổi trên là không tương đương bởi x nhận giá trị bằng 0 theo cận.

Ví dụ 14: (ĐHAN – 1996): Tính tích phân $I = \int_0^a x^2 \sqrt{x^2 + a^2} dx$, với $a > 0$.

 **Giải**

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = x\sqrt{x^2 + a^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + a^2)^3} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} x \sqrt{(x^2 + a^2)^3} \Big|_0^a - \frac{1}{3} \int_0^a (x^2 + a^2) \sqrt{x^2 + a^2} dx \\ &= \frac{2a^4 \sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} \int_0^a x^2 \sqrt{x^2 + a^2} dx - \frac{1}{3} a^2 \int_0^a \sqrt{x^2 + a^2} dx \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3} I &= \frac{2a^4 \sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} a^2 \int_0^a \sqrt{x^2 + a^2} dx. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta biết rằng:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^a \sqrt{x^2 + a^2} dx = \left(\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| \right) \Big|_0^a \\ &= \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln|1 + \sqrt{2}|. \end{aligned} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = \frac{3}{4} \left[\frac{2a^4 \sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} a^2 \left(\frac{a^2 \sqrt{2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln|1 + \sqrt{2}| \right) \right] = \frac{a^4}{8} [3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})].$$

 **Chú ý:** Bởi hạn chế chương trình trong sách giáo khoa nên khi thực hiện bài thi các em học sinh cần chứng minh lại công thức:

$$\int \sqrt{x^2 \pm a} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a} \pm \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$$

Vấn đề 7: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

a. (ĐHNN I Khối A – 18): $I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\sin x + \cos x} dx.$

b. (ĐHGT TPHCM – 2000): $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$

c. (ĐHNT HN – 1994): $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx.$

 **Giải**

a. Biến đổi I về dạng:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} \right) dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\sin x + \cos x + \cos x - \sin x) dx \\ &= 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = 1. \end{aligned}$$

b. Biến đổi I về dạng:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^2 x (\tan^2 x + 1) d(\tan x) \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} (\tan^4 x + \tan^2 x) d(\tan x) = \left(\frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{42\sqrt{3} - 8}{15}. \end{aligned}$$

c. Biến đổi I về dạng:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left| \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| dx \\ &= \sqrt{2} \left[\int_0^{3\pi/2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx \right] \\ &= \sqrt{2} \left[-2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{3\pi/2} + 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} \right] = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: (ĐHMĐC – 2000): Tính $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6})}$.

 **Giải**

Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2 \sin[(x + \frac{\pi}{6}) - x].$$

Ta được:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sin x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6})} &= \frac{2 \sin[(x + \frac{\pi}{6}) - x]}{\sin x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6})} = \frac{2[\sin(x + \frac{\pi}{6}) \cos x - \sin x \cdot \cos(x + \frac{\pi}{6})]}{\sin x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6})} \\ &= 2 \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos(x + \frac{\pi}{6})}{\sin(x + \frac{\pi}{6})} \right] \end{aligned}$$

Khi đó:

$$I = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos(x + \frac{\pi}{6})}{\sin(x + \frac{\pi}{6})} \right] dx = 2 \left[\ln|\sin x| - \ln|\sin(x + \frac{\pi}{6})| \right] \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = 2 \ln \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 3: (ĐHBK HN – 1999): Cho hàm số $h(x) = \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2}$.

a. Tìm A, B để $h(x) = \frac{A \cos x}{(2 + \sin x)^2} + \frac{B \cos x}{2 + \sin x}$.

b. Tính $I = \int_{-\pi/2}^0 h(x) dx$.

 **Giải**

a. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} &= \frac{A \cos x}{(2 + \sin x)^2} + \frac{B \cos x}{2 + \sin x} \\ \Leftrightarrow \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{(2 + \sin x)^2} &= \frac{(A + 2B) \cos x + B \sin x \cdot \cos x}{(2 + \sin x)^2} \end{aligned}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = 2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} = -\frac{4\cos x}{(2 + \sin x)^2} + \frac{2\cos x}{2 + \sin x}. \quad (1)$$

b. Sử dụng (1) ta được:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^0 \left[-\frac{4\cos x}{(2 + \sin x)^2} + \frac{2\cos x}{2 + \sin x} \right] dx = \int_{-\pi/2}^0 \left[-\frac{4}{(2 + \sin x)^2} + \frac{2}{2 + \sin x} \right] d(\sin x) \\ &= \left(\frac{4}{2 + \sin x} + 2\ln|2 + \sin x| \right) \Big|_{-\pi/2}^0 = 2\ln 2 - 2. \end{aligned}$$

 **Chú ý:** Nếu bài toán được phát biểu tổng quát hơn, như:

$$\text{" Tính tích phân } I = \int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin 2x dx}{(2 + \sin x)^2} \text{"}$$

Để các em học sinh dễ nhìn nhận ra phương pháp thực hiện, ta trình bày như sau:

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{-\pi/2}^0 \frac{2 \sin x \cdot \cos x dx}{(2 + \sin x)^2}$$

Đặt $t = \sin x$, khi đó: $dt = \cos x dx$

Đổi cận:

- với $x = 0 \Rightarrow t = 0$,
- với $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -1$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{-1}^0 \frac{t dt}{(2+t)^2} = 2 \int_{-1}^0 \frac{(2+t)-2}{(2+t)^2} dt = 2 \int_{-1}^0 \left[\frac{1}{2+t} - \frac{1}{(2+t)^2} \right] dt \\ &= 2 \left(\ln|2+t| + \frac{1}{2+t} \right) \Big|_{-1}^0 = 2\ln 2 - 1. \end{aligned}$$

Trong bài toán trên sở dĩ ta định hướng được phép biến đổi như vậy là bởi nhận xét rằng:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

do đó sử dụng phép đổi biến tương ứng là $t = \sin x$.

Ví dụ 4: (ĐHTCKT – 1996): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + 7\cos x + 6}{4\sin x + 3\cos x + 5} dx$.

 **Giải**

Giả sử:

$$\begin{aligned} \sin x + 7\cos x + 6 &= A(4\sin x + 3\cos x + 5) + B(4\cos x - 3\sin x) + C \\ &= (4A - 3B)\sin x + (3A + 4B)\cos x + 5A + C. \end{aligned}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} 4A - 3B = 1 \\ 3A + 4B = 7 \Leftrightarrow A = B = C = 1. \\ 5A + C = 6 \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{4\cos x - 3\sin x}{4\sin x + 3\cos x + 5} + \frac{1}{4\sin x + 3\cos x + 5} \right) dx \\ &= \underbrace{\int_0^{\pi/2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{(4\cos x - 3\sin x)dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}}_{I_2} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}}_{I_3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Trong đó:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} dx = x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\pi/2} \frac{(4\cos x - 3\sin x)dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int_0^{\pi/2} \frac{d(4\sin x + 3\cos x + 5)}{4\sin x + 3\cos x + 5} \\ &= \ln|4\sin x + 3\cos x + 5| \Big|_0^{\pi/2} = \ln \frac{9}{8}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5[1 + \cos(x - \alpha)]} = \frac{1}{10} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x - \alpha}{2}} = \frac{1}{10} \tan \frac{x - \alpha}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}. \quad (4)$$

Thay (2), (3), (4) vào (1), ta được $I = \frac{\pi}{2} + \ln \frac{9}{8} + \frac{1}{6}$.

 **Chú ý:**

1. Giá trị α trong lời giải trên được xác định bởi: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ & $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.
2. Lời khuyên dành cho các em học sinh trong việc tính giá trị của I_3 là sử dụng phép đặt ẩn phụ $t = \tan \frac{x}{2}$, cụ thể:

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, ta được:

$$dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx = \frac{1}{2} \cdot (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1 + t^2},$$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \text{ \& \& } \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$I_3 = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} + 5} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 5: (ĐHQG TPHCM – 1999): Tính tích phân:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos px \cdot \cos qx dx \text{ khi } \begin{cases} p = q \\ p \neq q \end{cases}.$$

 *Giải*

Trường hợp 1: Với $p = q$ thì:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^2 qx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2qx) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2q} \sin 2qx \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Trường hợp 2: Với $p \neq q$ thì:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(q+p)x + \cos(q-p)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p+q} \sin(p+q)x + \frac{1}{p-q} \sin(p-q)x \right] \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Vậy, ta được:

$$I = \begin{cases} \pi & \text{Nếu } p = q \\ 0 & \text{Nếu } p \neq q \end{cases}.$$

Ví dụ 6: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}.$

b. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}.$

 *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, ta được:

$$dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x} = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 dt = t \Big|_0^1 = 1.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \tan x$, suy ra:

$$du = \frac{du}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x) dx = (1 + u^2) dx \Rightarrow dx = \frac{du}{1 + u^2}.$$

Đổi cận:

- Với $x = \frac{\pi}{4}$ thì $u = 1$,
- Với $x = \frac{\pi}{3}$ thì $u = \sqrt{3}$.

Từ đó:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\frac{du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}} = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} (\ln \sqrt{3} - \ln 1) = \frac{\ln 3}{4}.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x} &= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\tan x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d(\tan x)}{\tan x} \\ &= \frac{1}{2} \ln |\tan x| \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{2} (\ln \sqrt{3} - \ln 1) = \frac{\ln 3}{4}. \end{aligned}$$

Cách 3: Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x} &= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) dx}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (-\ln |\cos x| + \ln |\sin x|) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\ln 3}{4}. \end{aligned}$$

Ví dụ 7: (ĐHQG TPHCM Khối A – 1998): Tính tích phân:

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx.$$

 *Giải*

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x - \sin^4 x) \cdot \cos x dx.$$

Đặt $t = \sin x$, khi đó: $dt = \cos x dx$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^1 (t^2 - t^4) dt = \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

 **Nhận xét:** Trong bài toán trên sử dụng ta định hướng được phép biến đổi như vậy là bởi nhận xét rằng:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

do đó sử dụng phép đổi biến tương ứng là $t = \sin x$.

Ngoài ra bài toán trên còn có thể được giải bằng việc biến đổi biểu thức: $\cos^3 x \cdot \sin^2 x$ về dạng tổng của các hàm lượng giác, cụ thể:

$$\begin{aligned} \cos^3 x \cdot \sin^2 x &= \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \cos x = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x) \cdot \cos x \\ &= \frac{1}{8} (\cos x - \cos 4x \cdot \cos x) = \frac{1}{8} \left[\cos x - \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos 3x) \right] \\ &= \frac{1}{16} (2\cos x - \cos 5x - \cos 3x). \end{aligned}$$

Ví dụ 8: (HVNH TPHCM Khối D – 2000): *Tính tích phân:*

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

 *Giải*

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{2 \sin 2x \cdot \cos 2x}{1 + \frac{1 + \cos 2x}{2}} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{4 \sin 2x \cdot \cos 2x}{3 + \cos 2x} dx$$

Đặt $t = \cos 2x$, khi đó: $dt = -2 \sin 2x dx$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$,
- Với $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^0 \frac{-2t dt}{3+t} = -2 \int_1^0 \frac{t dt}{t+3} = -2 \int_1^0 \frac{(t+3)-3}{t+3} dt = -2 \int_1^0 \left(1 - \frac{3}{t+3}\right) dt \\ &= -2(t - 3\ln|t+3|) \Big|_1^0 = \frac{2}{15} \cdot 2 + 6\ln \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

 **Nhận xét:**

1. Trong bài toán trên sở dĩ ta định hướng được phép biến đổi như vậy là bởi nhận xét rằng:

$$R(-\sin 2x, \cos 2x) = -R[\sin(-2x), \cos(-2x)]$$

do đó sử dụng phép đổi biến tương ứng là $t = \cos 2x$.

2. Việc lựa chọn ẩn phụ ở một vài bài toán cần được định hướng sau một vài phép biến đổi.

Ví dụ 9: (ĐHNLN – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x}$.

 **Giải**

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, ta được:

$$dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx = \frac{1}{2} \cdot (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$I_3 = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 2t + 3} = -\frac{1}{t+2} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 10: (ĐHTCKT – 1995): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cdot \cos x \cdot dx}{\sqrt{b^2 \cos^2 x + c^2 \sin^2 x}}$.

 **Giải**

Ta đi xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = \pm c$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2|b|} \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = -\frac{1}{4|b|} \cos 2x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2|b|}.$$

Trường hợp 2: Nếu $b^2 \neq c^2 \Leftrightarrow b \neq \pm c$.

Đặt $t = \sqrt{b^2 \cos^2 x + c^2 \sin^2 x}$, khi đó:

$$dt = \frac{(c^2 - b^2) \sin x \cdot \cos x dx}{\sqrt{b^2 \cos^2 x + c^2 \sin^2 x}}$$

Đối cận:

- Với $x = 0$ thì $t = |b|$,
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = |c|$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{c^2 - b^2} \int_{|b|}^{|c|} dt = \frac{1}{c^2 - b^2} \cdot t \Big|_{|b|}^{|c|} = \frac{|c| - |b|}{c^2 - b^2} = \frac{1}{|c| + |b|}.$$

Tóm lại ta được:

$$I = \begin{cases} \frac{1}{2|b|} & \text{khi } b = \pm c \\ \frac{1}{|c| + |b|} & \text{khi } b \neq \pm c \end{cases}.$$

 **Chú ý:** Cũng có thể sử dụng phép đổi biến $t = b^2 \cos^2 x + c^2 \sin^2 x$.

Ví dụ 11: (ĐHTL – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin x + 4 \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx$.

 **Giải**

Biến đổi I về dạng:

$$I = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin x dx}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{4 \cos x dx}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x}}_{I_2}. \quad (1)$$

a. Tích phân I_1 được tính bằng cách đặt $t = \cos x$, khi đó $dt = -\sin x dx$.

Đối cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$,
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I_1 = \int_1^0 \frac{-3 dt}{3(1-t^2) + 4t^2} = 3 \int_0^1 \frac{dt}{3+t^2}.$$

Đặt $t = \sqrt{3} \tan u$, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dt = \frac{\sqrt{3} du}{\cos^2 u} = \sqrt{3} (1 + \tan^2 u) du \text{ \& } \frac{dt}{t^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(1 + \tan^2 u) du}{\tan^2 u + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} du.$$

Đổi cận:

- Với $t = 0$ thì $u = 0$,
- Với $t = 1$ thì $u = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó:

$$I_1 = \frac{3}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/6} du = \frac{3}{\sqrt{3}} u \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}. \quad (2)$$

b. Tích phân I_2 được tính bằng cách đặt $t = \sin x$, khi đó $dt = \cos x dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{4dt}{3t^2 + 4(1-t^2)} = 4 \int_0^1 \frac{dt}{4-t^2} = \ln \left| \frac{2+t}{2-t} \right| \Big|_0^1 = \ln 3. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln 3$.

Ví dụ 12: (ĐH TCKT HN – 1999): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} x \cdot \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx$.

 *Giải*

Đặt $t = \pi - x$, khi đó $dt = -dx$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = \pi$,
- Với $x = \pi$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^0 (\pi - t) \cdot \cos^4(\pi - t) \cdot \sin^3(\pi - t) (-dt) = \int_0^{\pi} (\pi - t) \cdot \cos^4 t \cdot \sin^3 t dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} \cos^4 t \cdot \sin^3 t dt - \int_0^{\pi} t \cdot \cos^4 t \cdot \sin^3 t dt = \pi \int_0^{\pi} \cos^4 t \cdot \sin^3 t dt - I \\ \Leftrightarrow 2I &= \pi \int_0^{\pi} \cos^4 t \cdot \sin^3 t dt \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^4 t \cdot \sin^2 t \cdot \sin t dt. \end{aligned}$$

Đặt $u = \cos t$, khi đó $du = -\sin t dt$

Đổi cận:

- Với $t = 0$ thì $u = 1$,
- Với $t = \pi$ thì $u = -1$.

Khi đó:

$$I = -\frac{\pi}{2} \int_1^{-1} u^4(1-u^2)du = -\frac{\pi}{2} \int_1^{-1} (u^4 - u^6)du = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{7} u^7 \right) \Big|_1^{-1} = \frac{2\pi}{35}.$$

Ví dụ 13: Tính các tích phân sau:

a. (HVK TMM – 2000): $I = \int_0^1 x \tan^2 x dx.$

b. (ĐHBK HN – 1994): $I = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x dx.$

 *Giải*

a. Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^1 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{x dx}{\cos^2 x}}_{I_1} - \int_0^1 x dx. \quad (1)$$

Xác định I_1 bằng phương pháp tích phân từng phần, như sau:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_1 = x \tan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \tan x dx = (x \tan x + \ln |\cos x|) \Big|_0^1 = \tan 1 + \ln(\cos 1). \quad (2)$$

Ngoài ra:

$$I_2 = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được $I = \tan 1 + \ln(\cos 1) - \frac{1}{2}.$

b. Biến đổi I về dạng:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\int_0^{\pi/2} x dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} x \cos 2x dx}_{I_2} \right). \quad (1)$$

trong đó:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (2)$$

Với tích phân I_2 được xác định bằng phương pháp tích phân từng phần:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_2 = \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = \frac{1}{2} (x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được:

$$I = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 14: (HVNH TPHCM Khối A – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/3} \frac{x + \sin x}{\cos^2 x} dx$.

 *Giải*

Biến đổi I về dạng:

$$I = \underbrace{\int_0^{\pi/3} \frac{x dx}{\cos^2 x}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}}_{I_2}. \quad (1)$$

trong đó:

$$I_1 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = - \int_0^{\pi/3} \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \Big|_0^{\pi/3} = 1. \quad (2)$$

Với tích phân I_2 được xác định bằng phương pháp tích phân từng phần:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_2 = x \tan x \Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \tan x dx = (x \tan x + \ln |\cos x|) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln \frac{1}{2} + 1$.

Ví dụ 15: Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \cos^2 2x dx$.

 *Giải*

Xét tích phân:

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos^2 2x dx.$$

Ta có nhận xét:

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{2} (x + \frac{1}{4} \sin 4x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned}
 I - J &= \int_0^{\pi/2} \cos^3 2x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (\cos 6x + 3 \cos 2x) dx \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{6} \sin 6x + \frac{3}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi/2} = 0.
 \end{aligned}$$

Suy ra $I = \frac{\pi}{8}$.

 Nhận xét:

1. Ta hoàn toàn có thể xác định tích phân đã cho bằng phương pháp biến đổi lượng giác thông thường, cụ thể:

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \cos^2 x \cdot \cos^2 2x &= \frac{1}{4} (1 + \cos 2x)(1 + \cos 4x) \\
 &= \frac{1}{4} (1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 4x \cdot \cos 2x) \\
 &= \frac{1}{4} \left[1 + \cos 2x + \cos 4x + \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) \right] \\
 &= \frac{1}{8} (2 + 3 \cos 2x + 2 \cos 4x + \cos 6x)
 \end{aligned}$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (2 + 3 \cos 2x + 2 \cos 4x + \cos 6x) dx = \frac{\pi}{8}.$$

2. Ngoài ra bằng việc sử dụng phương pháp đổi biến, ta có thể nhìn nhận được nguyên hàm phụ (như trong chủ đề 6). Ta nhắc lại hai phép đổi biến rất phổ biến là:

- Với $I = \int_0^{\pi/2} f(x) dx$ có thể đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$.

- Với $I = \int_0^{\pi} f(x) dx$ có thể đặt $t = \pi - x$.

Với bài toán trên ta thực hiện như sau:

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$, khi đó $dt = -dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{2}$,

- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \cos^2 2x dx = \int_{\pi/2}^0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cdot \cos^2 2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) (-dt) \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos^2 2x dx = J. \end{aligned}$$

Ta có:

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Suy ra $I = \frac{\pi}{8}.$

Ví dụ 16: (ĐHTM HN – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{4 \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx.$

 *Giải*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử:

$$4 \sin x = A(\sin x + \cos x) + B(\cos x - \sin x) = (A - B) \sin x + (A + B) \cos x$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A - B = 4 \\ A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \frac{2 dx}{(\sin x + \cos x)^2} - 2 \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x - \sin x) dx}{(\sin x + \cos x)^3} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2 dx}{2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4}\right)} - \int_0^{\pi/2} \frac{2 d(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3} \\ &= \left[-\cot \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} \right] \Big|_0^{\pi/2} = 2. \end{aligned}$$

Cách 2: (Sử dụng nguyên hàm phụ): Xét tích phân:

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{4 \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx.$$

Ta có nhận xét:

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{4}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\cotan \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\pi/2} = 4.$$

$$J - I = \int_0^{\pi/2} \frac{4(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^3} dx = - \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2} \Big|_0^{\pi/2} = 0.$$

Suy ra $I = 2$.

Vấn đề 8: PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN CỦA CÁC HÀM SỐ MŨ VÀ LÔGARIT

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

a. (ĐHCD – 2000): $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + 3}.$

b. (ĐHY HN – 1998): $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + e^x}.$

 *Giải*

a. Biến đổi I về dạng:

$$I = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3}\right) dx = \frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 3)\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \ln \frac{4}{e^2 + 3}.$$

b. Biến đổi I về dạng:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dx}{e^x(e^x + 1)} = \int_0^1 \frac{[(e^x + 1) - e^x] dx}{e^x(e^x + 1)} = \int_0^1 \left[\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x + 1} \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{e^x} - \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} \right] dx = \int_0^1 \left[e^{-x} - 1 + \frac{e^x}{e^x + 1} \right] dx \\ &= (-e^{-x} - x + \ln(e^x + 1)) \Big|_0^1 = \ln \frac{e - 1}{2} - e^{-1}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx.$

 *Giải*

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{-2}^0 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx + \int_0^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx. \quad (1)$$

Xét tích phân $J = \int_{-2}^0 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx.$

Đặt $x = -t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = -2$ thì $t = 2$,
- Với $x = 0$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I = - \int_2^0 \ln(-t + \sqrt{t^2 + 1}) dt = - \int_0^2 \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) dt = - \int_0^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được $I = 0$.

Ví dụ 3: (ĐHBK HN – 99): Cho hàm số $g(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 5x$.

a. Tìm họ nguyên hàm của $g(x)$.

b. Tính $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{g(x) dx}{e^x + 1}$.

 **Giải**

a. Sử dụng các phép biến đổi tích thành tổng, ta được:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2} (\sin 6x - \sin 2x) \sin 2x = \frac{1}{2} (\sin 6x \cdot \sin 2x - \sin^2 2x) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 8x) - \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) \right] = \frac{1}{4} (\cos 2x + \cos 4x - \cos 8x - 1) \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{4} \int (\cos 2x + \cos 4x - \cos 8x - 1) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{8} \sin 8x - x \right) + C \\ &= \frac{1}{32} (4 \sin 2x + 2 \sin 4x - \sin 8x - x) + C. \end{aligned}$$

b. Biến đổi I về dạng:

$$I = \underbrace{\int_{-\pi/2}^0 \frac{g(x) dx}{e^x + 1}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{g(x) dx}{e^x + 1}}_{I_2}. \quad (1)$$

Xét tính phân I_1 bằng cách đặt $x = -t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = -\frac{\pi}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{2}$,
- Với $x = 0$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I_1 = \int_{\pi/2}^0 \frac{g(-t)(-dt)}{e^{-t} + 1} = \int_0^{\pi/2} \frac{e^t g(t) dt}{e^t + 1} = \int_0^{\pi/2} \frac{e^x g(x) dx}{e^x + 1}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \frac{e^x g(x) dx}{e^x + 1} + \int_0^{\pi/2} \frac{g(x) dx}{e^x + 1} = \int_0^{\pi/2} \frac{(e^x + 1) g(x) dx}{e^x + 1} = \int_0^{\pi/2} g(x) dx \\ &= \frac{1}{32} (4 \sin 2x + 2 \sin 4x - \sin 8x) \Big|_0^{\pi/2} = 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tính tích phân $I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$.

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = -x^2 e^{-x} \Big|_0^1 + 2 \underbrace{\int_0^1 x e^{-x} dx}_J = -\frac{1}{e} + 2 \int_0^1 x e^{-x} dx. \quad (1)$$

Xét tích phân J bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} - e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $I = 2 - \frac{5}{e}$.

Cách 2: Ta đi xác định nguyên hàm của hàm số: $f(x) = x^2 e^{-x}$, giả sử:

$$F(x) = \int x^2 e^{-x} = \int x^2 e^{-x} dx = (ax^2 + bx + c)e^{-x} + C. \quad (3)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (3), ta được:

$$x^2 e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}. \quad (4)$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a = -1 \\ 2a - b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow F(x) = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x} + C.$$

Do đó:

$$I = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x} \Big|_0^1 = 2 - \frac{5}{e}.$$

Ví dụ 5: Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$.

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = e^x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx}_{J} = -1 + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx. \quad (1)$$

Xét tích phân J bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = e^x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = e^{\pi/2} - I. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $I = \frac{1}{2} (e^{\pi/2} - 1)$.

Cách 2: Ta đi xác định nguyên hàm của hàm số: $f(x) = e^x \cos x$, giả sử:

$$F(x) = \int e^x \cos x dx = (a + b \cos x + c \sin x) e^x + C. \quad (3)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (3), ta được:

$$e^x \cdot \cos x = [a + (c + b) \cos x + (c - b) \sin x] e^x. \quad (4)$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a = 0 \\ c + b = 1 \\ c - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} (\cos x + \sin x) e^x + C.$$

Do đó:

$$I = \frac{1}{2} (\cos x + \sin x) e^x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} (e^{\pi/2} - 1).$$

Ví dụ 6: Tính tích phân $I = \int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx$.

 **Giải**

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(1 + x^2) \\ dv = x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{2x dx}{1 + x^2} \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3 dx}{1+x^2} = \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \frac{[x(x^2+1) - x] dx}{1+x^2} \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right] \Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 7: Tính tích phân $I = \int_0^1 e^{x+e^x} dx$.

 *Giải*

Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int_0^1 e^x e^{e^x} dx.$$

Đặt $t = e^x$ suy ra $e^x dx = dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$,
- Với $x = 1$ thì $t = e$.

Khi đó:

$$I = \int_1^e t e^t dt$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases} \Rightarrow I = t e^t \Big|_1^e - \int_1^e e^t dt = e^{e+1} - e - e^t \Big|_1^e = e^{e+1} - e^e.$$

Ví dụ 8: (ĐHKT HN - 99): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x} \cdot \sin x \cdot \cos^3 x dx$

 *Giải*

Đặt $t = \sin^2 x$ suy ra $dt = 2 \cos x \sin x dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^t (1-t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 e^t dt - \int_0^1 t e^t dt \right) = \frac{1}{2} (e^t \Big|_0^1 - \int_0^1 t e^t dt) \\ &= \frac{1}{2} (e - \underbrace{\int_0^1 t e^t dt}_{I_1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Ta đi xác định tích phân I_1 bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases} \Rightarrow I_1 = te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - e^t \Big|_0^1 = 1. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $I = \frac{1}{2}(e - 1)$.

Ví dụ 9: Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln \sqrt[3]{1 + \ln^2 x}}{x} dx$.

 *Giải*

Biến đổi I về dạng:

$$I = \frac{1}{3} \int_1^e \frac{\ln(1 + \ln^2 x)}{x} dx$$

Đặt $t = \ln x$ suy ra $dt = \frac{dx}{x}$.

Đổi cận:

- Với $x = 1$ thì $t = 0$,
- Với $x = e$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3} \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(1 + t^2) \\ dv = dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{2tdt}{1 + t^2} \\ v = t \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \left[t \cdot \ln(1 + t^2) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1 + t^2} \right] = \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{(t^2 + 1 - 1) dt}{1 + t^2} \\ &= \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3} \left(\int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} \right) = \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3} t \Big|_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} \\ &= \frac{\ln 3 - 2}{3} + \frac{2}{3} \underbrace{\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2}}_{I_1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta đi xác định tích phân I_1 bằng cách đặt $t = \tan u$, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dt = \frac{du}{\cos^2 u} = (1 + \tan^2 u) du \quad \& \quad \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{(1 + \tan^2 u) du}{\tan^2 u + 1} = du.$$

Đổi cận:

- Với $t = 0$ thì $u = 0$,
- Với $t = 1$ thì $u = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} du = u \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $I = \frac{\ln 3 - 2}{3} + \frac{\pi}{6}$.

Vấn đề 9: PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN CỦA CÁC HÀM SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

Trong chủ đề này, chúng ta cùng nhau đi chứng minh một số tính chất cho những lớp tích phân đặc biệt, bao gồm:

Tính chất 1: Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm lẻ trên $[-a; a]$ thì:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Tính chất 2: Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm chẵn trên đoạn $[-a; a]$ thì:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Tính chất 3: Nếu $f(x)$ liên tục và chẵn trên $\mathbf{R}$ thì:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x) dx}{a^x + 1} = \int_0^{\alpha} f(x) dx \quad \text{với } \forall \alpha \in \mathbf{R}^+ \text{ và } a > 0.$$

Tính chất 4: Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, \frac{\pi}{2}]$ thì:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx.$$

Tính chất 5: Nếu $f(x)$ liên tục và $f(a + b - x) = f(x)$ thì

$$\int_a^b xf(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

Hệ quả 1: Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì:

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} f(\sin x) dx.$$

Hệ quả 2: Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì:

$$\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} x f(\cos x) dx = \pi \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} f(\cos x) dx.$$

Tính chất 6: Nếu $f(x)$ liên tục và $f(a + b - x) = -f(x)$ thì

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Tính chất 7: Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, 2a]$ với $a > 0$ thì

$$\int_a^{2a} f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(2a - x)] dx.$$

Tính chất 8: Nếu $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ T thì

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Để tiện cho việc minh họa, ta phát biểu các tính chất này theo dạng 1, dạng 2, dạng 3,...

DẠNG 1: Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm lẻ trên $[-a; a]$ thì $I = \int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

 *Chứng minh*

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = \underbrace{\int_{-a}^0 f(x) dx}_J + \int_0^a f(x) dx. \quad (1)$$

Xét tích phân J bằng cách đặt $x = -t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = -a$ thì $t = a$.
- $x = 0$ thì $t = 0$.

Mặt khác vì $f(x)$ là hàm lẻ nên $f(-t) = -f(t)$.

Khi đó:

$$J = - \int_a^0 f(-t) dt = - \int_0^a f(t) dt = - \int_0^a f(x) dx. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$I = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

Ví dụ 1: (ĐHGT – 2000): Tính $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x + \cos x}{4 - \sin^2 x} dx$.

 *Giải*

Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x dx}{4 - \sin^2 x} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{4 - \sin^2 x}. \quad (1)$$

a. Ta có:

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x dx}{4 - \sin^2 x} = \int_{-\pi/2}^0 \frac{x dx}{4 - \sin^2 x} + \int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{4 - \sin^2 x} \quad (2)$$

$$\text{Xét tích phân } I_{1,1} = \int_{-\pi/2}^0 \frac{x dx}{4 - \sin^2 x}.$$

Đặt $x = -t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = -\frac{\pi}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{2}$,
- Với $x = 0$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/2}^0 \frac{-t(-dt)}{4 - \sin^2(-t)} = - \int_0^{\pi/2} \frac{t dt}{4 - \sin^2 t} = - \int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{4 - \sin^2 x} \quad (3)$$

$$\text{Thay (3) vào (2) ta được } I_1 = 0. \quad (4)$$

b. Ta có:

$$I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{4 - \sin^2 x} = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 4} = - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{4} \ln 9. \quad (5)$$

Thay (4), (5) vào (1) ta được

$$I = 2 \cdot \frac{1}{4} \ln 9 = \frac{\ln 9}{2}.$$

DẠNG 2: Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm chẵn trên đoạn $[-a; a]$ thì:

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

 *Chứng minh*

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = \underbrace{\int_{-a}^0 f(x) dx}_J + \int_0^a f(x) dx. \quad (1)$$

Xét tích phân J bằng cách đặt $x = -t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = -a$ thì $t = a$.
- Với $x = 0$ thì $t = 0$.

Mặt khác vì $f(x)$ là hàm chẵn nên $f(-t) = f(t)$.

Khi đó:

$$J = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$I = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

 **Chú ý:**

1. Trong phạm vi phổ thông tính chất trên không mang nhiều ý nghĩa ứng dụng, do đó khi gặp các bài toán kiểu này chúng ta tốt nhất cứ đi xác định

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx$$

bằng cách thông thường, thí dụ với tích phân:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot dx.$$

Ta không nên sử dụng phép biến đổi:

$$I = 2 \int_0^{\pi} \cos x \cdot dx = 2 \sin x \Big|_0^{\pi} = 0.$$

bởi khi đó ta nhất thiết phải chứng minh lại tính chất 2. Điều này khiến bài toán trở lên công kênh hơn nhiều so với cách làm thông thường, cụ thể:

$$I = \sin x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

2. Tuy nhiên không thể phủ nhận sự tiện lợi của nó trong một vài trường hợp riêng.

Ví dụ 2: (ĐHSP HN II – 1998): Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và thoả mãn:

$$f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2 \cos 2x} \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

$$\text{Tính tích phân } I = \int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} f(x) dx.$$

 **Giải**

Biến đổi I về dạng:

$$I = \underbrace{\int_{-3\pi/2}^0 f(x) dx}_J + \int_0^{3\pi/2} f(x) dx. \quad (1)$$

Xét tích phân J bằng cách đặt $x = -t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = -\frac{3\pi}{2}$ thì $t = \frac{3\pi}{2}$.
- Với $x = 0$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$J = \int_{3\pi/2}^0 f(-t)(-dt) = \int_0^{3\pi/2} f(-t)dt = \int_0^{3\pi/2} f(-x)dx. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{3\pi/2} f(-x)dx + \int_0^{3\pi/2} f(x)dx = \int_0^{3\pi/2} [f(-x) + f(x)]dx = \int_0^{3\pi/2} \sqrt{2-2\cos 2x}dx \\ &= \int_0^{3\pi/2} 2|\sin x|dx = 2\left(\int_0^{\pi} \sin xdx - \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin xdx\right) = 2(-\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{3\pi/2}) = 6. \end{aligned}$$

DẠNG 3: Nếu $f(x)$ liên tục và chẵn trên $\mathbf{R}$ thì:

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)dx}{a^x + 1} = \int_0^{\alpha} f(x)dx \quad \text{với } \forall \alpha \in \mathbf{R}^+ \text{ và } a > 0.$$

 **Chứng minh**

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)dx}{a^x + 1} = \underbrace{\int_{-\alpha}^0 \frac{f(x)dx}{a^x + 1}}_{I_1} + \int_0^{\alpha} \frac{f(x)dx}{a^x + 1}.$$

Xét tích phân I_1 bằng cách đặt $x = -t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = -\alpha$ thì $t = \alpha$.
- Với $x = 0$ thì $t = 0$.

Mặt khác vì $f(x)$ là hàm chẵn nên $f(-t) = f(t)$.

Khi đó:

$$I_1 = - \int_{\alpha}^0 \frac{f(-t)dt}{a^{-t} + 1} = \int_0^{\alpha} \frac{a^t f(t)dt}{a^t + 1} = \int_0^{\alpha} \frac{a^t f(t)dt}{a^t + 1}.$$

Vậy, ta được:

$$I = \int_0^{\alpha} \frac{a^t f(t)dt}{a^t + 1} + \int_0^{\alpha} \frac{f(x)dx}{a^x + 1} = \int_0^{\alpha} \frac{(a^x + 1)f(x)dx}{a^x + 1} = \int_0^{\alpha} f(x)dx.$$

Ví dụ 3: (ĐHPCCC – 2000): Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx$.

 *Giải*

Biến đổi I về dạng:

$$I = \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx}_{I_1} + \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx.$$

Xét tích phân I_1 bằng cách đặt $x = -t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = -1$ thì $t = 1$.
- Với $x = 0$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I_1 = \int_1^0 \frac{\sqrt{1-(-t)^2}}{1+2^{-t}} (-dt) = \int_0^1 \frac{2^t \sqrt{1-t^2}}{1+2^t} dt = \int_0^1 \frac{2^x \sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx.$$

Vậy, ta được:

$$I = \int_0^1 \frac{2^x \sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx + \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx = \int_0^1 \frac{(1+2^x) \sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Đặt $x = \sin u$, $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ thì $dx = \cos u du$.

Đổi cận:

- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.
- Với $x = 0$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 u} \cdot \cos u du = \int_0^{\pi/2} |\cos u| \cos u du = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2u) du = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{2} \sin 2u \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4: (ĐHĐ HN – 1996): Tính tích phân $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2 \cdot |\sin x| \cdot dx}{1+2^x}$.

 *Giải*

Biến đổi I về dạng:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^0 \frac{x^2 \cdot |\sin x|}{1+2^x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{x^2 \cdot |\sin x|}{1+2^x} dx \\ &= - \underbrace{\int_{-\pi/2}^0 \frac{x^2 \cdot \sin x \cdot dx}{1+2^x}}_{I_1} + \int_0^{\pi/2} \frac{x^2 \cdot \sin x \cdot dx}{1+2^x}. \end{aligned} \quad (1)$$

Xét tính phân I_1 bằng cách đặt $x = -t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = -\frac{\pi}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

- Với $x = 0$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I_1 = \int_{\pi/2}^0 \frac{(-t)^2 \cdot \sin(-t) \cdot (-dt)}{1 + 2^{-t}} = - \int_0^{\pi/2} \frac{2^t \cdot t^2 \cdot \sin t \cdot dt}{1 + 2^t} = - \int_0^{\pi/2} \frac{2^x x^2 \cdot \sin x \cdot dx}{1 + 2^x}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{2^x x^2 \cdot \sin x \cdot dx}{1 + 2^x} + \int_0^{\pi/2} \frac{x^2 \cdot \sin x \cdot dx}{1 + 2^x} = \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + 2^x) x^2 \cdot \sin x \cdot dx}{1 + 2^x} = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \cdot dx$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \sin x \cdot dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2x \cdot dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = -x^2 \cos x \Big|_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x \cdot dx = 2 \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x \cdot dx.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x \cdot dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = 2(x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot dx) = 2\left[\frac{\pi}{2} - (-\cos x) \Big|_0^{\pi/2}\right] = \pi - 2.$$

DẠNG 4: Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0; \frac{\pi}{2}]$ thì:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) \cdot dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) \cdot dx.$$

 **Chứng minh**

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = - \int_{\pi/2}^0 f(\sin(\frac{\pi}{2} - t)) dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos t) dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx.$$

 **Chú ý:** Như vậy, việc áp dụng tính chất 4 để tính tích phân

$$I = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx \quad (\text{hoặc } I = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx).$$

thường được thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Bằng phép đổi biến $t = \frac{\pi}{2} - x$ như trong phần chứng minh tính chất, ta thu được:

$$I = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx.$$

Bước 2: Đi xác định kI (nó được phân tích

$$kI = \alpha \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx + \beta \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx),$$

thường là:

$$2I = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx + \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} [f(\sin x) + f(\cos x)] dx$$

Từ đó suy ra giá trị của I .

Ví dụ 5: Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x dx}{\cos^n x + \sin^n x}.$

 **Giải**

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos^n(\frac{\pi}{2} - t)(-dt)}{\cos^n(\frac{\pi}{2} - t) + \sin^n(\frac{\pi}{2} - t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n t dt}{\cos^n t + \sin^n t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx.$$

Do đó:

$$2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x + \sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}.$$

DẠNG 4: Nếu $f(x)$ liên tục và $f(a + b - x) = f(x)$ thì:

$$I = \int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx.$$

 **Chứng minh**

Đặt $x = a + b - t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = a$ thì $t = b$.
- Với $x = b$ thì $t = a$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_b^a (a+b-t)f(a+b-t)(-dt) = \int_a^b (a+b-t)f(t)dt \\ &= \int_a^b (a+b)f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt = (a+b) \int_a^b f(t)dt - \int_a^b xf(x)dx = (a+b) \int_a^b f(t)dt - I \\ \Leftrightarrow 2I &= (a+b) \int_a^b f(t)dt \Leftrightarrow I = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

Hệ quả 1: Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thì:

$$I = \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} f(\sin x)dx.$$

Hướng dẫn chứng minh: Đặt $x = \pi - t$ thì $dx = -dt$.

Hệ quả 2: Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thì:

$$I = \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} xf(\cos x)dx = \pi \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} f(\cos x)dx.$$

Hướng dẫn chứng minh: Đặt $x = 2\pi - t$ thì $dx = -dt$.

Ví dụ 6: Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{4 - \cos^2 x}.$

b. $I = \int_0^{2\pi} x \cdot \cos^3 x dx.$

 **Giải**

Giải

a. Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{4 - (1 - \sin^2 x)} = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{3 + \sin^2 x} = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx.$$

Đặt $x = \pi - t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = \pi$ thì $t = 0$.
- Với $x = 0$ thì $t = \pi$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t) dt}{4 - \cos^2(\pi - t)} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t dt}{4 - \cos^2 t} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin t dt}{4 - \cos^2 t} - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t dt}{4 - \cos^2 t} = -\pi \int_0^{\pi} \frac{d(\cos t)}{4 - \cos^2 t} - I \\ \Leftrightarrow 2I &= -\pi \int_0^{\pi} \frac{d(\cos t)}{4 - \cos^2 t} = \pi \int_0^{\pi} \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t - 4} \\ \Leftrightarrow I &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t - 4} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\cos t - 2}{\cos t + 2} \right| \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi \ln 9}{8}. \end{aligned}$$

b. Đặt $x = 2\pi - t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 2\pi$ thì $t = 0$.
- Với $x = 0$ thì $t = 2\pi$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_{2\pi}^0 (2\pi - t) \cdot \cos^3(2\pi - t) (-dt) = \int_0^{2\pi} (2\pi - t) \cdot \cos^3 t dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt - \int_0^{2\pi} t \cos^3 t dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 3t + 3 \cos t) dt - I \\ \Leftrightarrow 2I &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{3} \sin 3t + 3 \sin t \right) \Big|_0^{2\pi} = 0 \Leftrightarrow I = 0. \end{aligned}$$

DANG 6: Nếu $f(x)$ liên tục và $f(a + b - x) = -f(x)$ thì $I = \int_a^b f(x) dx = 0$.

 *Chứng minh*

Đặt $x = a + b - t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = a$ thì $t = b$.
- Với $x = b$ thì $t = a$.

Khi đó:

$$I = \int_b^a f(a + b - t) (-dt) = - \int_a^b f(t) dt = - \int_a^b f(x) dx = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0.$$

 **Chú ý:** Nếu ta phát biểu lại tính chất 6 dưới dạng:

"Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-x)dx."$$

thì điều đó sẽ giúp chúng ta có được một phương pháp đổi biến mới.

Ví dụ 7: Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx.$

b. $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)dx.$

 **Giải**

a. Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/2}^0 \ln\left(\frac{1+\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-t)}\right)(-dt) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\cos t}{1+\sin t}\right)dt = - \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\sin t}{1+\cos t}\right)dt \\ &= - \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0. \end{aligned}$$

b. Đặt $t = \frac{\pi}{4} - x$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

- Với $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\pi/4}^0 \ln[1+\tan(\frac{\pi}{4}-t)]dt = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t})dt = \int_0^{\pi/4} \ln\frac{2}{1+\tan t}dt \\ &= \int_0^{\pi/4} [\ln 2 - \ln(1+\tan t)]dt = \ln 2 \int_0^{\pi/4} dt - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)dt = \ln 2 \cdot t \Big|_0^{\pi/4} - I \\ \Leftrightarrow 2I &= \frac{\pi \ln 2}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\pi \ln 2}{8}. \end{aligned}$$

DANG 7: Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, 2a]$ với $a > 0$ thì:

$$\int_a^{2a} f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(2a - x)] dx .$$

 *Chứng minh*

Ta có:

$$\int_a^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \underbrace{\int_a^{2a} f(x) dx}_{I_2} . \quad (1)$$

Xét tích phân I_2 bằng cách đặt $x = 2a - t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = a$ thì $t = a$.
- Với $x = 2a$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I_2 = - \int_a^0 f(2a - t) dt = \int_0^a f(2a - t) dt = \int_0^a f(2a - x) dx . \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\int_a^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(2a - x) dx = \int_0^a [f(x) + f(2a - x)] dx .$$

Ví dụ 8: Tính tích phân $I = \int_0^{3\pi} \sin x . \sin 2x . \sin 3x . \cos 5x dx$

 *Giải*

Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int_0^{3\pi/2} \sin x . \sin 2x . \sin 3x . \cos 5x dx + \underbrace{\int_{3\pi/2}^{3\pi} \sin x . \sin 2x . \sin 3x . \cos 5x dx}_J . \quad (1)$$

Xét tích phân J bằng cách đặt $x = 3\pi - t$ suy ra $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = \frac{3\pi}{2}$ thì $t = \frac{3\pi}{2}$.
- Với $x = 3\pi$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} J &= - \int_{3\pi/2}^0 \sin(3\pi - t) . \sin 2(3\pi - t) . \sin 3(3\pi - t) . \cos 5(3\pi - t) dt \\ &= - \int_0^{3\pi/2} \sin t . \sin 2t . \sin 3t . \cos 5t dt = - \int_0^{3\pi/2} \sin x . \sin 2x . \sin 3x . \cos 5x dx . \quad (2) \end{aligned}$$

Thay (2) vào (1), ta được $I = 0$.

DẠNG 8: Nếu $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ T thì:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

 **Chứng minh**

Ta có:

$$\int_0^T f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{a+T} f(x)dx + \underbrace{\int_{a+T}^T f(x)dx}_{I_3}. \quad (1)$$

Xét tích phân I_3 bằng cách đặt $t = x - T$ suy ra $dx = dt$.

Đổi cận:

- Với $x = a + T$ thì $t = a$.
- Với $x = T$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I_3 = \int_a^0 f(t+T)dt = -\int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(x)dx. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx.$$

Ví dụ 9: Tính tích phân $I = \int_0^{2004\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$.

 **Giải**

Viết lại I dưới dạng:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2} \int_0^{2004\pi} |\sin x| dx \\ &= \sqrt{2} \left(\int_0^{2\pi} |\sin x| dx + \int_{2\pi}^{4\pi} |\sin x| dx + \dots + \int_{2002\pi}^{2004\pi} |\sin x| dx \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Theo tính chất 8, ta được:

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_{2\pi}^{4\pi} |\sin x| dx = \dots = \int_{2002\pi}^{2004\pi} |\sin x| dx.$$

Vậy, ta được:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow I = 1002 \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 1002 \left(\int_0^{2\pi} |\sin x| dx - \int_0^{\pi} \sin x dx \right) \\ &= 1002 \sqrt{2} \left(-\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = 4008 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

 **Nhận xét:** Như vậy nếu bài thi yêu cầu tính tích phân dạng trên thì các em học sinh nhất thiết phải phát biểu và chứng minh được tính chất 8, từ đó áp dụng cho tích phân cần tìm.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^2 x(2x^2 + 1)dx$.

b. $\int_0^1 (1 + 3x)(1 + 2x + 3x^2)^{10} dx$.

c. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 + x^3} dx$.

d. $\int_2^3 (x - 1)e^{x^2 - 2x} dx$.

Bài tập 2: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^1 x(1 - x)^{19} dx$.

b. $\int_0^1 \frac{x^5}{x^2 + 1} dx$.

c. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$.

d. $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1 + x^2}}$.

Bài tập 3: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^1 x\sqrt{1 - x} dx$.

b. $\int_{-1/2}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$.

c. $\int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)^3} dx$.

d. $\int_0^1 x\sqrt{1 + x^2} dx$.

Bài tập 4: Tính các tích phân sau:

a. $\int_2^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2 - 4} dx}{x^3}$.

b. $\int_1^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

c. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{9 + 3x^2} dx}{x^2}$.

d. $\int_0^2 \frac{x + 1}{\sqrt[3]{3x + 2}} dx$.

Bài tập 5: Tính các tích phân sau:

a. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6}$.

b. $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x dx}{\cos x + 2}$.

Bài tập 6: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\pi/4} x \cos 2x dx$.

b. $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos^2 x dx$.

c. $\int_0^{\pi/2} (x^2 + 1) \sin x dx$.

d. $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin 2x dx$.

Bài tập 7: Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^e e^x \sin^2(\pi x) dx$.

b. $\int_0^{\pi/4} 5e^x \sin 2x dx$.

c. $\int_0^{\pi/2} e^x \cos^2 x dx$.

d. $\int_1^e x^2 \cdot \ln x dx$.

Bài tập 8: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} dx.$

b. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{11 - 7 \sin x - \cos^2 x} dx.$

c. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x} \cot x dx.$

d. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{9 + 4 \cos^2 x} dx.$

Bài tập 9: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$

b. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + e^x}.$

c. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx.$

d. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 3e^x + 3} dx.$

Bài tập 10: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 4x^2 + 3}.$

b. $\int_{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}}^1 \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx.$

c. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{x^2 - x - 2}.$

d. $\int_0^3 \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} dx.$

Bài tập 11: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1} dx.$

b. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}.$

Bài tập 12: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 1}} dx.$

c. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5 + 2x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$

b. $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1 + x^2}} dx.$

d. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x + 1}} dx.$

Bài tập 13: Tính các tích phân sau:

a. $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x}.$

b. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1 + \cos x}.$

Bài tập 14: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3 + \sin 2x}} dx.$

c. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx.$

b. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx.$

d. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}.$

Bài tập 15: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x(1 + \sin^2 x)^3 dx$.

b. $\int_0^{\pi/2} \cos 2x(\cos^4 x + \sin^4 x) dx$.

Bài tập 16: (ĐHMĐC – 2000): Tính tích phân: $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2} dx$.

Bài tập 17: (ĐH XD HN – 2000): Chứng minh rằng với m, n khác nhau thuộc $\mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = 0.$$

Bài tập 18: (ĐH Thái Nguyên Khối A, B – 2000): Chứng minh rằng:

$$\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = 0.$$

Bài tập 19: (ĐHGT TPHCM – 1999):

a. Chứng minh rằng $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$

b. Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$.

Bài tập 20: (ĐHQG TPHCM Khối A – 1998):

a. Tính các tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{1 + \sin^4 x}$ và $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{1 + \cos^4 x}$

b. Chứng minh rằng $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \cdot \sin x}{(1 + \sin^4 x)(1 + \cos^4 x)} dx > \frac{\pi}{12}$.

Bài tập 21: (ĐHSP TPHCM – 1995): Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$.

a. Tìm A, B sao cho $f(x) = A + B \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right)$.

b. Tính $I = \int_0^{\pi/3} f(x) dx$.

Bài tập 22: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin 2x}.$

b. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x (1 + \cos x)^2 dx.$

c. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}.$

d. $\int_0^{\pi/4} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos^4 x} dx.$

Bài tập 23: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{1 + \cos x} dx.$

b. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx.$

c. $\int_0^{\pi/4} \sin^4 x dx.$

d. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx.$

Bài tập 24: Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^e \frac{\sqrt{2 + \ln x}}{2x} dx.$

b. $\int_0^1 \frac{1}{4 - x^2} \cdot \ln \frac{2 + x}{2 - x} dx.$

c. $\int_0^1 \frac{(1 + e^x)^2}{e^x} dx.$

d. $\int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$

Bài tập 25: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx.$

b. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx.$

c. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$

d. $\int_0^e \frac{(1 + e^x)^2}{1 + e^{2x}} dx.$

Bài tập 26: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^2 x \cdot e^{2x} dx.$

b. $\int_0^2 x \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx.$

c. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}.$

d. $\int_1^e \frac{\ln x \cdot \sqrt[3]{2 + \ln^2 x}}{x} dx.$

Bài tập 27: Tính các tích phân sau:

a. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3^x + 1} dx.$

b. $\int_{-1}^1 \frac{x^4 + \sin x}{x^2 + 1} dx.$

c. $\int_{-1}^1 \frac{x^4}{1 + 2^x} dx.$

d. $\int_{-1}^1 \frac{\cos x dx}{e^x + 1}.$

Bài tập 28: Tính các tích phân sau:

a. $\int_{-1}^1 (e^{x^2} \sin x + e^2 \cdot x^2) dx.$

b. $\int_{-1}^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx.$

Bài tập 29: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn:

- Liên tục trên $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ luôn có $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$.

Hãy xác định $I = \int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} f(x) dx$.

Bài tập 30: (ĐHGT TPHCM – 1999): Cho tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$.

- a. Chứng minh rằng $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$.
- b. Tính I .

Bài tập 31: Cho tích phân $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$.

- a. Chứng minh rằng $I = \int_0^{\pi/4} \ln \frac{2}{1 + \tan x} dx$.
- b. Tính I .

Bài tập 32: (ĐHKTQD HN – 1995): Tính $I = \int_{-2}^2 \left[\ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) \right]^5 dx$

Bài tập 33: (ĐH Huế – 1997): Cho hàm số:

$$g(x) = \begin{cases} f(\tan x) & \text{nếu } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ f(0) & \text{nếu } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- a. Chứng minh rằng $g(x)$ liên tục trên $[0; \frac{\pi}{2}]$.
- b. Chứng minh rằng $\int_0^{\pi/4} g(x) dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} g(x) dx$.

Bài tập 34: (ĐHBK HN – 1999): Cho hàm số $g(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 5x$.

- a. Tìm họ nguyên hàm của $g(x)$
- b. Tính $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{g(x)}{e^x + 1} dx$.

CHỦ ĐỀ 5 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. DIỆN TÍCH CỦA HÌNH TRÒN VÀ CỦA HÌNH ELÍP

a. Hình tròn bán kính R có diện tích $S = \pi R^2$.

b. Hình elíp (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có diện tích $S = \pi ab$.

2. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG

a. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ ($f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$), trục Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được cho bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

b. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = a$, $x = b$, và đồ thị của hai hàm số $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ ($f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$) được cho bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG DẠNG 1

Với yêu cầu:

" Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ (liên tục trên đoạn $[a; b]$), trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ và trục Ox "

ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (1)$$

Bước 2: Xét dấu biểu thức $f(x)$ trên $[a, b]$.

Từ đó phân được đoạn $[a, b]$ thành các đoạn nhỏ, giả sử:

$$[a, b] = [a, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup \dots \cup [c_k, b].$$

mà trên mỗi đoạn $f(x)$ chỉ có một dấu.

Bước 3: Khi đó:

$$S = \int_a^{c_1} |f(x)| dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x)| dx + \dots + \int_{c_k}^b |f(x)| dx. \quad (2)$$

Chú ý: Nếu bài toán phát biểu dưới dạng:

" Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = f(y)$ (liên tục trên đoạn $[a, b]$), hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ và trục Oy "

khi đó công thức tính diện tích là:

$$S = \int_a^b |f(y)| dy.$$

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

- (Bài 26/Tr 167 – Sgk): Đồ thị hàm số $y = \sin x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = \frac{7\pi}{6}$.
- (Bài 27.a/Tr 167 – Sgk): Đồ thị hàm số $y = \cos^2 x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \pi$.

Giải

a. Ta có:

$$S = \int_0^{7\pi/6} |\sin x + 1| dx = \int_0^{7\pi/6} (\sin x + 1) dx = (-\cos x + x) \Big|_0^{7\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7\pi}{6} + 1.$$

b. Ta có:

$$S = \int_0^{\pi} |\cos^2 x| dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 2: (ĐHTM – 1999): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$x = -1; x = 2; y = 0; y = x^2 - 2x.$$

Giải

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

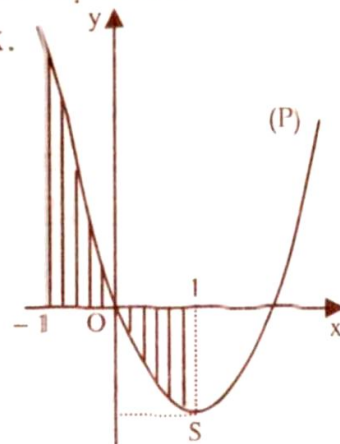
$$S = \int_{-1}^2 |x^2 - 2x| dx$$

Ta đi xét dấu hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ trên $[-1; 2]$, được:

x	-1	0	2
y'		+	-

Khi đó:

$$S = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left(x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \text{ (đvdt)}$$



Ví dụ 3: (ĐH Huế – 1999): Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi:

$$x = 1; x = e; y = 0; y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}.$$

 **Giải**

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_1^e \left| \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right| dx. \quad (1)$$

Bởi $x \in [1; e] \Rightarrow \ln x \geq 0 \Rightarrow \left| \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right| = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, do đó:

$$S = \int_1^e \frac{\ln x dx}{2\sqrt{x}}. \quad (2)$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \sqrt{x} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$S = \sqrt{x} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{\sqrt{x}}{x} dx = (\sqrt{x} \ln x - 2\sqrt{x}) \Big|_1^e = 2 - \sqrt{e} \quad (\text{đvdt})$$

Vấn đề 2: TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG DẠNG 2

Với yêu cầu:

"*Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ (liên tục trên đoạn $[a; b]$), hai đường thẳng $x = a$, $x = b$* "

ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (1)$$

Bước 2: Xét dấu biểu thức $f(x) - g(x)$ trên $[a; b]$.

Từ đó phân được đoạn $[a; b]$ thành các đoạn nhỏ, giả sử:

$$[a; b] = [a; c_1] \cup [c_1; c_2] \cup \dots \cup [c_k; b].$$

mà trên mỗi đoạn $f(x) - g(x)$ chỉ có một dấu.

Bước 3: Khi đó:

$$S = I = \int_a^{c_1} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{c_k}^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (2)$$

 **Chú ý:** Nếu bài toán phát biểu dưới dạng:

"*Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $x = f_1(y)$ và $x = f_2(y)$ (liên tục trên đoạn $[a; b]$), hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ và trục Oy* "

khi đó công thức tính diện tích là:

$$S = \int_a^b |f_1(y) - f_2(y)| dy.$$

Ví dụ 1: (Bài 28.a và 28.c/Tr 167 – Sgk): Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi:

- Đồ thị các hàm số $y = x^2 - 4$, $y = -x^2 - 2x$ và hai đường thẳng $x = -3$, $x = -2$.
- Đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và đường thẳng $x = 4$.

 **Giải**

a. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 4 = -x^2 - 2x \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{-2} |x^2 - 4 - (-x^2 - 2x)| dx = \int_{-3}^{-2} |2x^2 + 2x - 4| dx = 2 \int_{-3}^{-2} (x^2 + x - 2) dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 2x \right) \Big|_{-3}^{-2} = \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

b. Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục Oxlà nghiệm của phương trình:

$$x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Xét dấu $x^3 - 4x$ trên $[-2; 4]$, được:

x	-2	0	2	4
$x^3 - 4x$	+	0	-	+

Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 |x^3 - 4x| dx = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 |x^3 - 4x| dx + \int_2^4 |x^3 - 4x| dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx - \int_0^2 (x^3 - 4x) dx + \int_2^4 (x^3 - 4x) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 - \left(\frac{x^4}{4} - x^2 \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^4}{4} - x^2 \right) \Big|_2^4 = 44. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: (Bài 27.b và 27.c/Tr 167 – Sgk): Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi:

- Đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = \sqrt[3]{x}$.
- Đồ thị các hàm số $y = 2x^2$ và $y = x^4 - 2x^2$ trong miền $x \geq 0$.

 **Giải**

a. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$$\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x^3 = x^2 \Leftrightarrow x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$S = \int_0^1 |\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}| dx = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}) dx = \left(\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

b. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$$2x^2 = x^4 - 2x^2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases} \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |2x^2 - (x^4 - 2x^2)| dx = \int_0^2 |4x^2 - x^4| dx = \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx \\ &= \left(\frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^2 = \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: (HVKTQS – 2000): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = \frac{1}{\sin^2 x}; y = \frac{1}{\cos^2 x}; x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{3}.$$

 **Giải**

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left| \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right| dx$$

Ta biết rằng:

- Với $\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \sin x < \cos x \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$
- Với $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow 0 < \cos x < \sin x \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} < 0.$

Do đó:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= (-\cot x - \tan x) \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} + (\cot x + \tan x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{8}{\sqrt{3}} - 4 \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

 **Chú ý:** Nhiều bài toán thuộc dạng trên được phát biểu: " Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = f(x), y = g(x) \text{ \& } x = a."$$

Khi đó cần còn lại được tìm thấy từ việc giải phương trình $f(x) - g(x) = 0$. Cụ thể ta xem xét các ví dụ sau:

Ví dụ 4: (HVBCVT – 1999): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = 2^x ; y = 3 - x ; x = 0.$$

 **Giải**

Hoành độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình:

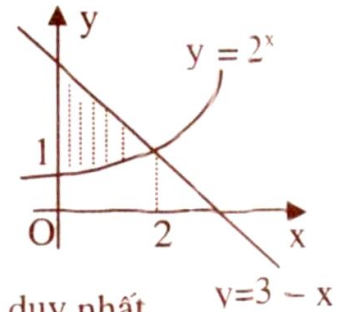
$$2^x = 3 - x.$$

- Vế phải của phương trình là một hàm nghịch biến.
- Vế trái của phương trình là một hàm nghịch biến.
- Do vậy, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.
- Nhận xét rằng $x = 1$ là nghiệm của phương trình vì $2^1 = 3 - 1$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_0^1 (3 - x - 2^x) dx = \left(3x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2^x}{\ln 2} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{2} - \frac{2}{\ln 2} \text{ (đvdt)}.$$



 **Chú ý:** Trong bài toán trên sở dĩ ta có ngay $S = \int_0^1 (3 - x - 2^x) dx$ là bởi đồ thị

của $y = 3 - x$ ở phía trên đồ thị của $y = 2^x$ trên đoạn $[0; 2]$.

Như vậy trong nhiều bài toán nếu mô tả được hình vẽ ta có thể xác định ngay được dấu.

Vấn đề 3: TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG DẠNG 3

Với yêu cầu:

"Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của ba hàm số
 $y = f(x)$, $y = g(x)$ và $y = h(x)$ "

ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giải các phương trình:

$$f(x) - g(x) = 0 \text{ và } f(x) - h(x) = 0 \text{ hoặc } g(x) - h(x) = 0.$$

Bước 2: Thiết lập công thức diện tích.

Ví dụ 1: (ĐHHH TPHCM – 1999): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = x^2 - 2x ; y = -x^2 + 4x.$$

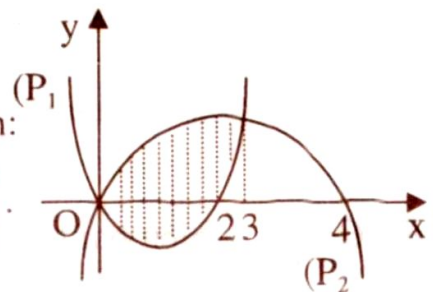
 **Giải**

Hoành độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_0^3 (-x^2 + 4x - x^2 + 2x) dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right) \Big|_0^3 = 9 \text{ (đvdt)}.$$



 **Chú ý:** Nếu các em học sinh thấy khó khăn trong việc vẽ hình thì chỉ còn cách xét dấu biểu thức dưới dấu tích phân, tuy nhiên trong nhiều trường hợp đó là vấn đề rất đơn giản.
Ngoài ra như đã chú ý sau bài toán 1, đôi khi ta cần tính tích phân theo dy.

Ví dụ 2: (ĐH XD – 1995): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y^2 - 2y + x = 0 \quad \text{và} \quad x + y = 0.$$

 **Giải**

Tung độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình

$$y^2 - 2y = y \Leftrightarrow y^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_0^3 -y^2 + 2y + y \, dy = \int_0^3 -y^2 + 3y \, dx = \int_0^3 (-y^2 + 3y) \, dx = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2 \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Ví dụ 3: (Bài 52.b/Tr 177 – Sgk): Tính diện tích của các hình phẳng giới hạn bởi:

- Parabol $y = x^2 - 2x + 2$, tiếp tuyến với nó tại điểm $M(3; 5)$ và trục tung.
- Parabol $y = -x^2 + 4x - 3$ và các tiếp tuyến với nó tại các điểm $A(0; -3)$ và $B(3; 0)$.

 **Giải** – Bạn đọc cần phác thảo hình vẽ

- Ta có đạo hàm:

$$y' = 2x - 2.$$

Phương trình tiếp tuyến của Parabol tại điểm M có dạng:

$$(d): y = y'(3)(x - 3) + 5 \Leftrightarrow (d): y = (2 \cdot 3 - 2)(x - 3) + 5 \Leftrightarrow (d): y = 4x - 7.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left[(x^2 - 2x + 2) - (4x - 7) \right] dx = \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) dx \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right) \Big|_0^3 = 9. \end{aligned}$$

- Ta có đạo hàm:

$$y' = -2x + 4.$$

Ta lần lượt có:

- Phương trình tiếp tuyến của Parabol tại điểm A có dạng:

$$(d_A): y = y'(0) \cdot x - 3 \Leftrightarrow (d_A): y = 4x - 3.$$

- Phương trình tiếp tuyến của Parabol tại điểm B có dạng:
 $(d_B): y = y'(3)(x - 3) \Leftrightarrow (d_B): y = -2(x - 3) = -2x + 6.$
- Hoành độ giao điểm của (d_A) và (d_B) là nghiệm của phương trình:
 $4x - 3 = -2x + 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và hai tiếp tuyến được cho bởi:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= \int_0^{3/2} (4x - 3 + x^2 - 4x + 3)dx + \int_{3/2}^3 (-2x + 6 + x^2 - 4x + 3)dx \\ &= \int_0^{3/2} x^2 dx + \int_{3/2}^3 (x^2 - 6x + 9)dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{3/2} + \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right) \Big|_{3/2}^3 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

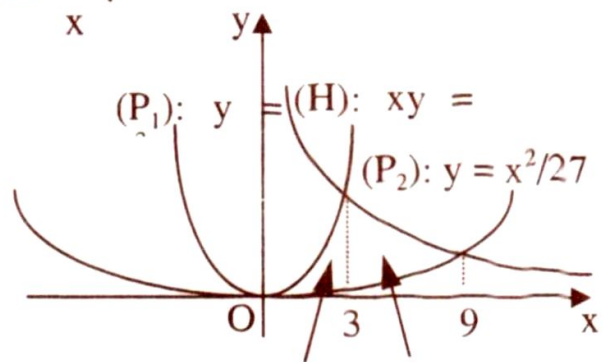
Ví dụ 4: (ĐHMCĐC – 1998): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = x^2; y = \frac{x^2}{27}; y = \frac{27}{x}.$$

 **Giải**

Hoành độ các giao điểm là nghiệm của:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^2 &= \frac{x^2}{27} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \\ \bullet \quad \frac{x^2}{27} &= \frac{27}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 9 \end{cases} \end{aligned}$$



Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{27} \right) dx + \int_3^9 \left(\frac{27}{x} - \frac{x^2}{27} \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{81}x^3 \right) \Big|_0^3 + \left(27 \ln x - \frac{1}{81}x^3 \right) \Big|_3^9 = 27 \ln 3 \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

 **Chú ý:** Với bài toán trên việc có được đồ thị các hàm số là rất cần thiết, bởi chỉ có như vậy chúng ta mới có thể xác định được một cách chính xác hình phẳng cần tính diện tích.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

- $y = \sin^2 x \cos^3 x; y = 0$ và $x = 0; x = \frac{\pi}{2}.$
- $y^2 - 4x = 4$ và $4x - y = 16.$
- $x + 4y^2 = 4, x + y^4 = 1.$
- (ĐHTL – 1999): $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ và $y = |x|$

Bài tập 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

- (ĐHBK – 2000): $y = \sin^2 x \cos^3 x$; $y = 0$ và $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$.
- (ĐHTCKT – 2000): $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$.
- (HVBCVT – 2000): $y = |1 - 2\sin^2 \frac{3x}{2}|$; $y = 1 + \frac{12x}{\pi}$; $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Bài tập 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

- (HVBCVT – 1997): $y = -x^2 + 2x$; $y = -3x$.
- (ĐHTM – 1996): $y = x^2$; $x = -y^2$.
- (ĐHKT – 1994): $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = 3 - x$.
- (ĐHCD – 1999): $y = x^2$; $y = \frac{x^2}{8}$; $y = \frac{8}{x}$.

Bài tập 4: Tính tỉ số diện tích mà Parabol (P): $y^2 = 2px$ ($p > 0$) chia đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 8p^2$.

Bài tập 5: Chứng minh rằng tổng diện tích của hai Elíp:

$$(E_1): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (E_2): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} = 1 \quad (a > b)$$

bằng diện tích của đường tròn (C) bán kính bằng a.

Bài tập 6: Tính diện tích phần chung của hai Elíp

$$(E_1): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ và } (E_2): \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Bài tập 7: (ĐHLN = 1998): Cho hàm số (C): $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + m}$.

- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với $m = 1$.
- Với $m = 1$, tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $x = 0$; $x = 1$, $y = 0$ và (C).

Bài tập 8: (ĐHBK – 1993): Cho hàm số (C): $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.
- Tìm b sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và các đường thẳng $y = 1$, $x = 0$, $x = b$ bằng $\frac{\pi}{4}$.

Bài tập 9: (ĐHKT - 2000): Cho hàm số (C): $y = f(x) = \frac{4x}{x^4 + 1}$.

- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), Ox và hai đường thẳng $x = \pm 1$.

CHỦ ĐỀ 6 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

1. THỂ TÍCH CỦA VẬT THỂ

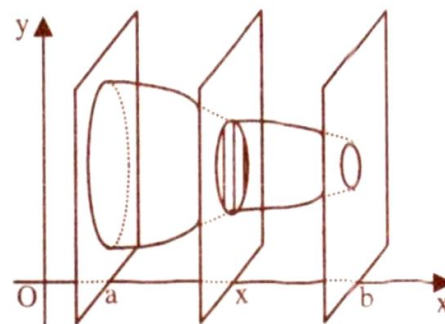
Giả sử vật thể T được giới hạn bởi hai mặt phẳng song song (α) , (β) .

Ta chọn trục Ox sao cho:

$$\begin{cases} Ox \perp (\alpha) \text{ và giả sử } Ox \cap (\alpha) = a \\ Ox \perp (\beta) \text{ và giả sử } Ox \cap (\beta) = b \end{cases}$$

Giả sử mặt phẳng $(\gamma) \perp Ox$ và $(\gamma) \cap Ox = x$ ($a \leq x \leq b$) cắt T theo một thiết diện có diện tích $S(x)$ (là hàm số liên tục theo biến x). Khi đó, thể tích V của vật thể T được cho bởi công thức:

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$



2. THỂ TÍCH CỦA VẬT THỂ TRÒN XOAY

- a. Thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ quay quanh trục Ox được cho bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

- b. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $x = f(y)$, $y = a$, $y = b$, $x = 0$, quay quanh trục Oy được cho bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_a^b f^2(y) dy.$$

3. THỂ TÍCH KHỐI NÓN VÀ KHỐI CHÓP, KHỐI NÓN CỤT VÀ KHỐI CẦU

- a. Thể tích khối nón (khối chóp) có diện tích đáy bằng B và chiều cao h được

cho bởi $V = \frac{1}{3} Bh$.

- b. Thể tích khối nón cụt (khối chóp cụt) có diện tích hai đáy là B_1 , B_2 và chiều cao h được cho bởi:

$$V = \frac{1}{3} (B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 \cdot B_2}) h.$$

- c. Thể tích của khối cầu có bán kính R được cho bởi:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

Sử dụng kiến thức trong phần "*Công thức tính thể tích*" và hãy hiểu cần thực hiện theo hai bước.

Ví dụ 1: (Bài 29/tr 172 – Sgk): *Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) là một hình vuông cạnh $2\sqrt{1-x^2}$.*

 *Giải*

Diện tích thiết diện $S(x)$ được cho bởi:

$$S(x) = \left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2 = 4(1-x^2).$$

Khi đó, thể tích vật thể được cho bởi:

$$V = \int_{-1}^1 S(x)dx = 4 \int_{-1}^1 (1-x^2)dx = 4 \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{16}{3}.$$

Ví dụ 2: (Bài 30/tr 172 – Sgk): *Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.*

 *Giải*

Diện tích thiết diện $S(x)$ được cho bởi:

$$S(x) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \sin x.$$

Khi đó, thể tích vật thể được cho bởi:

$$V = \int_0^\pi S(x)dx = \sqrt{3} \int_0^\pi \sin x \cdot dx = -\sqrt{3} \cos x \Big|_0^\pi = 2\sqrt{3}.$$

Ví dụ 3: *Tính thể tích vật thể đỉnh S , chiều cao h , đáy là một viên phân Parabol có đáy bằng chiều cao và bằng $2a$.*

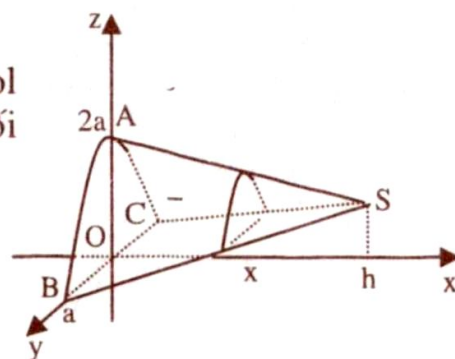
 *Giải*

Chọn hệ trục tọa độ sao cho viên phân Parabol đáy ở trong mặt phẳng Oyz nhận Oz làm trục đối xứng và đáy của viên phân thuộc trục Oy , khi đó:

- Phương trình Parabol đáy (ABC) được cho bởi:

$$z = my^2 + 2a$$

Mặt khác: $y = \pm a; z = 0 \Rightarrow m = -\frac{2}{a}$



Vậy phương trình Parabol đáy (ABC): $z = -\frac{2}{a}y^2 + 2a$

- Diện tích đáy được cho bởi:

$$B = \int_{-a}^a \left(-\frac{2}{a}y^2 + 2a\right)dy = \left(-\frac{2}{3a}y^3 + 2ay\right)\Big|_{-a}^a = \frac{8a^2}{3}.$$

- Diện tích thiết diện được cho bởi:

$$\frac{S(x)}{B} = \left(\frac{h-x}{h}\right)^2 \Leftrightarrow S(x) = \frac{8a^2}{3h^2} \cdot (h-x)^2.$$

- Thể tích vật thể được cho bởi:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{8a^2}{3h^2} \int_0^h (h-x)^2 dx = \frac{8a^2}{9h^2} (h-x)^3 \Big|_0^h = \frac{8a^2h}{9}.$$

Vấn đề 2: TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY DẠNG 1

Ta có hai dạng sau:

Dạng 1: Với yêu cầu " *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ quay quanh trục Ox* " ta áp dụng công thức:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Dạng 2: Với yêu cầu " *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $x = f(y)$, $y = a$, $y = b$, $x = 0$, quay quanh trục Oy* " ta áp dụng công thức:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_a^b f^2(y) dy.$$

Ví dụ 1: (Bài 31/tr 172 – Sgk): Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = 0$, $x = 4$ và $y = \sqrt{x} - 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

 **Giải**

Điều kiện:

$$\sqrt{x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Khi đó, thể tích vật thể được cho bởi:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 y^2 dx = \pi \int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 dx = \pi \int_1^4 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x \right) \Big|_1^4 = \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: (ĐH XD – 1997): Tính thể tích vật tròn xoay do hình phẳng $S = \{y = x \ln x; y = 0; x = 1; x = e\}$ quay quanh Ox .

 *Giải*

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_1^e (x \ln x)^2 dx$.

Để tính tích phân trên ta sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{x} \ln x dx \\ v = \frac{1}{3} x^3 \end{cases}$$

Khi đó:

$$V = \pi \left(\frac{1}{3} x^3 \ln^2 x \right) \Big|_1^e - \frac{2\pi}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{\pi e^3}{3} - \frac{2\pi}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx. \quad (1)$$

Xét tích phân $I = \int_1^e x^2 \ln x dx$, đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{1}{3} x^3 \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3} x^3 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9} x^3 \Big|_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $V = \frac{\pi}{27} (5e^3 - 3)$ (đvtt).

- Ví dụ 3:**
- (Bài 32/tr 172 – Sgk): Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $x = \frac{2}{y}$, $y = 1$ và $y = 4$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục tung.
 - (Bài 56/tr 177 – Sgk): Cho hình phẳng B giới hạn bởi đường cong có phương trình $x(y + 1) = 2$ và các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo được khi quay B quanh trục tung.

 *Giải*

a. Ta có ngay:

$$V = \pi \int_1^4 x^2 dy = 4\pi \int_1^4 \frac{dy}{y^2} = -\frac{4\pi}{y} \Big|_1^4 = 3\pi.$$

b. Viết lại hàm số dưới dạng $x = \frac{2}{y+1}$, khi đó:

$$V = \pi \int_0^3 x^2 dy = 4\pi \int_0^3 \frac{dy}{(y+1)^2} = -\frac{4\pi}{y+1} \Big|_0^3 = -4\pi \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = 3\pi.$$

Vấn đề 3: TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY DẠNG 2

Ta có hai dạng sau:

Dạng 1: Với yêu cầu " *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox*" ta áp dụng công thức:

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$

Dạng 2: Với yêu cầu " *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = a$, $y = b$ quay quanh trục Oy*" ta áp dụng công thức:

$$V = \pi \int_a^b |f^2(y) - g^2(y)| dy.$$

Ví dụ 1: (ĐHQG HN – 1999): *Tính thể tích khi S quay quanh Ox, biết:*

$$S = \{y = x^2 - 4x + 6, y = -x^2 - 2x + 6\}.$$

 *Giải*

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 4x + 6 = -x^2 - 2x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Thể tích vật tròn xoay cần tính là:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left| (x^2 - 4x + 6)^2 - (-x^2 - 2x + 6)^2 \right| dx = \pi \int_0^1 (12x^3 - 36x^2 + 24x) dx \\ &= \pi \left(3x^4 - 12x^3 + 12x^2 \right) \Big|_0^1 = 3\pi \text{ (đvtt)}. \end{aligned}$$

Vấn đề 4: TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY DẠNG 3

Với yêu cầu " *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi một đường (C) kín*" ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Khi quay quanh Ox, ta thực hiện hai bước sau:

Bước 1: Phân đường cong kín (C) thành hai cung

$$(C_1): y = f_1(x) = y_1 \text{ và } (C_2): y = f_2(x) = y_2$$

với $a \leq x \leq b$ và $f_1(x)$, $f_2(x)$ cùng dấu.

Bước 2: Thể tích cần xác định được cho bởi:

$$V = \pi \int_a^b |y_1^2 - y_2^2| dx.$$

Trường hợp 2: Khi quay quanh Oy, ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1: Phân đường cong kín (C) thành hai cung

$$(C_1): x = f_1(y) = x_1 \text{ và } (C_2): x = f_2(y) = x_2$$

với $a \leq y \leq b$ và $f_1(y), f_2(y)$ cùng dấu.

Bước 2: Thể tích cần xác định được cho bởi:

$$V = \pi \int_a^b |x_1^2 - x_2^2| dy.$$

Ví dụ 1: (ĐH XD – 1994): Tính thể tích hình xuyên do quay hình tròn (C) có phương trình $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ khi quay trục Ox.

 **Giải**

Xét (C): $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ có tâm I(0,2), bán kính R = 1.

Vậy, ta có:

- Nửa (C) ở trên ứng với $2 \leq y \leq 4$ có phương trình:

$$y = f_1(x) = 2 + \sqrt{1 - x^2} \text{ với } x \in [-1, 1]$$

- Nửa (C) ở dưới ứng với $0 \leq y \leq 2$ có phương trình:

$$y = f_2(x) = 2 - \sqrt{1 - x^2} \text{ với } x \in [-1, 1].$$

Khi đó thể tích vật thể tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left[\left(2 + \sqrt{1 - x^2} \right)^2 - \left(2 - \sqrt{1 - x^2} \right)^2 \right] dx = 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

Thực hiện phép đổi biến $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$.

Đổi cận:

- Với $x = -1$ thì $t = -\frac{\pi}{2}$.

- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó:

$$V = 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = 4\pi \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi^2.$$

Ví dụ 2: Gọi (d) là đường thẳng qua M(1; 1) với hệ số góc $k < 0$. Giả sử (d) cắt Ox, Oy tại A và b.

- Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi ΔOAB khi quay trục Ox. Xác định k để khối tròn xoay đó có thể tích nhỏ nhất.
- Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi ΔOAB khi quay trục Oy. Xác định k để khối tròn xoay đó có thể tích nhỏ nhất.

 Giải

Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

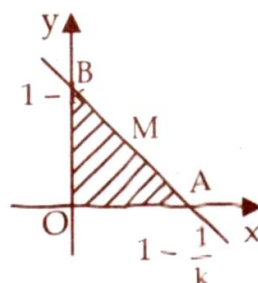
$$(d): y = k(x - 1) + 1.$$

Vì $(d) \cap Ox = \{A\}$, tọa độ A là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = k(x - 1) + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{k-1}{k}, 0\right)$$

Vì $(d) \cap Oy = \{B\}$, tọa độ B là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = k(x - 1) + 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0, 1 - k)$$



a. Gọi V_{Ox} là thể tích sinh bởi ΔOAB khi quanh trục Ox , để xác định V_{Ox} ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng hệ quả của bài toán 1, ta được:

$$V_{Ox} = \frac{1}{3} \pi (1 - k)^2 \cdot \frac{k-1}{k} = \frac{\pi}{3} \left(k^2 - 3k + 3 - \frac{1}{k}\right).$$

Cách 2: Sử dụng bài toán 2, ta được:

$$V_{Ox} = \pi \int_0^{\frac{k-1}{k}} y^2 dx = \int_0^{\frac{k-1}{k}} [k(x-1)+1]^2 dx = \frac{\pi}{3} \left(k^2 - 3k + 3 - \frac{1}{k}\right).$$

- Xác định $\text{Min} V_{Ox}$: Xét hàm số $f(k) = k^2 - 3k + 3 - \frac{1}{k}$ với $k < 0$.

Đạo hàm:

$$f'(k) = 2k - 3 + \frac{1}{k^2}; \quad f'(k) = 0 \Leftrightarrow 2k - 3 + \frac{1}{k^2} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \quad (k < 0).$$

Bảng biến thiên

k	0	- 1/2	+ ∞		
f'(k)	0	-	0	+	
f(k)	+∞	↘	27/4	↗	+ ∞

Vậy $\text{Min} V_{Ox} = \frac{9\pi}{4}$, đạt được khi $k = -\frac{1}{2}$.

b. Gọi V_{Oy} là thể tích sinh bởi ΔOAB khi quanh trục Oy , để xác định V_{Oy} ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng hệ quả của bài toán 1, ta được:

$$V_{Oy} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \cdot (1 - k) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{3}{k} - k + 3\right).$$

Cách 2: Sử dụng bài toán 2, ta được:

$$V_{Ox} = \pi \int_0^{1-k} x^2 dy = \int_0^{\frac{k-1}{k}} \left[\frac{1}{k}(y-1) + 1 \right]^2 dy = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{3}{k} - k + 3 \right).$$

- Xác định $\text{Min} V_{Oy}$: Xét hàm số $g(k) = \frac{1}{k^2} - \frac{3}{k} - k + 3$ với $k < 0$.

Đạo hàm:

$$g'(k) = -\frac{2}{k^3} + \frac{3}{k^2} - 1; \quad g'(k) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{k^3} + \frac{3}{k^2} - 1 = 0 \stackrel{k < 0}{\Leftrightarrow} k = -2.$$

Bảng biến thiên

k	0	-2	$+\infty$
$g'(k)$	0	-	0
$g(k)$	$+\infty$	$\nearrow 27/4$	$\searrow +\infty$

Vậy $\text{Min} V_{Oy} = \frac{9\pi}{4}$, đạt được khi $k = -2$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Tính thể tích vật thể đỉnh S, đáy là một Elíp có nửa độ dài hai trục bằng a, b, chiều cao h.

Bài tập 2: Tính thể tích phần hình trụ bán kính đáy R, giới hạn bởi đáy với phần phía dưới của hai mặt phẳng (P) và (Q), biết:

- Mặt phẳng (P) đi qua một đường kính của đáy hợp với đáy một góc α với

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

- Mặt phẳng (Q) cắt hình trụ, song song và cách đáy một khoảng bằng $h < R \cdot \tan \alpha$.

Bài tập 3: Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh Ox của hình giới hạn bởi trục Ox và Parabol (P) $y = x^2 - ax$ ($a > 0$).

Bài tập 4: Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh

Oy của hình giới hạn bởi Parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2$, $y = 4$ và trục Oy.

Bài tập 5: Cho hình phẳng A được giới hạn bởi đường cong có phương trình

$y = x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay A quanh trục hoành.

Bài tập 6: Cho hình phẳng A được giới hạn bởi đường cong có phương trình $x - y^2 = 0$ và các điểm $y = 2, x = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay A.

a. Quanh trục hoành.

b. Quanh trục tung.

Bài tập 7: (ĐHTS TPHCM – 2000): Cho hình phẳng G giới hạn bởi $y = 4 - x^2$; $y = x^2 + 2$. Quay hình phẳng (G) quanh Ox ta được một vật thể. Tính thể tích vật thể này.

Bài tập 8: (HVQY – 1997): Cho hình phẳng giới hạn bởi $D = \{y = x^2; y = \sqrt{x}\}$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi D quay quanh trục Ox.

Bài tập 9: (ĐHNN I – 197): Cho hình phẳng giới hạn bởi:

$$D = \{y = \tan x; x = 0; x = \frac{\pi}{3}; y = 0\}.$$

a. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi D.

b. Tính thể tích vật tròn xoay khi D quay quanh Ox

Bài tập 10: (HVKTQS – 1995): Tính thể tích do D quay quanh trục Ox

$$D = \{y = 0; y = \sqrt{1 + \cos^4 x + \sin^4 x}; x = \frac{\pi}{2}; x = \pi\}.$$

Bài tập 11: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi ta quay quanh trục Ox hình phẳng S giới hạn bởi các đường: $y = xe^x, x = 1, y = 0 (0 \leq x \leq 1)$

Bài tập 12: (ĐH XD – 1998): Tính thể tích vật thể tạo bởi hình (E): $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1$ quay quanh trục Oy.

Bài tập 13: (ĐHNN I – 1999): Cho hình phẳng giới hạn bởi $D = \{y = \frac{1}{x^2 + 1}; y = \frac{x^2}{2}\}$

a. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi D.

b. Tính thể tích vật tròn xoay khi D quay quanh Ox.

Bài tập 14: (ĐHY – 1999): Tính thể tích hình Elip tròn xoay sinh ra bởi:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

khi nó quay quanh trục Ox.

CHƯƠNG II

SỐ PHỨC

CHỦ ĐỀ I SỐ PHỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. KHÁI NIỆM SỐ PHỨC

Định nghĩa 1

Một số phức là một biểu thức dạng $a + bi$ trong đó a, b là các số thực và số i thỏa mãn $i^2 = -1$. Kí hiệu số phức đó là z và viết $z = a + bi$.

i được gọi là **đơn vị ảo**, a được gọi là **phần thực** và b được gọi là **phần ảo** của số phức $z = a + bi$.

Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

 **Chú ý:**

1. Số phức $z = a + 0i$ có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là :

$$a + 0i = a, a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

2. Số phức có phần thực bằng 0 được gọi là **số ảo** (còn gọi là thuần ảo):

$$z = 0 + bi = bi (b \in \mathbb{R}); i = 0 + 1i = 1i.$$

Số $0 = 0 + 0i = 0i$ vừa là số thực vừa là số ảo.

Định nghĩa 2

Hai số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $z' = a' + b'i$ ($a', b' \in \mathbb{R}$) **bằng nhau** nếu và chỉ nếu:

$$a = a', b = b'.$$

Khi đó, ta viết $z = z'$.

2. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC SỐ PHỨC

Mỗi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$. Khi đó, ta thường viết $M(a + bi)$ hay $M(z)$. Gốc O biểu diễn số 0.

Mặt phẳng tọa độ với việc biểu diễn số phức được gọi là **mặt phẳng phức**.

- Trục Ox gọi là trục thực.
- Trục Oy gọi là trục ảo.

3. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ SỐ PHỨC

Định nghĩa 3

Tổng của hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$) là số phức

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Như vậy, để cộng hai số phức, ta cộng các phần thực với nhau, cộng các phần ảo với nhau.

Tính chất của phép cộng số phức

1. Tính chất kết hợp:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ với mọi } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

2. Tính chất giao hoán:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ với mọi } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

3. Cộng với 0:

$$z + 0 = 0 + z = z \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

4. Với mỗi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), nếu kí hiệu số phức $-a - bi$ là $-z$ thì ta có:

$$z + (-z) = -z + z = 0.$$

Số $-z$ được gọi là **số đối** của số phức z .

Định nghĩa 4

Hiệu của hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$) là tổng của z_1 với $-z_2$, tức là:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Ý nghĩa hình học của phép cộng và phép trừ số phức

Mỗi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ cũng có nghĩa là vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Khi đó, nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ theo thứ tự biểu diễn số phức z_1, z_2 thì:

- $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ biểu diễn số phức $z_1 + z_2$.
- $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$ biểu diễn số phức $z_1 - z_2$.

4. PHÉP NHÂN SỐ PHỨC

Định nghĩa 5

Tích của hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$) là số phức

$$z_1 \cdot z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i.$$

 **Nhận xét:** Từ định nghĩa, ta có:

- Với mọi số thực k , và mọi số phức $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$):

$$k(a + bi) = ka + kbi.$$
- $0z = 0$ với mọi số phức z .

Tính chất của phép nhân số phức

1. Tính chất giao hoán:

$$z_1z_2 = z_2z_1 \text{ với mọi } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

2. Tính chất kết hợp:

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \text{ với mọi } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

3. Nhân với 1:

$$1.z = z.1 = z \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

4. Tính chất phân phối (của phép nhân đối với phép cộng):

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \text{ với mọi } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

5. SỐ PHỨC LIÊN HỢP VÀ MÔĐUN CỦA SỐ PHỨC

Định nghĩa 6

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là $a - bi$ và được kí hiệu bởi $\bar{z}$.

Như vậy, ta có:

$$\bar{\bar{z}} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

 **Nhận xét:** Từ định nghĩa ta thấy:

1. Số phức liên hợp của $\bar{z}$ lại là z , tức là $\bar{\bar{z}} = z$. Vì thế người ta còn nói z và $\bar{z}$ là hai số phức liên hợp với nhau.
2. Số phức liên hợp khi và chỉ khi các điểm biểu diễn của chúng đối xứng nhau qua trục Ox .

Tính chất

1. Với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta có:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

2. Với mọi số phức z , số $z \cdot \bar{z}$ luôn là một số thực, và nếu $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì:

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2.$$

Định nghĩa 7

Môđun của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số thực không âm $\sqrt{a^2 + b^2}$ và được kí là $|z|$.

Như vậy, nếu $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

 **Nhận xét:**

1. Nếu z là số thực thì môđun của z là giá trị tuyệt đối của số thực đó.
2. $z = 0$ khi và chỉ khi $|z| = 0$.

6. PHÉP CHIA CHO SỐ PHỨC KHÁC 0

Định nghĩa 8

Số nghịch đảo của số phức z khác 0 là số $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$.

Thương $\frac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 là tích của z'

với số phức nghịch đảo của z , tức là $\frac{z'}{z} = z' \cdot z^{-1}$.

 **Nhận xét:** Như vậy, nếu $z \neq 0$ thì:

$$\frac{z'}{z} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{|z|^2}.$$

 **Chú ý:** Có thể viết $\frac{z'}{z} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$ nên để tính $\frac{z'}{z}$ ta chỉ việc nhân cả tử và mẫu số với $\bar{z}$ và để ý rằng $z \bar{z} = |z|^2$.

 **Nhận xét:**

1. Với $z \neq 0$, ta có $\frac{1}{z} = 1 \cdot z^{-1} = z^{-1}$.
2. Thương $\frac{z'}{z}$ là số phức w sao cho $zw = z'$. Từ đó, có thể nói phép chia (cho số phức khác 0) là phép toán ngược của phép nhân.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: SỐ PHỨC VÀ THUỘC TÍNH CỦA NÓ

Với số phức $z = a + bi$, các dạng câu hỏi thường được đặt ra là:

Dạng 1: Xác định phần thực và phần ảo của số phức z

Khi đó, ta có ngay:

- Phần thực bằng a .
- Phần ảo bằng b .

Dạng 2: Hãy biểu diễn hình học số phức z

Khi đó, ta sử dụng điểm $M(a; b)$ để biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ.

 **Chú ý:** Một câu hỏi ngược là "Xác định số phức được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ ", khi đó ta có ngay số $z = a + bi$.

Dạng 3: Tính môđun của số phức z , khi đó, ta có ngay $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dạng 4: Tìm số đối của số phức z , khi đó, ta có ngay $-z = -a - bi$.

Dạng 5: Tìm số phức liên hợp của z , khi đó, ta có ngay $\bar{z} = a - bi$.

Dạng 6: Tìm số phức nghịch đảo của z , khi đó, ta có ngay $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$.

Ví dụ 1: (Mở rộng bài 1/tr 189 – Sgk): Cho các số phức:

$$2 + 3i;$$

$$1 + 2i;$$

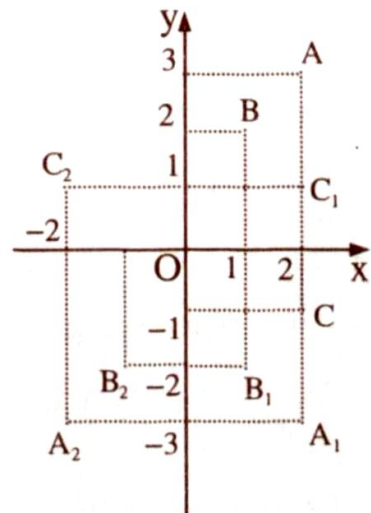
$$2 - i.$$

- Xác định phần thực, phần ảo và tính môđun của mỗi số đó. Biểu diễn các số đó trong mặt phẳng phức.
- Viết số phức liên hợp của mỗi số đó và biểu diễn chúng trong mặt phẳng phức.
- Viết số đối của mỗi số phức đó và biểu diễn chúng trong mặt phẳng phức.

 **Giải**

a. Ta lần lượt có:

- Số phức $2 + 3i$, ta có:
 - Có phần thực bằng 2 và phần ảo bằng 3.
 - Có môđun bằng $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.
 - Được biểu diễn bằng điểm $A(2; 3)$.
- Số phức $1 + 2i$, ta có:
 - Có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 2.
 - Có môđun bằng $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
 - Được biểu diễn bằng điểm $B(1; 2)$.
- Số phức $2 - i$, ta có:
 - Có phần thực bằng 2 và phần ảo bằng -1 .
 - Có môđun bằng $\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.
 - Được biểu diễn bằng điểm $C(2; -1)$.



b. Ta lần lượt có:

- Số phức liên hợp của $2 + 3i$ là $2 - 3i$ và được biểu diễn bằng điểm $A_1(2; -3)$.
- Số phức liên hợp của $1 + 2i$ là $1 - 2i$ và được biểu diễn bằng điểm $B_1(1; -2)$.
- Số phức liên hợp của $2 - i$ là $2 + i$ và được biểu diễn bằng điểm $C_1(2; 1)$.

c. Ta lần lượt có:

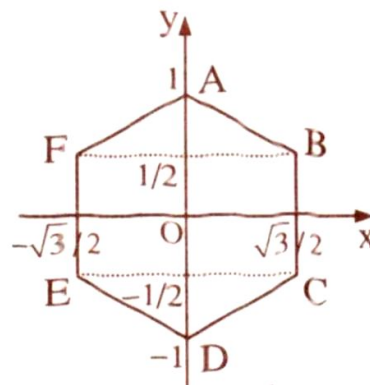
- Số đối của số phức $2 + 3i$ là $-2 - 3i$ và được biểu diễn bằng điểm $A_2(-2; -3)$.
- Số đối của số phức $1 + 2i$ là $-1 - 2i$ và được biểu diễn bằng điểm $B_2(-1; -2)$.
- Số đối của số phức $2 - i$ là $-2 + i$ và được biểu diễn bằng điểm $C_2(-2; 1)$.

Ví dụ 2: (Bài 3/tr 189 – Sgk): *Xác định các số phức biểu diễn bởi các đỉnh của một lục giác đều có tâm là gốc tọa độ O trong mặt phẳng phức, biết rằng một đỉnh biểu diễn số i.*

 **Giải**

Giả sử lục giác đều ABCDEF (như trong hình vẽ) thỏa mãn điều kiện đầu bài, khi đó:

- Với đỉnh A(0; 1) là số phức i .
- Với đỉnh B $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là số phức $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
- Với đỉnh C $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ là số phức $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.
- Với đỉnh D(0; -1) là số phức $-i$.
- Với đỉnh E $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ là số phức $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.
- Với đỉnh F $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là số phức $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.



 **Chú ý:** Với câu hỏi "Tìm điều kiện để hai số phức z_1 và z_2 bằng nhau", ta sử dụng kết quả trong định nghĩa 2.

Ví dụ 3: *Xác định m để hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = m + i\sqrt{m^2 + 3m}$:*

- Có môđun bằng nhau.*
- Bằng nhau.*

 **Giải**

Trước tiên, chúng ta cần có điều kiện:

$$m^2 + 3m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -3 \end{cases}$$

a. Để z_1 và z_2 có môđun bằng nhau điều kiện là:

$$\begin{aligned} \sqrt{1^2 + 2^2} &= \sqrt{m^2 + (m^2 + 3m)} \Leftrightarrow 5 = 2m^2 + 3m \Leftrightarrow 2m^2 + 3m - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow m &= 1 \text{ hoặc } m = -\frac{5}{2} \text{ (loại)}. \end{aligned}$$

Vậy, với $m = 1$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

b. Để $z_1 = z_2$ điều kiện là:

$$\begin{cases} 1 = m \\ 2 = \sqrt{m^2 + 3m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m^2 + 3m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

 **Chú ý:** Rất nhiều em học sinh đã không để ý tới điều kiện có nghĩa của căn thức và dẫn tới sai trong câu hỏi a).

Ví dụ 4: Tìm số phức nghịch đảo của các số phức sau:

$$4 + 3i;$$

$$1 - i;$$

$$2i.$$

 **Giải**

Ta lần lượt có:

- Với $z = 4 + 3i$ thì $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} = \frac{1}{4^2 + 3^2} \cdot (4 - 3i) = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$.
- Với $z = 1 - i$ thì $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} = \frac{1}{1^2 + (-1)^2} \cdot (1 + i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
- Với $z = 2i$ thì $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} = \frac{1}{2^2} \cdot (-2i) = -\frac{1}{2}i$.

 **Chú ý:** Bởi mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bằng điểm M (hoặc vectơ $\overrightarrow{OM}$) nên một số bài toán về số phức được chuyển về bài toán về tọa độ trong mặt phẳng.

Ví dụ 5: (Bài 15/tr 191 – Sgk):

- a. Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng theo thứ tự biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3 . Hỏi trọng tâm của ΔABC biểu diễn số phức nào?
- b. Xét ba điểm A, B, C của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_3 thoả mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

 **Giải**

a. Với ba số phức:

$$z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i, z_3 = a_3 + b_3i \quad (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in \mathbb{R}),$$

ta lần lượt có:

$$A_1(a_1; b_1), A_2(a_2; b_2) \text{ và } A_3(a_3; b_3).$$

Khi đó, trọng tâm G của ΔABC có tọa độ $G\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}; \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)$ nên nó

biểu diễn số phức:

$$w = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} + \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}i.$$

b. Từ giả thiết $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, ta được:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{a_3^2 + b_3^2}$$

$$\Leftrightarrow A, B, C \text{ thuộc đường tròn tâm O bán kính } R = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}.$$

Do đó, để ΔABC đều điều kiện là:

$$G \equiv O \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = 0 \\ \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)i = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 0, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 6: (Bài 16/tr 191 – Sgk): Trong mặt phẳng phức cho các điểm O (gốc tọa độ), A biểu diễn số 1, B biểu diễn số phức z không thực, A' biểu diễn số phức $z' \neq 0$ và B' biểu diễn số phức zz' . Hai tam giác OAB, OA'B' có phải là hai tam giác đồng dạng không?

 *Giải*

Nhận xét rằng:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OA'}|} = \frac{1}{|z'|}. \quad (1)$$

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OB'}|} = \frac{|z|}{|zz'|} = \frac{1}{|z'|}. \quad (2)$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|} = \frac{|\overline{OB} - \overline{OA}|}{|\overline{OB'} - \overline{OA'}|} = \frac{|z - 1|}{|zz' - z'|} = \frac{|z - 1|}{|z'| \cdot |z - 1|} = \frac{1}{|z'|}. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} \Leftrightarrow \text{Hai } \Delta OAB \text{ và } \Delta OA'B' \text{ đồng dạng với nhau.}$$

Vấn đề 2: CÁC PHÉP TOÁN VỀ SỐ PHỨC

Sử dụng định nghĩa cùng với tính chất của các phép toán (cộng, trừ nhân, chia) trên tập số phức.

Chúng ta có các hằng đẳng thức:

$$a^2 + b^2 = a^2 - (bi)^2 = \underbrace{(a + bi)(a - bi)}_z = z \cdot \bar{z}.$$

$$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi; \quad (a - bi)^2 = a^2 - b^2 - 2abi.$$

$$(a + bi)^3 = a^3 - 3a + (3a^2b - b^3)i; \quad (a - bi)^3 = a^3 + 3a - (3a^2b + b^3)i.$$

Ví dụ 1: (Bài 5/tr 190 – Sgk): Cho $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Hãy tính:

$$\bar{z}; \quad \frac{1}{z}; \quad z^2; \quad (\bar{z})^3; \quad 1 + z + z^2.$$

 *Giải*

Ta lần lượt có:

$$\bar{z} = \overline{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\begin{aligned} (\bar{z})^3 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1. \\ 1 + z + z^2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: (Bài 4/tr 189 – Sgk): Thực hiện phép tính:

$$\frac{1}{2-3i}; \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}; \frac{3-2i}{i}; \frac{3-4i}{4-i}.$$

 *Giải*

Ta lần lượt có:

$$\frac{1}{2-3i} = \frac{1}{2^2+3^2} \cdot \overline{2-3i} = \frac{1}{13}(2+3i) = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \cdot \overline{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\frac{3-2i}{i} = \frac{(3-2i) \cdot \bar{i}}{1} = (3-2i)(-i) = -2-3i.$$

$$\frac{3-4i}{4-i} = \frac{(3-4i) \cdot \overline{4-i}}{4^2+1^2} = \frac{1}{17}(3-4i)(4+i) = \frac{16}{17} - \frac{13}{17}i.$$

 **Chú ý:** Thông qua các phép toán trên tập số phức, chúng ta sẽ nhận được một số phức mới từ một biểu thức ban đầu. Điều này dẫn tới những câu hỏi như trong bài toán 1.

Ví dụ 3: (Bài 11/tr 191 – Sgk): Hỏi mỗi số sau đây là số thực hay số ảo (z là số phức tùy ý cho trước sao cho biểu thức xác định) ?

$$z^2 + (\bar{z})^2; \quad \frac{z - \bar{z}}{z^3 + (\bar{z})^3}; \quad \frac{z^2 - (\bar{z})^2}{1 + z\bar{z}}.$$

 **Giải**

Với số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

a. Ta có:

$$\begin{aligned} z^2 + (\bar{z})^2 &= (a + bi)^2 + (\overline{a + bi})^2 = (a^2 - b^2) + 2abi + (a^2 - b^2) - 2abi \\ &= 2(a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Vậy, số $z^2 + (\bar{z})^2$ là một số thực.

b. Ta có:

$$\frac{z - \bar{z}}{z^3 + (\bar{z})^3} = \frac{(a + bi) - \overline{a + bi}}{(a + bi)^3 + (\overline{a + bi})^3} = \frac{2bi}{2(a^3 - 3ab^2)} = \frac{b}{a^3 - 3ab^2} i.$$

Vậy, số $\frac{z - \bar{z}}{z^3 + (\bar{z})^3}$ là một số ảo.

c. Ta có:

$$\frac{z^2 - (\bar{z})^2}{1 + z\bar{z}} = \frac{(a + bi)^2 - (\overline{a + bi})^2}{1 + (a + bi)a + bi} = \frac{(a + bi)^2 - (a - bi)^2}{1 + (a + bi)(a - bi)} = \frac{4ab \cdot i}{1 + a^2 + b^2} i.$$

Vậy, số $\frac{z^2 - (\bar{z})^2}{1 + z\bar{z}}$ là một số ảo.

Ví dụ 4: Hỏi mỗi số sau đây là số thực hay số ảo (z là số phức tùy ý cho trước sao cho biểu thức xác định) ?

$$\alpha = \frac{i^{2005} - i}{z - 1} - z^2 + (\bar{z})^2 \text{ và } \beta = \frac{z^3 - z}{z - 1} + (\bar{z})^2 + \bar{z}.$$

 **Giải**

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta lần lượt có:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{i^{2005} - i}{z - 1} - z^2 + (\bar{z})^2 = \frac{i - i}{z - 1} - |z|^2 + |\bar{z}|^2 = -(a^2 - b^2) + (a^2 + b^2) \\ &= 2b^2, \text{ là số thực,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{z^3 - z}{z - 1} + (\bar{z})^2 + \bar{z} = z^2 + z + 1 + (\bar{z})^2 + \bar{z} \\ &= (a^2 - b^2) + (a + bi) + 1 + (a^2 + b^2) + (a - bi) = 2a^2 + 2a + 1, \text{ là số thực.} \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau:

a. $\left(\frac{i+1}{i-1}\right)^{33} + (1-i)^{10} + (2+3i)(2-3i) + \frac{1}{i}.$

b. $1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{20}.$

 **Giải**

a. Ta lần lượt có:

$$\frac{i+1}{i-1} = \frac{(i+1)(i+1)}{2} = i \Rightarrow \left(\frac{i+1}{i-1}\right)^{33} = i;$$

$$(1-i)^2 = -2i \Rightarrow (1-i)^{10} = (-2i)^5 = -2^5 i = -32i;$$

$$(2+3i)(2-3i) = 4+9 = 13; \quad \frac{1}{i} = -i$$

Do đó:

$$\left(\frac{i+1}{i-1}\right)^{33} + (1-i)^{10} + (2+3i)(2-3i) + \frac{1}{i} = 13 - 32i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Phần thực bằng } 13 \\ \text{Phần ảo bằng } -32 \end{cases}.$$

b. Xét cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$ và $q = 1+i$, ta có:

$$z_n = u_1 \cdot q^{n-1},$$

$$S_{21} = 1 + z + z^2 + \dots + z^{21} = \frac{q^{21} - 1}{q - 1} = \frac{(1+i)^{21} - 1}{1+i-1} = \frac{(1+i)^{21} - 1}{i}$$

$$= -[(1+i)^{21} - 1]i \Rightarrow \begin{cases} \text{Phần thực bằng } -2^{10} \\ \text{Phần ảo bằng } 2^{10} + 1 \end{cases}.$$

Ví dụ 6: Đơn giản các biểu thức sau:

a. $(\sqrt{3} + i)^2 + (\sqrt{3} - i)^2.$

b. $(\sqrt{3} + i)^3 - (\sqrt{3} - i)^3.$

 **Giải**

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$(\sqrt{3} + i)^2 + (\sqrt{3} - i)^2 = 3 + 2i\sqrt{3} + i^2 + 3 - 2i\sqrt{3} + i^2 = 4.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^2 + (\sqrt{3} - i)^2 &= (\sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i)^2 - 2(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)^2 \\ &= 12 - 2(3 - i^2) = 4. \end{aligned}$$

Cách 3: Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^2 + (\sqrt{3} - i)^2 &= (\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i)^2 + 2(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)^2 \\ &= 4i^2 + 2(3 - i^2) = 4. \end{aligned}$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} + i)^3 - (\sqrt{3} - i)^3 &= 3\sqrt{3} + 9i + 3i\sqrt{3} + i^3 - (3\sqrt{3} - 9i + 3i\sqrt{3} - i^3) \\ &= 18i + 2i^3 = 18i - 2i = 16i.\end{aligned}$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} + i)^3 - (\sqrt{3} - i)^3 &= (\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i)^3 + \\ &\quad + 3(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i) \\ &= 8i^3 + 6i(3 - i^2) = -8i + 24i = 16i.\end{aligned}$$

Vấn đề 3: CHỨNG MINH TÍNH CHẤT CỦA SỐ PHỨC

Sử dụng các phép toán trên tập số phức cùng những tính chất của chúng.

Ví dụ 1: (Bài 6/tr 190 – Sgk): Chứng minh:

- Phần thực của số phức z bằng $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$, phần ảo của số phức z bằng $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.
- Số phức z là số ảo khi và chỉ khi $z = -\bar{z}$.
- Với mọi số phức z, z' ta có $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$.

 **Giải**

a. Với số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(z + \bar{z}) &= \frac{1}{2}(a + bi + \overline{a + bi}) = \frac{1}{2}(a + bi + a - bi) \\ &= a - \text{là phần thực của } z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) &= \frac{1}{2i}(a + bi - \overline{a + bi})(-i) = \frac{1}{2}(a + bi - a + bi)(-i) \\ &= b - \text{là phần ảo của } z.\end{aligned}$$

b. Từ giả thiết:

$$z = -\bar{z} \Leftrightarrow a + bi = -\overline{a + bi} = -a + bi \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \text{Số phức } z \text{ là số ảo.}$$

c. Với hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$), ta lần lượt có:

$$\begin{aligned}\overline{z + z'} &= \overline{(a + bi) + (a' + b'i)} = \overline{(a + a') + (b + b')i} = (a + a') - (b + b')i \\ &= (a - bi) + (a' - b'i) = \bar{z} + \bar{z}', \text{ đpcm.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{z \cdot z'} &= \overline{(a + bi)(a' + b'i)} = \overline{(aa' - bb') + (ab' + a'b)i} \\ &= (aa' - bb') - (ab' + a'b)i = (a - bi)(a' - b'i) = \bar{z} \cdot \bar{z}', \text{ đpcm.}\end{aligned}$$

Ví dụ 2: (Bài 8/tr 190 – SGK): Chứng minh rằng:

- a. Nếu vectơ $\vec{u}$ của mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thì độ dài của vectơ $\vec{u}$ là $|\vec{u}| = |z|$ và từ đó nếu các điểm A_1, A_2 theo thứ tự biểu diễn các số phức z_1, z_2 thì $|\overline{A_1 A_2}| = |z_1 - z_2|$.
- b. Với mọi số phức z, z' , ta có $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

 Giải

- a. Với số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có:

$$\vec{u}(a; b) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|, \text{ đpcm.}$$

Với hai số phức $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$), ta lần lượt có:

$$A_1(a_1; b_1) \text{ và } A_2(a_2; b_2) \Rightarrow \overline{A_1 A_2}(a_2 - a_1; b_2 - b_1);$$

$$|\overline{A_1 A_2}| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} = |z_1 - z_2|, \text{ đpcm.}$$

- b. Nếu $\vec{u}, \vec{u}'$ theo thứ tự biểu diễn số phức z, z' thì $\vec{u} + \vec{u}'$ biểu diễn số phức $z + z'$, suy ra:

$$|z + z'| = |\vec{u} + \vec{u}'| \leq |\vec{u}| + |\vec{u}'| = |z| + |z'|, \text{ đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{u} = k\vec{u}' \Leftrightarrow z = kz'$.

Ví dụ 3: Gọi A, B là hai điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự hai số phức z_0, z_1 khác 0 thoả mãn đẳng thức $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1$. Chứng minh rằng $\triangle OAB$ là tam giác đều (O là gốc tọa độ).

 Giải

Biến đổi giả thiết:

$$z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1 \Leftrightarrow z_1^2 = (z_1 - z_0)z_0 \Rightarrow |z_1|^2 = |(z_1 - z_0)z_0| = |z_1 - z_0| \cdot |z_0|$$

$$z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1 \Leftrightarrow z_0^2 = (z_1 - z_0)z_1 \Rightarrow |z_0|^2 = |(z_1 - z_0)z_1| = |z_1 - z_0| \cdot |z_1|$$

Từ đó, suy ra:

$$|z_1 - z_0| = \frac{|z_1|^2}{|z_0|} = \frac{|z_0|^2}{|z_1|} \Rightarrow |z_1|^3 = |z_0|^3 \Rightarrow |z_1 - z_0| = |z_1| = |z_0|$$

$$\Leftrightarrow AB = OB = OA \Leftrightarrow \triangle OAB \text{ là tam giác đều}$$

Ví dụ 4: Các vectơ $\vec{u}; \vec{u}'$ trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức z và z' .

a. Chứng minh rằng tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{u}' = \frac{1}{2}(\bar{z} z' + z \cdot \bar{z}')$.

- b. Từ câu a) suy ra rằng nếu $\vec{u} \neq 0$ thì $\vec{u}; \vec{u}'$ vuông góc khi và chỉ khi $\frac{z'}{z}$ là số ảo.

c. Chứng minh rằng $\vec{u}; \vec{u}'$ vuông góc khi và chỉ khi $|z + z'| = |z - z'|$.

Giải

a. Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), $z' = x' + y'i$ ($x', y' \in \mathbb{R}$). Khi đó:

$$\bar{u} \cdot \bar{u}' = xx' + yy',$$

$$\bar{z} z' + z \cdot \bar{z}' = (x - yi)(x' + y'i) + (x + yi)(x' - y'i) = 2xx' + yy',$$

$$\Rightarrow \bar{u} \cdot \bar{u}' = \frac{1}{2}(\bar{z} z' + z \cdot \bar{z}'), \text{ đpcm.}$$

b. Để $\bar{u}; \bar{u}'$ vuông góc điều kiện là:

$$\frac{1}{2}(\bar{z} z' + z \cdot \bar{z}') = 0 \Leftrightarrow \bar{z} z' + z \cdot \bar{z}' = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z} + \frac{\bar{z}'}{\bar{z}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'}{z} + \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z} \text{ là số ảo.}$$

c. Nhận xét rằng:

$$|z + z'| = |z - z'| \Leftrightarrow (z + z')(\overline{z + z'}) = (z - z')(\overline{z - z'})$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} z' + z \cdot \bar{z}' = 0 \Leftrightarrow \bar{u}; \bar{u}' \text{ vuông góc.}$$

Vấn đề 4: TẬP HỢP ĐIỂM

Câu hỏi thường được đặt ra là "Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện K ". Khi đó:

Dạng 1: Số phức z thỏa mãn biểu thức về độ dài (môđun). Khi đó, ta sử dụng công thức $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dạng 2: Số phức z là số thực (thực âm hoặc thực dương), số ảo. Khi đó, ta sử dụng kết quả:

a. Để z là số thực điều kiện là $b = 0$.

b. Để z là số thực âm điều kiện là:

$$\begin{cases} a < 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

c. Để z là số thực dương điều kiện là:

$$\begin{cases} a > 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

d. Để z là số ảo điều kiện là $a = 0$.

 **Chú ý:** Để tăng độ khó cho yêu cầu về tập hợp điểm, bài toán thường được cho dưới dạng một biểu thức phức.

Ví dụ 1: (Bài 9.a và 9.c/tr 190 – Sgk): *Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau:*

a. $|z - i| = 1$.

b. $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$.

 *Giải*

Với số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$.

a. Ta có:

$$1 = |z - i| = |x + yi - i| = |x + (y - 1)i| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc đường tròn tâm $I(0; 1)$ bán kính $R = 1$.

b. Ta có:

$$|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$$

$$\Leftrightarrow |x + yi| = |\overline{x + yi} - 3 + 4i| = |x - yi - 3 + 4i| = |x - 3 + (4 - y)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (4 - y)^2} \Leftrightarrow 6x + 8y - 25 = 0.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc đường thẳng (d): $6x + 8y - 25 = 0$.

Ví dụ 2: (Bài 12.c và 12.d/tr 191 – Sgk): *Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau:*

a. $z^2 = (\bar{z})^2$.

b. $\frac{1}{z - i}$ là số ảo.

Giải

Với số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

a. Ta có:

$$z^2 = (\bar{z})^2 \Leftrightarrow (x + yi)^2 = (\overline{x + yi})^2 \Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = (x^2 - y^2) - 2xyi$$

$$\Leftrightarrow 4xyi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc trục thực và trục ảo.

b. Ta có:

$$w = \frac{1}{z - i} = \frac{1}{x + yi - i} = \frac{1}{x + (y - 1)i} = \frac{x - (y - 1)i}{x^2 + (y - 1)^2}.$$

Khi đó, để w là số ảo điều kiện là:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y \neq 1 \end{cases}.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc trục Oy (trục ảo) trừ điểm $I(0; 1)$.

Ví dụ 3: *Xác định tập hợp các điểm nằm trong mặt phẳng phức biểu diễn*

các số phức z thoả mãn $\left| \frac{z}{z - i} \right| = k$, k là số thực dương cho trước.

 **Giải**

Với số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$.

Ta có:

$$k = \left| \frac{z}{z-i} \right| = \left| \frac{x+yi}{x+yi-i} \right| \Leftrightarrow k^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2+(y-1)^2}. \quad (*)$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $k = 1$ thì:

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Tức là, điểm M thuộc đường thẳng $y = \frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Nếu $k \neq 1$ thì:

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2k^2y}{k^2-1} + \frac{2k^2}{k^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{k^2}{k^2-1} \right)^2 = \frac{k^2}{(k^2-1)^2}$$

Tức là, điểm M thuộc đường tròn tâm $I\left(0; \frac{k^2}{k^2-1}\right)$ bán kính $R = \frac{k}{|k^2-1|}$.

Ví dụ 4: Xác định tập hợp các điểm M trên mặt phẳng phức biểu diễn các số phức thỏa mãn $(1 + i\sqrt{3})z + 2$, trong đó $|z-1| \leq 2$.

 **Giải**

Ta biến đổi:

$$(1 + i\sqrt{3})z + 2 = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})z = x - 2 + yi \Leftrightarrow z = \frac{x-2+yi}{1+i\sqrt{3}}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} |z-1| &= \left| \frac{x-2+yi}{1+i\sqrt{3}} - 1 \right| = \left| \frac{x-3+i(y+\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}} \right| \\ &= \left| \frac{[x-3+i(y+\sqrt{3})](1-i\sqrt{3})}{4} \right| = \left| \frac{x+y\sqrt{3}+i(y-x\sqrt{3}+3\sqrt{3})}{4} \right| \end{aligned}$$

$$|z-1| \leq 2 \Leftrightarrow |x+y\sqrt{3}+i(y-x\sqrt{3}+3\sqrt{3})| \leq 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+y\sqrt{3})^2 + (y-x\sqrt{3}+3\sqrt{3})^2} \leq 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4[(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2]} \leq 8 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 16.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc hình tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$.

Ví dụ 5: (Bài 14/tr 191 – Sgk):

- a. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi $z \neq i$, hãy tìm phần thực và phần ảo của số phức $\frac{z+i}{z-i}$.
- b. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện $\frac{z+i}{z-i}$ là số thực dương.

 *Giải*

a. Ta có:

$$\begin{aligned} w &= \frac{z+i}{z-i} = \frac{x+yi+i}{x+yi-i} = \frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i} = \frac{[x+(y+1)i][x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{(x^2+y^2-1)+2xi}{x^2+(y-1)^2}. \end{aligned}$$

Do đó, số phức w có phần thực là $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}$, phần ảo là $\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}$.

b. Để w là số thực dương điều kiện là:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1 > 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| > 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thuộc trục Oy (trục ảo) trừ các điểm có tung độ $|y| \leq 1$.

Vấn đề 5: MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH PHỨC

Ví dụ 1: (Bài 13.a và 13.b/tr 191 – Sgk): Giải các phương trình sau (với ẩn z):

- a. $iz + 2 - i = 0$. b. $(2 + 3i)z = z - 1$.

 *Giải*

Với số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

a. Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\begin{aligned} 0 &= iz + 2 - i = i(a + bi) + 2 - i = (2 - b) + (a - 1)i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - b = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = 1 + 2i. \end{aligned}$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$iz + 2 - i = 0 \Leftrightarrow iz = i - 2 \Leftrightarrow z = \frac{i-2}{i} = (i-2)(-i) = 1 + 2i.$$

b. Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\begin{aligned}(2+3i)z &= z-1 \Leftrightarrow (2+3i)(a+bi) = a+bi-1 \\ \Leftrightarrow 2a-3b+(3a+2b)i &= a-1+bi \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b=a-1 \\ 3a+2b=b \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=-1 \\ 3a+b=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1/10 \\ b=3/10 \end{cases} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i.\end{aligned}$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$(2+3i)z = z-1 \Leftrightarrow (1+3i)z = -1 \Leftrightarrow z = \frac{-1}{1+3i} = \frac{-1(1-3i)}{1^2+3^2} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i.$$

Ví dụ 2: (Bài 13.c và 13.d/tr 191 – Sgk): Giải các phương trình sau (với ẩn z):

a. $(2-i)\bar{z} - 4 = 0$. b. $(iz-1)(z+3i)(\bar{z}-2+3i) = 0$.

 **Giải**

Với số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

a. Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\begin{aligned}0 &= (2-i)\bar{z} - 4 = (2-i)\overline{a+bi} - 4 = (2-i)(a-bi) - 4 \\ &= (2a-b-4) - (a+2b)i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b-4=0 \\ -(a+2b)=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=4 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8/5 \\ b=-4/5 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i.\end{aligned}$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\begin{aligned}(2-i)\bar{z} - 4 = 0 &\Leftrightarrow (2-i)\bar{z} = 4 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{4}{2-i} = \frac{4(2+i)}{2^2+1^2} = \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i \\ \Leftrightarrow z = \overline{\bar{z}} &= \overline{\frac{8}{5} + \frac{4}{5}i} = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i.\end{aligned}$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned}(iz-1)(z+3i)(\bar{z}-2+3i) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} iz-1=0 \\ z+3i=0 \\ \bar{z}-2+3i=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z=i^{-1}=-i \\ z=-3i \\ \bar{z}=2-3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=i^{-1}=-i \\ z=-3i \\ z=2+3i \end{cases}.\end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Cho các số phức:

$$3+2i; \quad 2-3i; \quad 4-3i.$$

- Xác định phần thực, phần ảo và tính môđun của mỗi số đó. Biểu diễn các số đó trong mặt phẳng phức.
- Viết số phức liên hợp của mỗi số đó và biểu diễn chúng trong mặt phẳng phức.
- Viết số đối của mỗi số phức đó và biểu diễn chúng trong mặt phẳng phức.

Bài tập 2: Xác định các số phức biểu diễn bởi các đỉnh của một lục giác đều có tâm là gốc toạ độ O trong mặt phẳng phức, biết rằng một đỉnh biểu diễn số 1.

Bài tập 3: Xác định m để hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = \sqrt{m^2 + 3m} + mi$:

- Có môđun bằng nhau.
- Bằng nhau.

Bài tập 4: Cho hai số phức:

$$z_1 = \sqrt{3m^2 - 3m} - 2i \text{ và } z_2 = \sqrt{m^2 + 3m - 4} + (m^2 - 3m)i.$$

Xác định m để hai số phức z_1 và z_2 :

- Có môđun bằng nhau.
- Bằng nhau.

Bài tập 5: Tìm số phức nghịch đảo của các số phức $3 - 4i$; $3 + 2i$; i .

Bài tập 6: Xác định phần thực và phần ảo của các số sau:

- $i + (3 - 2i) - (2 - 3i)$; $(\sqrt{2} - 3i)^2$.
- $(3 - 2i)(3 + 2i)$; $i(3 - i)(2 + i)$.

Bài tập 7: Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau:

- $(4 - i) + (2 + 3i) - (5 + i)$.
- $(1 + i)^2 - (1 - i)^2$.
- $(2 + i)^3 - (3 - i)^3$.
- $(1 + i)^4 - (1 - i)^4$.

Bài tập 8: Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau:

- $\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i} - \frac{\sqrt{2} + i}{i}$.
- $\frac{1}{2i} \left(i^7 - \frac{1}{i^7} \right)$.

Bài tập 9: Cho số phức $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Tìm phần thực và phần ảo của các số phức:

- $z^2 - z + 1$.
- $z^2 - 2z + 4i$.
- $\frac{\bar{z} + i}{iz - 1}$.

Bài tập 10: Chứng minh rằng với mọi số nguyên $m > 0$, ta có:

$$i^{4m} = 1; i^{4m+1} = i; i^{4m+2} = -1; i^{4m+3} = -i.$$

Bài tập 11: Chứng minh rằng với mọi số phức $z \neq 1$, ta có:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{2008} = \frac{z^{2009} - 1}{z - 1}.$$

Bài tập 12: Chứng minh rằng hai số phức phân biệt z_1, z_2 thoả mãn $|z_1| = |z_2|$

khi và chỉ khi $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số ảo.

Bài tập 13: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau:

- $|z - i| = 2$.
- $|z| = |\bar{z} - 2 + 3i|$.
- $\left| \frac{z - i}{z + i} \right| = 1$.

Bài tập 14: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau:

- z^2 là số thực âm.
- z^2 là số ảo.
- $(z - i)^2$ là số ảo.
- $(z - i)^2$ là số thực âm.
- $(z - i)^2 = (\bar{z})^2$.
- $\frac{1}{z + i}$ là số ảo.

Bài tập 15: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số thoả mãn mỗi điều kiện sau:

- | | |
|---|---|
| a. $ z + \bar{z} + 3 = 4.$ | d. $(2 - z)(i + \bar{z})$ là số ảo tùy ý. |
| b. $ z - \bar{z} + 1 - i = 2.$ | e. $2 z - i = z - \bar{z} + 2i .$ |
| c. $(2 - z)(i + \bar{z})$ là số thực tùy ý. | f. $ z^2 - (\bar{z})^2 = 4.$ |

Bài tập 16:

- Cho số phức $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) khác 0. Chứng minh rằng tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) sao cho $\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} = k$ (k là số thực cho trước) là một đường thẳng.
- Tìm α và k trong câu a) để đường thẳng nói trên đi qua các điểm biểu diễn số 2 và $3i$.

Bài tập 17:

- Các điểm A, B, C và A', B', C' trong mặt phẳng phức biểu theo thứ tự các số $1 - i$; $2 + 3i$; $3 + i$ và $3i$; $3 - 2i$; $3 + 2i$. Chứng minh rằng ABC và A'B'C' là hai tam giác có cùng trọng tâm.
- Biết các số phức biểu diễn bởi ba đỉnh nào đó của một hình bình hành trong mặt phẳng phức, hãy tìm số biểu diễn bởi đỉnh còn lại.

Bài tập 18: Biết A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$. Tìm các số z_1, z_2, z_3, z_4 theo thứ tự biểu diễn bởi các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$. Tính $\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_3}{z_4}$ và từ đó suy ra A, B, C, D cùng nằm

trên một đường tròn. Tâm đường tròn đó biểu diễn số phức nào ?

Bài tập 19: Biết A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức $1 + 2i$; $1 + \sqrt{3} + i$; $1 + \sqrt{3} - i$; $1 - 2i$. Chứng minh rằng ABCD là một tứ giác nội tiếp đường tròn. Hỏi đường tròn đó biểu diễn số phức nào ?

Bài tập 20:

- Cho số phức α . Chứng minh rằng với mọi số phức z , ta có:

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = |z + \alpha|^2 - \alpha\bar{\alpha}.$$
- Từ câu a) hãy xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số z thoả mãn $z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + k = 0$, trong đó α là số phức cho trước, k là số thực cho trước.

Bài tập 21: Giải các phương trình sau (với ẩn z):

- | | |
|-------------------------|--|
| a. $iz - 2 + 3i = 0.$ | c. $(1 - 2i)\bar{z} - 4 = 0.$ |
| b. $(3 + 2i)z = z - 1.$ | d. $(iz - 1)(z + 2i)(\bar{z} - 3 + 2i) = 0.$ |

Bài tập 22: Giải các phương trình sau (với ẩn z):

- | | |
|------------------------|--|
| a. $z^2 + 4 = 0.$ | c. $\left(\frac{z-1}{z-i}\right)^4 = 1.$ |
| b. $z^2 + 2z + 2 = 0.$ | |

Bài tập 23: Tìm số phức z đồng thời thoả mãn:

- | | |
|---|---|
| a. $\left \frac{z-1}{z-i}\right = 1; \left \frac{z-3i}{z+i}\right = 1.$ | b. $\left \frac{z-1}{z-3}\right = 1; \left \frac{z-2i}{z+i}\right = 2.$ |
|---|---|

CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC

Định nghĩa 1

|| Cho số phức w . Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một **căn bậc hai** của w .

Nói cách khác, mỗi căn bậc hai của w là một nghiệm của phương trình:

$$z^2 - w = 0 \text{ (với ẩn } z\text{)}.$$

 **Chú ý:** Để tìm căn bậc hai của số phức w , ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu w là số thực (tức là $w = a$):

- Với $a > 0$ thì w có hai căn bậc hai là $\pm \sqrt{a}$.
- Với $a < 0$ thì w có hai căn bậc hai là $\pm i\sqrt{-a}$.

Trường hợp 2: Nếu $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$ và $b \neq 0$) thì $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của w khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} z^2 = w &\Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi \\ &\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \end{aligned}$$

Ghi nhớ về căn bậc hai của số phức w :

- ⬇ $w = 0$ có đúng một căn bậc hai là $z = 0$.
- ⬇ $w \neq 0$ có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau (khác 0).

Đặc biệt:

- ⬇ Số thực dương a có hai căn bậc hai là $\pm \sqrt{a}$.
- ⬇ Số thực âm a có hai căn bậc hai là $\pm i\sqrt{-a}$.

2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Cho phương trình:

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \text{ với } A, B, C \text{ là những số phức và } A \neq 0.$$

Xét biệt thức $\Delta = B^2 - 4AC$, ta có các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-B + \delta}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B - \delta}{2A}$$

trong đó δ là một căn bậc hai của Δ .

Đặc biệt:

- Nếu Δ là số thực dương thì phương trình có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}.$$

- Nếu Δ là số thực âm thì phương trình có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-B + i\sqrt{-\Delta}}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B - i\sqrt{-\Delta}}{2A}.$$

Trường hợp 2: Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}$.

 **Chú ý:**

1. Mọi phương trình bậc hai (với hệ số phức) có hai nghiệm phức (có thể trùng nhau).
2. Mọi phương trình bậc n :

$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0$$

trong đó $A_0, A_1, \dots, A_n$ là $n + 1$ số phức cho trước, $A_0 \neq 0$ và n là một số nguyên dương luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC

Sử dụng kiến thức trong phần căn bậc hai của số phức và lưu ý tới các trường hợp đặc biệt.

Ví dụ 1: Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức 1 và -4 .

 **Giải**

- a. Số 1 có hai căn bậc hai là ± 1 .
- b. Số -4 có hai căn bậc hai là $\pm i\sqrt{-(-4)} = \pm 2i$.

 **Nhận xét:** Như vậy, với số thực a chúng ta nhanh chóng tìm được căn bậc hai của nó. Với các số ảo chúng ta sẽ thấy trong ví dụ tiếp theo.

Ví dụ 2: (Bài 17.a và 17.b/tr 195 – SGK): Tìm các căn bậc hai của số phức $-i$ và $4i$.

 **Giải**

- a. Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $-i$.

Ta có:

$$-i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ 2xy = -1 \text{ và } x, y \text{ trái dấu} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Vậy, số $-i$ có hai căn bậc hai là $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$.

b. Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $4i$, tức là ta có:

$$4i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ xy = 2 \text{ và } x, y \text{ cùng dấu} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \sqrt{2} \\ x = y = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy, số $4i$ có hai căn bậc hai là $\pm\sqrt{2}(1 + i)$.

 **Nhận xét:** Như vậy, với số ảo dạng $z = bi$ chúng ta cần biết đánh giá về dấu của x và y để nhanh chóng tìm được nghiệm của hệ phương trình. Với các số phức tổng quát $z = a + bi$ (a, b khác 0) chúng ta sẽ thấy trong ví dụ tiếp theo.

Ví dụ 3: Tìm các căn bậc hai của các số phức:

a. (Bài 17.d/tr 195 – Sgk): $1 + 4\sqrt{3}i$.

b. $-8 + 6i$.

 **Giải**

a. Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $1 + 4\sqrt{3}i$, tức là ta có:

$$1 + 4\sqrt{3}i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2\sqrt{3}}{x} \\ x^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{x}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2\sqrt{3}}{x} \\ x^4 - x^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2\sqrt{3}}{x} \\ (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2\sqrt{3}}{x} \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ và } y = \sqrt{3} \\ x = -2 \text{ và } y = -\sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy, số $1 + 4\sqrt{3}i$ có hai căn bậc hai là $\pm(2 + i\sqrt{3})$.

b. Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $-8 + 6i$, tức là ta có:

$$-8 + 6i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ x^4 + 8x^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ và } y = 3 \\ x = -1 \text{ và } y = -3 \end{cases}.$$

Vậy, số $-8 + 6i$ có hai căn bậc hai là $\pm(1 + 3i)$.

Ví dụ 4: (Bài 18/tr 196 – Sgk): Chứng minh rằng nếu z là một căn bậc hai của số phức w thì $|z| = \sqrt{|w|}$.

 *Giải*

Với giả thiết $z^2 = w$ và giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có:

$$w = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

$$\Rightarrow |w| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \sqrt{|w|} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 5: (Bài 22/tr 197 – Sgk): Một học sinh kí hiệu một căn bậc hai của -1 là $\sqrt{-1}$ và tìm cách tính $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$.

a. Theo định nghĩa của căn bậc hai của -1 thì $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$.

b. Theo tính chất của căn bậc hai (tích của hai căn bậc hai của hai số bằng căn bậc hai của tích hai số đó), ta có:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Học sinh đó suy ra $1 = -1$.

Hãy tìm điều sai trong lập luận trên.

 *Giải*

Sai ở chỗ $\sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1}$.

Ví dụ 6: (Bài 26/tr 199 – Sgk):

a. Dùng công thức cộng trong lượng giác để chứng minh rằng với mọi số thực φ , ta có:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Từ đó, hãy tìm mọi căn bậc hai của số phức $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$.

b. Tìm các căn bậc hai của $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ bằng hai cách nói ở câu a).

 *Giải*

a. Ta có:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi, \text{ đpcm.}$$

Từ đó, suy ra $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$ có hai căn bậc hai là:

$$\pm(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

b. Ta biến đổi:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) = \cos \frac{\pi}{4} - i\sin \frac{\pi}{4}$$

suy ra, nó có hai căn bậc hai là $\pm(\cos \frac{\pi}{8} + i\sin \frac{\pi}{8})$.



Nhận xét: Ví dụ trên đã minh họa dạng lượng giác của số phức và ứng dụng nó để tìm căn bậc hai. Chúng ta sẽ có được kiến thức này trong bài học 3.

Ví dụ 7: Hỏi khi số thực a thay đổi tùy ý thì các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các căn bậc hai của $a + i$ vạch nên đường nào ?

 Giải

Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $a + i$, tức là ta có:

$$a + i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = 1 \end{cases}.$$

Từ phương trình $2xy = 1$ chúng ta điểm M biểu diễn z phải thuộc hypebol $y = \frac{1}{2x}$.

Vì với mỗi điểm $(x; y)$ của hypebol này, tìm được $a = x^2 - y^2$ nên M vạch trên toàn bộ hai nhánh của hypebol đó.

Vấn đề 2: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Sử dụng kiến thức trong phần phương trình bậc hai.

Ví dụ 1: (Bài 23/tr 199 – Sgk): Giải phương trình $z + \frac{1}{z} = k$ trong các trường hợp sau:

a. $k = 1$.

b. $k = \sqrt{2}$.

c. $k = 2i$.

 **Giải**

Biến đổi phương trình về dạng:

$$z^2 - kz + 1 = 0. \quad (*)$$

a. Với $k = 1$, phương trình (*) có dạng:

$$z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

b. Với $k = \sqrt{2}$, phương trình (*) có dạng:

$$z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i).$$

c. Với $k = 2i$, phương trình (*) có dạng:

$$z^2 - 2iz + 1 = 0$$

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương trình có $\Delta = (-2i)^2 - 4 = -8 \Rightarrow \Delta$ có hai căn bậc hai là $\pm 2i\sqrt{2}$.

Nên phương trình đó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_{1,2} = \frac{2i \pm 2i\sqrt{2}}{2} = (1 \pm \sqrt{2})i.$$

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$z^2 - 2iz - 1 = -2 \Leftrightarrow (z - i)^2 = -2 \Leftrightarrow z - i = \pm i\sqrt{2} \Leftrightarrow z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{2})i.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{2})i$.

 **Nhận xét:** Như vậy:

- a. Với phương trình bậc hai hệ số thực (câu a và b) thì nghiệm của phương trình được xác định một cách đơn giản bởi luôn có Δ là số thực và khi đó:

✚ Nếu $\Delta \geq 0$ có hai căn bậc hai là $\pm \sqrt{\Delta}$.

✚ Nếu $\Delta \leq 0$ có hai căn bậc hai là $\pm i \sqrt{-\Delta}$.

Điều này cũng được sử dụng ngay cả với phương trình bậc hai có hệ số phức nhưng có biệt số Δ là số thực (câu c).

- b. Với phương trình bậc hai có biệt số Δ là số phức chúng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tính biệt số $\Delta = a + bi$.

Bước 2: Tìm hai căn bậc hai của Δ (giả sử $\pm \delta$) theo thuật toán đã biết trong vấn đề 1.

Bước 3: Kết luận, phương trình có hai nghiệm:

$$z_{1,2} = \frac{-B \pm \delta}{2A}.$$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a. $z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0$.

b. (Bài 22.a/tr 214 – Sgk): $z^2 - 3z + 3 + i = 0$.

 **Giải**

- a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương trình có $\Delta = (-4i)^2 + 4(4 + 2i) = 8i$.

Giả sử số $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $\Delta = 8i$, tức là ta có:

$$8i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ xy = 4 \text{ và } x, y \text{ cùng dấu} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = -2 \end{cases}.$$

Tức là, biệt số Δ có hai căn bậc hai là $\pm(2 + 2i)$.

Nên phương trình đó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{4i + (2 + 2i)}{2} = 1 + 3i; \quad z_2 = \frac{4i - (2 + 2i)}{2} = -1 + i.$$

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$z^2 - 4iz - 4 = 2i \Leftrightarrow (z - 2i)^2 = 2i = (1 + i)^2$$

$$\Leftrightarrow z - 2i = \pm(1 + i) \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + 3i \\ z_2 = -1 + i \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_1 = 2 - i$ và $z_2 = 1 + i$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương trình có $\Delta = 3^2 - 4(3 + i) = -3 - 4i$.

Giả sử số $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $\Delta = -3 - 4i$, tức là ta có:

$$-3 - 4i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{x} \\ x^2 - \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{x} \\ x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{x} \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ và } y = -2 \\ x = -1 \text{ và } y = 2 \end{cases}.$$

Tức là, biệt số Δ có hai căn bậc hai là $\pm(1 - 2i)$.

Nên phương trình đó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{3 + (1 - 2i)}{2} = 2 - i; \quad z_2 = \frac{3 - (1 - 2i)}{2} = 1 + i.$$

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$z^2 - 3z + \frac{9}{4} = -\frac{3}{4} - i \Leftrightarrow \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} - i = \left(\frac{1}{2} - i\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z - \frac{3}{2} = \pm \left(\frac{1}{2} - i\right) \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 - i \\ z_2 = 1 + i \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_1 = 2 - i$ và $z_2 = 1 + i$.

 **Nhận xét:** Như vậy, với một số phương trình bậc hai dạng đặc thù chúng ta còn có thể tìm được nghiệm của nó bằng các phép biến đổi đại số.

Ví dụ 3: (Bài 19.c/tr 196 – SGK): Giải phương trình sau:

$$z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0.$$

 **Giải**

Phương trình có:

$$\Delta = (1 - 3i)^2 + 8(1 + i) = -8 - 6i + 8 + 8i = 2i.$$

Giả sử số $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $\Delta = 2i$, tức là ta có:

$$2i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}.$$

Tức là, biệt số Δ có hai căn bậc hai là $\pm(1 + i)$.

Nên phương trình đó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{3i - 1 + (1 + i)}{2} = 2i; \quad z_2 = \frac{3i - 1 - (1 + i)}{2} = -1 + i.$$

Ví dụ 4: (Bài 20.c/tr 196 – SGK):

- Hỏi công thức Vi-ét về phương trình bậc hai với hệ số thực có còn đúng cho phương trình bậc hai với hệ số phức không? Vì sao?
- Tìm hai số phức, biết tổng của chúng bằng $4 - i$ và tích của chúng bằng $5(1 - i)$.
- Có phải mọi phương trình bậc hai $z^2 + Bz + C = 0$ (B, C là hai số phức) nhận hai nghiệm là hai số phức liên hợp không thực phải có các hệ số B, C là hai số thực? Vì sao? Điều ngược lại có đúng không?

 **Giải**

- a. Công thức Vi-ét về phương trình bậc hai với hệ số thực vẫn đúng cho phương trình bậc hai với hệ số phức không, vì:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{-B + \delta}{2A} + \frac{-B - \delta}{2A} = -\frac{B}{A} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{-B + \delta}{2A} \cdot \frac{-B - \delta}{2A} = \frac{B^2 - \delta^2}{4A} = \frac{B^2 - \Delta}{4A} = \frac{4AC}{4A^2} = \frac{C}{A} \end{cases}$$

- b. Với hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện đầu bài, ta có:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 - i \\ z_1 \cdot z_2 = 5(1 - i) \end{cases}$$

suy ra z_1, z_2 là nghiệm của phương trình: $z^2 - (4 - i)z + 5(1 - i) = 0$

phương trình có $\Delta = (4 - i)^2 - 20(1 - i) = -5 + 12i$.

Giả sử số $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $\Delta = -5 + 12i$, tức là ta có:

$$-5 + 12i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ và } y = 3 \\ x = -2 \text{ và } y = -3 \end{cases}$$

Tức là, biệt số Δ có hai căn bậc hai là $\pm(2 + 3i)$.

Nên phương trình đó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{4 - i + (2 + 3i)}{2} = 3 + i; \quad z_2 = \frac{4 - i - (2 + 3i)}{2} = 1 - 2i.$$

Vậy, hai số cần tìm là $3 + i$ và $1 - 2i$.

- c. Mọi phương trình bậc hai $z^2 + Bz + C = 0$ (B, C là hai số phức) nhận hai nghiệm z và $\bar{z}$ là hai số phức liên hợp không thực phải có các hệ số B, C là hai số thực.

Thật vậy:

$$-B = z + \bar{z} \text{ là số thực} \Rightarrow B \text{ là số thực.}$$

$$C = z \cdot \bar{z} \text{ là số thực} \Rightarrow C \text{ là số thực.}$$

Điều ngược lại vẫn đúng.

 **Nhận xét:** Như vậy, qua ví dụ trên:

- Ở câu a) chúng ta khẳng định được rằng định lí Vi-ét đúng với mọi phương trình bậc hai.
- Ở câu b) chúng ta sử dụng định lí Vi-ét để thực hiện một dạng toán quen thuộc là "Tìm hai số biết tổng S và tích P của chúng".
- Ở câu c) chúng ta sử dụng định lí Vi-ét để thực hiện yêu cầu về tính chất hệ số của một phương trình bậc hai thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa việc sử dụng định lí Vi-ét để thực hiện dạng toán "Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn tính chất K ".

Ví dụ 5: (Bài 21.c/tr 197 – Sgk): Tìm số phức B để phương trình bậc hai $z^2 + Bz + 3i = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng 8.

 **Giải**

Giả sử hai nghiệm của phương trình là z_1, z_2 , suy ra:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -B \\ z_1 \cdot z_2 = 3i \end{cases}$$

Khi đó:

$$8 = z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = B^2 - 6i \Leftrightarrow B^2 = 8 + 6i = (3 + i)^2 \\ \Leftrightarrow B = \pm(3 + i).$$

Vậy, với $B = \pm(3 + i)$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 6: (Bài 25.b/tr 199 – Sgk): Tìm các số thực a, b, c để phương trình (với ẩn z) $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ làm nghiệm và cũng nhận $z = 2$ làm nghiệm.

 **Giải**

Ta lần lượt có:

- Để $z = 1 + i$ làm một nghiệm của phương trình điều kiện là:

$$0 = (1 + i)^3 + a(1 + i)^2 + b(1 + i) + c = (b + c - 2) + (2a + b + 2)i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b + c - 2 = 0 \\ 2a + b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 2 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \quad (I)$$

- Để $z = 2$ làm một nghiệm của phương trình điều kiện là:

$$0 = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c + 8. \quad (*)$$

Giải hệ tạo bởi (I) và (*), ta được $a = -4, b = 6, c = -4$.

 **Chú ý:** Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới các phương trình bậc cao được giải nhờ kiến thức về phương trình bậc hai. Trước tiên là các phương trình bậc ba giải được bằng cách chuyển về dạng tích.

Ví dụ 7: Giải các phương trình sau và biểu diễn hình học tập hợp các nghiệm của mỗi phương trình (trên mặt phẳng phức):

a. (Bài 24.a/tr 199 – Sgk): $z^3 + 1 = 0$.

b. $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$.

 **Giải**

a. Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(z + 1)(z^2 - z + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z + 1 = 0 \\ z^2 - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = -1 \\ z_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm z_0, z_1, z_2 và chúng theo thứ tự được biểu diễn bằng các điểm $M_0(-1; 0)$, $M_1\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và $M_2\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ trên mặt phẳng phức.

b. Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(z - 1)(z^2 - 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 1 = 0 \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{1,2} = 1 \pm i \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm z_0, z_1, z_2 và chúng theo thứ tự được biểu diễn bằng các điểm $M_0(1; 0)$, $M_1(1; 1)$ và $M_2(1; -1)$ trên mặt phẳng phức.

 **Nhận xét:** Như vậy, qua ví dụ trên:

a. Ở câu a) chúng ta sử dụng hằng đẳng thức để biến đổi phương trình ban đầu về dạng tích.

b. Ở câu b) chúng ta sử dụng kết quả $a + b + c + d = 0$ thì phương trình $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ (với a, b, c, d là những số thực) có nghiệm bằng 1, do đó nó được phân tích thành:

$$(z - 1)(Az^2 + Bz + C) = 0.$$

Tương tự, nếu phương trình $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ có:

$$a - b + c - d = 0$$

thì nó có nghiệm bằng -1 , do đó nó được phân tích thành:

$$(z + 1)(Az^2 + Bz + C) = 0.$$

c. Các em học sinh hãy chứng minh rằng "Kết quả trên vẫn đúng với phương trình bậc ba có hệ số phức".

Ví dụ 8: Cho phương trình: $z^3 - 2(1 + i)z^2 + 3iz + 1 - i = 0$.

a. Do đâu có thể nhận thấy nhanh chóng rằng $z = 1$ là một nghiệm của phương trình đó?

b. Tìm các số phức α, β để có phân tích:

$$z^3 - 2(1 + i)z^2 + 3iz + 1 - i = (z - 1)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

rồi giải phương trình đã cho.

 Giải

- a. Ta có: $a + b + c + d = 1 - 2(1 + i) + 3i + 1 - i = 0$ nên phương trình nhận $z = 1$ làm một nghiệm.
b. Ta có biến đổi:

$$\begin{aligned} z^3 - 2(1 + i)z^2 + 3iz + 1 - i &= (z - 1)(z^2 + \alpha z + \beta) \\ &= z^3 - (1 - \alpha)z^2 + (\beta - \alpha)z - \beta \\ \Rightarrow \begin{cases} 2(1 + i) = 1 - \alpha \\ 3i = \beta - \alpha \\ 1 - i = -\beta \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 - 2i \\ \beta = -1 + i \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(z - 1)[z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i] \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = 1 \\ z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Với phương trình (*), ta có: $\Delta = (1 + 2i)^2 + 4(1 - i) = 1$.

Nên phương trình đó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{1 + 2i + 1}{2} = 1 + i; \quad z_2 = \frac{1 + 2i - 1}{2} = i.$$

Vậy, phương trình có các nghiệm 1, $1 + i$ và i .

 **Nhận xét:** Tóm lại để giải phương trình bậc ba:

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \text{ với } a \neq 0. \quad (1)$$

ta thực hiện các bước:

Bước 1: Đoán nghiệm z_0 của (1).

Bước 2: Phân tích (1) thành:

$$\begin{aligned} (z - z_0)(az^2 + b_1z + c_1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z = z_0 \\ g(z) = az^2 + b_1z + c_1 = 0 \quad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Bước 3: Giải phương trình (*) rồi kết luận nghiệm của phương trình.

Lưu ý:

1. Dự đoán nghiệm dựa vào các kết quả sau:

- Nếu $a + b + c + d = 0$ thì (1) có nghiệm $z = 1$.
- Nếu $a - b + c - d = 0$ thì (1) có nghiệm $z = -1$.
- Nếu a, b, c, d nguyên và (1) có nghiệm hữu tỷ $\frac{p}{q}$ thì p, q theo thứ tự là ước của d và a .
- Nếu $ac^3 = b^3d$ ($a, d \neq 0$) thì (1) có nghiệm $z = -\frac{c}{b}$.

2. Với các phương trình có chứa tham số có thể coi tham số là ẩn để thực hiện việc phân tích đa thức.

Ví dụ 9: Giải các phương trình sau:

a. $3z^3 - 8z^2 + 10z - 4 = 0$.

b. $z^3 + z^2 - z\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$.

 **Giải**

a. Nhận xét rằng:

$a = 3$ có ước là $\pm 1, \pm 3$ và $d = -4$ có ước là $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

do đó phương trình nếu có nghiệm hữu tỷ thì chỉ có thể là một trong các giá trị $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}$.

Nhận thấy $z = \frac{2}{3}$ là nghiệm của phương trình, nên phương trình có dạng:

$$(3z - 2)(z^2 - 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3z - 2 = 0 \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = \frac{2}{3} \\ z_{1,2} = 1 \pm i \end{cases}$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $z_0 = \frac{2}{3}, z_{1,2} = 1 \pm i$.

b. Nhận xét rằng:

$$ac^3 = 1 \cdot (-\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2} = b^3d$$

do đó phương trình có nghiệm $z = -\frac{c}{b} = \sqrt{2}$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(z - \sqrt{2})(z^2 + (\sqrt{2} + 1)z + 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - \sqrt{2} = 0 \\ z^2 + (\sqrt{2} + 1)z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = \sqrt{2} \\ z_{1,2} = \frac{-(\sqrt{2} + 1) \pm i\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm.

 **Chú ý:** Khi đã thành thạo các phương pháp nhằm nghiệm các bạn học sinh không cần nêu nhận xét trong lời giải cho mỗi phương trình.

Ví dụ 10: Cho phương trình:

$$z^3 - (2m + 1)z^2 + 3(m + 4)z - m - 12 = 0. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = \frac{1}{2} - 12i$.

b. Xác định m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

c. Xác định các giá trị thực của m để phương trình có 2 nghiệm không thực phân biệt.

 Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(z - 1)(z^2 - 2mz + m + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = 1 \\ g(z) = z^2 - 2mz + m + 12 = 0 \end{cases} \quad (*) \quad (I)$$

a. Với $m = \frac{1}{2} - 12i$, phương trình (*) có dạng:

$$z^2 - 2\left(\frac{1}{2} - 12i\right)z + \frac{1}{2} - 12i + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2z^2 - 2(1 - 24i)z - 24i + 25 = 0 \quad (**)$$

phương trình có:

$$\Delta' = (1 - 24i)^2 + 2(24i - 25) = -625 \Rightarrow \Delta' \text{ có hai căn bậc hai là } \pm 25i.$$

Nên phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{1 - 24i + 25i}{2} = \frac{1 + i}{2}; \quad z_2 = \frac{1 - 24i - 25i}{2} = \frac{1 - 49i}{2}.$$

Vậy, với $m = \frac{1}{2} - 12i$ phương trình có ba nghiệm phân biệt z_0, z_1 và z_2 .

b. Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt điều kiện là:

(*) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g \neq 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 12 \neq 0 \\ 13 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \notin \{-3; 4; 13\}.$$

Vậy, với $m \notin \{-3; 4; 13\}$ phương trình có ba nghiệm phân biệt.

c. Để phương trình (1) có 2 nghiệm phức phân biệt điều kiện là:

(*) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \Delta'_g < 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 12 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 4.$$

Vậy, với $m \in (-3; 4)$ phương trình có 2 nghiệm phức phân biệt.

 **Nhận xét:** Như vậy, qua ví dụ trên:

a. Ở câu a) chúng ta sử dụng $\Delta' = B'^2 - AC$ thay cho Δ và khi đó phương trình $Ax^2 + Bx + C = 0$ có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-B' + \delta}{A} \text{ và } z_2 = \frac{-B' - \delta}{A}$$

trong đó δ là một căn bậc hai của Δ' .

b. Ở câu b) chúng ta sử dụng điều kiện $\Delta'_g \neq 0$ để phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt.

c. Ở câu c) chúng ta sử dụng điều kiện $\Delta'_g < 0$ để phương trình bậc hai có hai nghiệm phức phân biệt.

Ví dụ 11: Cho phương trình:

$$2(m-2)z^3 - (5m-2)z^2 + 2z - m - 1 = 0. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = -\frac{3}{2}i$.

b. Xác định các giá trị thực của m để phương trình có đúng một nghiệm thực.

 **Giải**

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(2z-1)[(m-2)z^2 - 2mz + m+1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = \frac{1}{2} \\ g(z) = (m-2)z^2 - 2mz + m+1 = 0 \end{cases} \quad (*) \quad (I)$$

a. Với $m = -\frac{3}{2}i$, phương trình (*) có dạng:

$$\left(-\frac{3}{2}i - 2\right)z^2 + 3iz - \frac{3}{2}i + 1 = 0 \Leftrightarrow (-3i - 4)z^2 + 6iz - 3i + 2 = 0 \quad (**)$$

phương trình có $\Delta' = (3i)^2 - (3i+4)(3i-2) = -9 - (-9 - 8 + 6i) = 8 - 6i$.

Giả sử số $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $\Delta = 8 - 6i$, tức là ta có:

$$8 - 6i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ x^2 - \left(-\frac{3}{x}\right)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ và } y = -1 \\ x = -3 \text{ và } y = 1 \end{cases}$$

Tức là, biệt số Δ' có hai căn bậc hai là $\pm(3 - i)$.

Nên phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{-3i + 3 - i}{-3i - 4} = \frac{4i - 3}{4 + 3i} = \frac{(4 + 3i)i}{4 + 3i} = i;$$

$$z_2 = \frac{-3i - 3 + i}{-3i - 4} = \frac{3 + 2i}{4 + 3i} = \frac{(3 + 2i)(4 - 3i)}{3^2 + 4^2} = \frac{1}{25}(18 - i).$$

Vậy, với $m = -\frac{3}{2}i$ phương trình có ba nghiệm phân biệt z_0, z_1 và z_2 .

b. Để phương trình (1) có đúng một nghiệm thực điều kiện là:

$$(*) \text{ có hai nghiệm phức hoặc có duy nhất nghiệm } z = \frac{1}{2}.$$

Trường hợp 1: Nếu $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow -4z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow m = 2 \text{ không thỏa mãn.}$$

Trường hợp 2: Nếu $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

Khi đó, điều kiện là:

$$\begin{cases} \Delta'_g < 0 \\ \Delta'_g = 0 \\ g(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 < 0 \\ m + 2 = 0 \Leftrightarrow m \leq -2. \\ m + 2 = 0 \end{cases}$$

Vậy, với $m \leq -2$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

 **Chú ý:** Các em học sinh cần biết:

1. Phương trình (**) cũng có thể được giải bằng cách biến đổi tiếp:

$$\begin{aligned} (4 + 3i)z^2 - 6iz + 3i - 2 &= 0 \Leftrightarrow z^2 - \frac{6i}{4 + 3i}z + \frac{3i - 2}{4 + 3i} = 0 \\ \Leftrightarrow z^2 - \frac{6i(4 - 3i)}{3^2 + 4^2}z + \frac{(3i - 2)(4 - 3i)}{3^2 + 4^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 25z^2 - 2(12i + 9)z + 18i + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (***)$$

phương trình có:

$$\Delta' = (12i + 9)^2 - 25(18i + 1) = -88 - 234i.$$

Giả sử số $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $\Delta = -88 - 234i$, tức là ta có:

$$-88 - 234i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -88 \\ 2xy = -234 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{117}{x} \\ x^2 - \left(-\frac{117}{x}\right)^2 = -88 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{117}{x} \\ x^4 + 88x^2 - 13689 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{117}{x} \\ x^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \text{ và } y = -13 \\ x = -9 \text{ và } y = 13 \end{cases}$$

Tức là, biệt số Δ' có hai căn bậc hai là $\pm(9 - 13i)$.

Nên phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{12i + 9 + 9 - 13i}{25} = \frac{1}{25}(18 - i); \quad z_2 = \frac{12i + 9 - 9 + 13i}{25} = i.$$

2. Nếu phương trình có chứa tham số m , ta có thể coi m là ẩn, còn x là tham số để tìm nghiệm m . Sau đó tìm lại x theo m .

Ví dụ 12: Cho phương trình:

$$m^2 z^3 - 3mz^2 + (m^2 + 2)z - m = 0, \text{ với } m \neq 0. \quad (1)$$

- Giải phương trình với $m = i$.
- Xác định các giá trị thực của m để phương trình có ba nghiệm thực phân biệt.

Giải

Viết lại phương trình về dạng:

$$(z^3 + z)m^2 - (3z^2 + 1)m + 2z = 0$$

Coi m là ẩn, còn z là tham số, ta được phương trình bậc 2 theo m . Giải ra ta được:

$$\begin{cases} m = \frac{1}{x} \\ m = \frac{2x}{x^2 + 1} \end{cases}$$

Do đó, phương trình được chuyển về dạng:

$$(mz - 1)(mz^2 - 2z + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} mz - 1 = 0 & (2) \\ g(z) = mz^2 - 2z + m = 0 & (3) \end{cases} \quad (I)$$

- Với $m = i$, ta lần lượt có:

- Phương trình (2) có dạng:

$$iz - 1 = 0 \Leftrightarrow iz = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{i} = -i.$$

- Phương trình (3) có dạng:

$$\begin{aligned} iz^2 - 2z + i = 0 &\Leftrightarrow -z^2 - 2iz - 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2iz + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (z + i)^2 = -2 \Leftrightarrow z = -i \pm i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vậy, với $m = i$ phương trình có ba nghiệm phân biệt $z = -i$ và $z = -i \pm i\sqrt{2}$.

- Phương trình có ba nghiệm thực phân biệt điều kiện là:

Phương trình (3) có hai nghiệm thực phân biệt khác $\frac{1}{m}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ g\left(-\frac{1}{m}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - m^2 > 0 \\ m - \frac{1}{m} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ |m| < 1 \end{cases}$$

Vậy, với $m \in (-1; 1) \setminus \{0\}$ phương trình có ba nghiệm thực phân biệt.

 **Chú ý:** Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới các phương trình bậc bốn được bằng cách chuyển về dạng tích. Để thực hiện giải phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ($a \neq 0$) theo phương pháp này các em học sinh cần nắm chắc các phương pháp đoán nhận nghiệm dựa vào các kết quả sau:

- ✚ Nếu $a + b + c + d + e = 0$ thì phương trình có nghiệm $x = 1$.
- ✚ Nếu $a - b + c - d + e = 0$ thì phương trình có nghiệm $x = -1$.
- ✚ Nếu a, b, c, d, e nguyên và phương trình có nghiệm hữu tỷ $\frac{p}{q}$ thì p, q theo thứ tự là ước của e và a .

Ví dụ 13: (Bài 24.b, 24.c và 24.d/tr 199 – Sgk): Giải các phương trình sau và biểu diễn hình học tập hợp các nghiệm của mỗi phương trình (trong mặt phẳng phức):

a. $z^4 - 1 = 0$. b. $z^4 + 4 = 0$. c. $8z^4 + 8z^3 = z + 1$.

 **Giải**

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow z = \pm 1 \text{ và } z = \pm i.$$

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$z^4 - 4i^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 2i)(z^2 + 2i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 2i & (1) \\ z^2 = -2i & (2) \end{cases}.$$

Ta lần lượt:

- Với phương trình (1), giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $2i$, tức là ta có:

$$\begin{aligned} 2i &= (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ xy = 1 \text{ và } x, y \text{ cùng dấu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Suy ra, phương trình (1) có hai nghiệm là $\pm(1 + i)$.

- Với phương trình (2), giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $-2i$, tức là ta có:

$$\begin{aligned} -2i &= (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ xy = -1 \text{ và } x, y \text{ trái dấu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = \pm 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y = 1 \\ x = -y = -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Suy ra, phương trình (2) có hai nghiệm là $\pm(1 - i)$.

Vậy, phương trình đã cho có bốn nghiệm là $\pm(1 + i)$ và $\pm(1 - i)$.

c. Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$8z^3(z+1) = z+1 \Leftrightarrow (z+1)(8z^3-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+1)(2z-1)(4z^2+2z+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = \frac{1}{2} \\ 4z^2+2z+1 = 0. (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) có biệt thức $\Delta' = -3$ nên nó có hai nghiệm $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4}$.

Vậy, phương trình có các nghiệm $z_1 = -1, z_2 = \frac{1}{2}, z_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4}$.

 **Nhận xét:** Như vậy, qua ví dụ trên:

- Ở câu a) chúng ta sử dụng hằng đẳng thức để chuyển phương trình ban đầu về tích của hai phương trình bậc hai.
- Ở câu b) chúng ta sử dụng tính chất $i^2 = -1$ để làm xuất hiện dạng $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.
- Ở câu c) chúng ta kết hợp sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử và hằng đẳng thức để chuyển phương trình ban đầu về dạng tích.

Ví dụ 14: (Bài 39.c/tr 209 – Sgk): Giải phương trình sau:
 $(z^2 + 1)^2 + (z + 3)^2 = 0$.

 **Giải**

Biến đổi phương trình có dạng:

$$(z^2 + 1)^2 - i^2(z + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow [z^2 + 1 - i(z + 3)][z^2 + 1 + i(z + 3)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 1 = (z + 3)i \\ z^2 + 1 = -(z + 3)i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - iz + 1 - 3i = 0 & (1) \\ z^2 + iz + 1 + 3i = 0 & (2) \end{cases}$$

Khi đó:

- Với phương trình (1), ta có:

$$\Delta_{(1)} = i^2 - 4(1 - 3i) = -5 + 12i.$$

Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là một căn bậc hai của $-5 + 12i$, ta có:

$$(x + yi)^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -5 + 12i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{a} \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ và } y = 3 \\ x = -2 \text{ và } y = -3 \end{cases}$$

Tức là, biệt số $\Delta_{(1)}$ có hai căn bậc hai là $\pm(2 + 3i)$.

Nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{i + (2 + 3i)}{2} = 1 + 2i; \quad z_2 = \frac{i - (2 + 3i)}{2} = -1 - i.$$

▪ Với phương trình (2), ta có:

$$\Delta_{(2)} = i^2 - 4(1 + 3i) = -5 - 12i.$$

Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là một căn bậc hai của $-5 - 12i$, ta có:

$$(x + yi)^2 = -5 - 12i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -5 - 12i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{6}{x} \\ x^2 - \left(-\frac{6}{x}\right)^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{6}{x} \\ x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{6}{x} \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{6}{x} \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ và } y = -3 \\ x = -2 \text{ và } y = 3 \end{cases}.$$

Tức là, biệt số $\Delta_{(2)}$ có hai căn bậc hai là $\pm(2 - 3i)$.

Nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_3 = \frac{i + (2 - 3i)}{2} = 1 - i; \quad z_4 = \frac{i - (2 - 3i)}{2} = -1 + 2i.$$

Vậy, phương trình đã cho có bốn nghiệm là $1 + 2i, -1 - i, 1 - i$ và $-1 + 2i$.

 **Chú ý:** Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới việc giải các phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

Ví dụ 15: (Bài 39.a và 39.b/tr 209 – Sgk): Giải các phương trình:

a. $(z + 3 - i)^2 - 6(z + 3 - i) + 13 = 0.$

b. $\left(\frac{iz + 3}{z - 2i}\right)^2 - 3\frac{iz + 3}{z - 2i} - 4 = 0.$

 **Giải**

a. Đặt $t = z + 3 - i$, khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 - 6t + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 - 2i \\ t = 3 + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + 3 - i = 3 - 2i \\ z + 3 - i = 3 + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i \\ z = 3i \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z = -i$ và $z = 3i$.

b. Đặt $t = \frac{iz + 3}{z - 2i}$, khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}.$$

- Với $t = -1$, ta có phương trình:

$$\frac{iz + 3}{z - 2i} = -1 \Leftrightarrow iz + 3 = -z + 2i \Leftrightarrow (1 + i)z = -3 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-3 + 2i}{1 + i} = \frac{(-3 + 2i)(1 - i)}{2} = \frac{-1 + 5i}{2}.$$

- Với $t = 4$, ta có phương trình:

$$\frac{iz + 3}{z - 2i} = 4 \Leftrightarrow iz + 3 = 4z - 8i \Leftrightarrow (4 - i)z = 3 + 8i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3 + 8i}{4 - i} = \frac{(3 + 8i)(4 + i)}{17} = \frac{4 + 35i}{17}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z = \frac{-1 + 5i}{2}$ và $z = \frac{4 + 35i}{17}$.

 **Chú ý:** Chúng ta đều biết rằng các phương trình trùng phương dạng:

$$az^4 + bz^2 + c = 0$$

được giải bằng việc sử dụng ẩn phụ $t = z^2$.

Ví dụ 16: Giải các phương trình sau:

a. $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$.

b. $z^4 - (2 - i)z^2 - 2i = 0$.

 **Giải**

- a. Đặt $t = z^2$, phương trình được chuyển về dạng:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ hoặc } t = -1.$$

Ta lần lượt:

- Với $t = 4$, ta được:

$$z^2 = 4 \Leftrightarrow z_{1,2} = \pm 2.$$

- Với $t = -1$, ta được:

$$z^2 = -1 \Leftrightarrow z_{3,4} = \pm i.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm $z_{1,2} = \pm 2$ và $z_{3,4} = \pm i$.

- b. Đặt $t = z^2$, phương trình được chuyển về dạng:

$$t^2 - (2 - i)t - 2i = 0$$

phương trình có:

$$\Delta = (2 - i)^2 + 8i = 3 + 4i = (2 + i)^2$$

nên nó có hai nghiệm phân biệt là:

$$t_1 = \frac{2 - i + (2 + i)}{2} = 2; \quad t_2 = \frac{2 - i - (2 + i)}{2} = -i.$$

Ta lần lượt:

- Với $t = 2$, ta được:

$$z^2 = 2 \Leftrightarrow z_{1,2} = \pm \sqrt{2}.$$

- Với $t = i$, ta được:

$$z^2 = -i. \quad (*)$$

Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $-i$, ta có:

$$\begin{aligned} -i &= (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ 2xy = -1 \text{ và } x, y \text{ trái dấu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Suy ra, phương trình (*) có hai nghiệm là $z_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$.

Vậy, phương trình có bốn nghiệm $z_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$ và $z_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$.

Ví dụ 17: Tìm điều kiện cần và đủ về các số thực p, q để phương trình:

$$z^4 + pz^2 + q = 0. \quad (1)$$

- Chỉ có nghiệm thực.
- Không có nghiệm thực.
- Có cả nghiệm thực và nghiệm không thực.

 **Giải**

Đặt $t = z^2$, phương trình được chuyển về dạng:

$$t^2 + pt + q = 0. \quad (2)$$

- a. Để phương trình (1) chỉ có nghiệm thực điều kiện là:

Phương trình (2) chỉ có nghiệm $t \geq 0$ ($0 \leq t_1 \leq t_2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4q \geq 0 \\ -p \geq 0 \\ q \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4q \geq 0 \\ p \leq 0 \\ q \geq 0 \end{cases}.$$

Vậy, với $p^2 - 4q \geq 0$, $p \leq 0$ và $q \geq 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

- b. Để phương trình (1) không có nghiệm thực điều kiện là:

Phương trình (2) không có nghiệm thực hoặc chỉ có nghiệm $t \leq 0$ ($t_1 \leq t_2 \leq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4q < 0 \\ \begin{cases} p^2 - 4q \geq 0 \\ -p < 0 \\ q > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4q < 0 \\ \begin{cases} p^2 - 4q \geq 0 \\ p > 0 \\ q > 0 \end{cases} \end{cases}.$$

Vậy, với $p^2 - 4q < 0$ hoặc $p^2 - 4q \geq 0$, $p > 0$ và $q > 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

- c. Để phương trình (1) có cả nghiệm thực và nghiệm không thực điều kiện là:
 Phương trình (2) chỉ có nghiệm t thỏa mãn $t_1 < 0 \leq t_2$
 $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) chỉ có nghiệm t thỏa mãn $t_1 < 0 < t_2$ hoặc $t_1 < 0 = t_2$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ \begin{cases} P = 0 \\ S < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q < 0 \\ \begin{cases} q = 0 \\ -p < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q < 0 \\ \begin{cases} q = 0 \\ p > 0 \end{cases} \end{cases}$

Vậy, với $q < 0$ hoặc $q = 0$ và $p > 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

 **Chú ý:** Chúng ta đều biết rằng để giải các phương trình hồi quy dạng:

$$az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a = 0 \quad (a \neq 0). \quad (1)$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Nhận xét rằng $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $z^2 \neq 0$, ta được:

$$a\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c = 0. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = z + \frac{1}{z}$ suy ra $z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 - 2$.

Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$at^2 + bt + c - 2a = 0. \quad (3)$$

Bước 3: Giải phương trình (3) để tìm t , từ đó suy ra giá trị của z .
 Với những bài toán có tham số yêu cầu thường được đặt thêm ra là tìm điều kiện của tham số để phương trình:

- Chỉ có nghiệm thực.
- Không có nghiệm thực.
- Có cả nghiệm thực và nghiệm không thực.

Khi đó, các em học sinh cần lưu ý tới điều kiện của t trong tập số thực là $|t| \geq 2$.

Ví dụ 18: Giải các phương trình sau:

- $2z^4 - 7z^3 + 9z^2 - 7z + 2 = 0$.
- $z^4 + (1 + 2i)z^3 + 2(1 + i)z^2 + (1 + 2i)z + 1 = 0$.
- $2z^4 - (7 + i)z^3 + 2(5 + i)z^2 - (7 + i)z + 2 = 0$.

 **Giải**

a. Nhận xét rằng $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $z^2 \neq 0$, ta được:

$$2z^2 - 7z + 9 - \frac{7}{z} + \frac{2}{z^2} = 0 \Leftrightarrow 2\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 7\left(z + \frac{1}{z}\right) + 9 = 0.$$

Đặt $t = z + \frac{1}{z}$, suy ra $z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 - 2$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2(t^2 - 2) - 7t + 9 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 7t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = \frac{5}{2}.$$

Ta lần lượt:

▪ Với $t = 1$, ta được:

$$z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

▪ Với $t = \frac{5}{2}$, ta được:

$$z + \frac{1}{z} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - 5z + 2 = 0 \Leftrightarrow z_3 = 2 \text{ và } z_4 = \frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm $z_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = 2$ và $z_4 = \frac{1}{2}$.

b. Nhận xét rằng $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $z^2 \neq 0$, ta được:

$$z^2 + (1 + 2i)z + 2(1 + i) + (1 + 2i)\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + (1 + 2i)\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2(1 + i) = 0.$$

Đặt $t = z + \frac{1}{z}$, suy ra $z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 - 2$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 - 2 + (1 + 2i)t + 2(1 + i) = 0 \Leftrightarrow t^2 + (1 + 2i)t + 2i = 0$$

phương trình này có $a + b + c = 0$ nên có nghiệm $t = -1$ hoặc $t = -2i$.

Ta lần lượt:

▪ Với $t = -1$, ta được:

$$z + \frac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

▪ Với $t = -2i$, ta được:

$$z + \frac{1}{z} = -2i \Leftrightarrow z^2 + 2iz + 1 = 0 \Leftrightarrow z_{3,4} = \frac{-2i \pm 2i\sqrt{2}}{2} = (-1 \pm \sqrt{2})i.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm $z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ và $z_{3,4} = (-1 \pm \sqrt{2})i$.

c. Nhận xét rằng $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $z^2 \neq 0$, ta được:

$$2z^2 - (7 + i)z + 2(5 + i) - (7 + i)\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - (7 + i)\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2(5 + i) = 0.$$

Đặt $t = z + \frac{1}{z}$, suy ra $z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 - 2$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2(t^2 - 2) - (7 + i)t + 2(5 + i) = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - (7 + i)t + 2i + 6 = 0$$

phương trình này có:

$$\Delta = (7 + i)^2 - 4.2(2i + 6) = -2i = (i - 1)^2$$

nên nó có nghiệm:

$$t_1 = \frac{7 + i + (i - 1)}{4} = \frac{1}{2}(i + 3) \text{ hoặc } t_2 = \frac{7 + i - (i - 1)}{4} = 2.$$

Ta lần lượt:

- Với $t_1 = \frac{1}{2}(i + 3)$, ta được:

$$z + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}(i + 3) \Leftrightarrow 2z^2 - (i + 3)z + 2 = 0$$

phương trình này có:

$$\Delta = (i + 3)^2 - 4.2.2 = -8 + 6i = (3i + 1)^2$$

nên nó có nghiệm:

$$z_1 = \frac{i + 3 + (3i + 1)}{4} = 1 + i \text{ hoặc } z_2 = \frac{i + 3 - (3i + 1)}{4} = \frac{1}{2}(1 - i).$$

- Với $t = 2$, ta được:

$$z + \frac{1}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow z_3 = 1.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \frac{1}{2}(1 - i)$ và $z_3 = 1$.

 **Chú ý:** Tiếp theo, chúng ta quan tâm tới dạng mở rộng của phương trình hồi quy là:

$$az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0 \text{ với } a \neq 0 \text{ và } \frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2.$$

Ví dụ 19: Giải phương trình:

$$z^4 - (3 + i)z^3 + (4 + 3i)z^2 - 2(3 + i)z + 4 = 0.$$

 **Giải**

Nhận xét rằng $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $z^2 \neq 0$, ta được:

$$z^2 - (3 + i)z + (4 + 3i) - 2(3 + i)\frac{1}{z} + \frac{4}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z^2 + \frac{4}{z^2}\right) - (3 + i)\left(z + \frac{2}{z}\right) + 4 + 3i = 0.$$

Đặt $t = z + \frac{2}{z}$, suy ra $z^2 + \frac{4}{z^2} = t^2 - 4$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 - 4 - (3 + i)t + 3i + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - (3 + i)t + 3i = 0$$

phương trình này có:

$$\Delta = (3 + i)^2 - 4 \cdot 3i = 8 - 6i = (3 - i)^2$$

nên nó có nghiệm:

$$t_1 = \frac{3 + i + (3 - i)}{2} = 3 \text{ hoặc } t_2 = \frac{3 + i - (3 - i)}{2} = i.$$

Ta lần lượt:

- Với $t_1 = 3$, ta được:

$$z + \frac{2}{z} = 3 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 1 \text{ hoặc } z_2 = 2.$$

- Với $t_2 = i$, ta được:

$$z + \frac{2}{z} = i \Leftrightarrow z^2 - iz + 2 = 0$$

phương trình này có $\Delta = (-i)^2 - 4 \cdot 2 = -9 = (3i)^2$ nên nó có nghiệm:

$$z_3 = \frac{i + 3i}{2} = 2i \text{ hoặc } z_4 = \frac{i - 3i}{2} = -i.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = 2i$ và $z_4 = -i$.

 **Chú ý:** Nhiều phương trình ở dạng ban đầu không phải là một phương trình hồi quy, tuy nhiên với phép đặt ẩn phụ thích hợp ta có thể chuyển chúng về dạng hồi quy. Từ đó, áp dụng phương pháp đã biết để giải. Ví dụ sau sẽ minh họa trường hợp này.

Ví dụ 20: Giải phương trình:

$$(z - 2)^4 + (z - 2)(5z^2 - 14z + 13) + 1 = 0. \quad (1)$$

 **Giải**

Nhận xét rằng đây không phải là một phương trình hồi quy, tuy nhiên nếu đặt ẩn phụ thích hợp ta sẽ có một phương trình hồi quy.

Thật vậy, đặt $y = z - 2$, phương trình được biến đổi về dạng:

$$y^4 + y[5(y + 2)^2 - 14(y + 2) + 13] + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow y^4 + 5y^3 + 6y^2 + 5y + 1 = 0. \quad (2)$$

Nhận xét rằng $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $y^2 \neq 0$, ta được phương trình tương đương:

$$\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 5\left(y + \frac{1}{y}\right) + 6 = 0. \quad (3)$$

Đặt $t = y + \frac{1}{y}$, suy ra $y^2 + \frac{1}{y^2} = t^2 - 2$.

Khi đó, phương trình (3) có dạng:

$$t^2 + 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -1 \text{ hoặc } t_2 = -4.$$

Ta lần lượt:

- Với $t_1 = -1$, ta được:

$$y + \frac{1}{y} = -1 \Leftrightarrow y^2 + y + 1 = 0.$$

phương trình này có $\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$ nên nó có nghiệm:

$$y_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_1 - 2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_1 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2};$$

$$y_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_2 - 2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_2 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}.$$

- Với $t_2 = -4$, ta được:

$$y + \frac{1}{y} = -4 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow z_{3,4} = \pm\sqrt{3}.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt là $z_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$ và $z_{3,4} = \pm\sqrt{3}$.

 **Chú ý:** Chúng ta đều biết rằng để giải các phương trình phản hồi quy dạng:

$$az^4 + bz^3 + cz^2 - bz + a = 0 \quad (a \neq 0). \quad (1)$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Nhận xét rằng $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $z^2 \neq 0$, ta được:

$$a\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + b\left(z - \frac{1}{z}\right) + c = 0. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = z - \frac{1}{z}$ suy ra $z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 + 2$.

Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$at^2 + bt + c + 2a = 0. \quad (3)$$

Bước 3: Giải phương trình (3) để tìm t , từ đó suy ra giá trị của z .

Ví dụ 2.1: Giải phương trình:

$$4z^4 - (6 + 10i)z^3 + (15i - 8)z^2 + (6 + 10i)z + 4 = 0.$$

 **Giải**

Nhận xét rằng $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $z^2 \neq 0$, ta được:

$$4z^2 - (6 + 10i)z + (15i - 8) + (6 + 10i)\frac{1}{z} + \frac{4}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - (6 + 10i)\left(z - \frac{1}{z}\right) + 15i - 8 = 0.$$

Đặt $t = z - \frac{1}{z}$, suy ra $z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 + 2$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$4(t^2 + 2) - (6 + 10i)t + 15i - 8 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - (6 + 10i)t + 15i = 0$$

phương trình này có:

$$\Delta' = (3 + 5i)^2 - 4.15i = -16 - 30i = (3 - 5i)^2$$

nên nó có nghiệm:

$$t_1 = \frac{3 + 5i + (3 - 5i)}{4} = \frac{3}{2} \text{ hoặc } t_2 = \frac{3 + 5i - (3 - 5i)}{4} = \frac{5}{2}i.$$

Ta lần lượt:

- Với $t_1 = \frac{3}{2}$, ta được:

$$z - \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - 3z - 2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 2 \text{ hoặc } z_2 = -\frac{1}{2}.$$

- Với $t_2 = \frac{5}{2}i$, ta được:

$$z - \frac{1}{z} = \frac{5}{2}i \Leftrightarrow 2z^2 - 5iz - 2 = 0$$

phương trình này có $\Delta = (5i)^2 + 4.2.2 = -9 = (3i)^2$ nên nó có nghiệm:

$$z_3 = \frac{5i + 3i}{4} = 2i \text{ hoặc } z_4 = \frac{5i - 3i}{4} = \frac{1}{2}i.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $z_1 = 2$, $z_2 = -\frac{1}{2}$, $z_3 = 2i$ và $z_4 = \frac{1}{2}i$.

 **Chú ý:** Chúng ta đều đã biết cách giải phương trình với hệ số thực dạng:

$$(z + a)(z + b)(z + c)(z + d) = m \quad (1)$$

với $a + b = c + d$ thông qua việc thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$[z^2 + (a + b)z + ab].[z^2 + (c + d)z + cd] = m. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = z^2 + (a + b)z + ab$, suy ra:

$$z^2 + (c + d)z + cd = t - ab + cd.$$

Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$t(t - ab + cd) = m \Leftrightarrow t^2 - (ab - cd)t - m = 0. \quad (3)$$

Bước 3: Giải phương trình (3) để tìm t , từ đó suy ra giá trị của z .

Ví dụ tiếp theo sẽ mở rộng cho dạng phương trình trên với nghiệm phức và các hệ số là những số phức.

Ví dụ 22: Giải phương trình:

$$z(z - 1)(z + 2)(z + 3) = 10.$$

 *Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(z^2 + 2z)(z^2 + 2z - 3) = 10.$$

Đặt $t = z^2 + 2z$, phương trình có dạng :

$$t(t - 3) = 10 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -2 \text{ hoặc } t_2 = 5.$$

Ta lần lượt:

- Với $t_1 = -2$, ta được:

$$z^2 + 2z = -2 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 2 = 0$$

phương trình này có $\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$ nên nó có nghiệm $z_{1,2} = -1 \pm i$.

- Với $t_2 = 5$, ta được:

$$z^2 + 2z = 5 \Leftrightarrow z^2 + 2z - 5 = 0 \Leftrightarrow z_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt là $z_{1,2} = -1 \pm i$ và $z_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}$.

 **Chú ý:** Chúng ta đều đã biết cách giải phương trình với hệ số thực dạng:

$$(z + a)^4 + (z + b)^4 = c \quad (1)$$

thông qua việc thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$, suy ra:

$$\begin{cases} x + a = t + \frac{a-b}{2} \\ x + b = t - \frac{a-b}{2} \end{cases}.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2t^4 + 12\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \cdot t^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 = c. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $u = t^2$, phương trình có dạng:

$$2u^2 + 12\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \cdot u + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 = c. \quad (3)$$

Bước 3: Giải phương trình (3) để tìm t , từ đó suy ra giá trị của z .
Ví dụ tiếp theo sẽ mở rộng cho dạng phương trình trên với nghiệm phức và các hệ số là những số phức.

Ví dụ 23: Giải phương trình $(z + 4)^4 + (z + 6)^4 = 82$.

 *Giải*

Đặt $t = z + \frac{4+6}{2} = z + 5$, suy ra:

$$\begin{cases} z + 4 = t - 1 \\ z + 6 = t + 1 \end{cases}.$$

Khi đó, phương trình được chuyển về dạng:

$$(t-1)^4 + (t+1)^4 = 82 \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 82 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 4 \\ t^2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{1,2} = \pm 2 \\ t_{3,4} = \pm i\sqrt{10} \end{cases}.$$

Ta lần lượt:

- Với $t_1 = 2$, ta được $z_1 + 5 = 2 \Leftrightarrow z_1 = -3$.
- Với $t_2 = -2$, ta được $z_2 + 5 = -2 \Leftrightarrow z_2 = -7$.
- Với $t_{3,4} = \pm i\sqrt{10}$, ta được $z_{3,4} + 5 = \pm i\sqrt{10} \Leftrightarrow z_{3,4} = -5 \pm i\sqrt{10}$.

Vậy, phương trình có bốn nghiệm $z_1 = -3$, $z_2 = -7$ và $z_{3,4} = -5 \pm i\sqrt{10}$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Tìm căn bậc hai của mỗi số phức 1 ; -1 ; i ; $-4i$.

Bài tập 2: Tìm căn bậc hai của mỗi số phức sau:

a. $-1 + 4\sqrt{3}i$.

c. $4 + 6\sqrt{5}i$.

b. $1 - 4\sqrt{3}i$.

d. $-1 - 2\sqrt{6}i$.

Bài tập 3: Hỏi khi số thực a thay đổi tùy ý thì các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các căn bậc hai của $a - i$ vạch nên đường nào?

Bài tập 4: Giải phương trình $z - \frac{1}{z} = k$ trong các trường hợp sau:

a. $k = 1$.

b. $k = \sqrt{2}$.

c. $k = 2i$.

Bài tập 5: Tìm các số thực b, c để phương trình (với ẩn z) $z^2 + bz + c = 0$ nhận $1 + i$ làm một nghiệm.

Bài tập 6: Giải các phương trình sau:

a. $z^2 = z - 1$.

c. $z^2 + (3 - i)z - 2(1 - i) = 0$.

b. $z^2 + 2z + 3 = 0$.

d. $(z^2 + i)(z^2 - 2iz - 1) = 0$.

Bài tập 7: Cho phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ trong đó A, B, C là những số thực $A \neq 0$. Chứng minh rằng nếu $z_0 \in \mathbb{C}$ là một nghiệm của phương trình thì $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm của nó.

Bài tập 8: Tìm hai số phức, biết tổng của chúng bằng $3 + i$ và tích của chúng bằng $4 + 3i$.

Bài tập 9: Tìm số phức B để phương trình bậc hai $z^2 + Bz + 1 = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng -1 .

Bài tập 10: Giải các phương trình sau và biểu diễn hình học tập hợp các nghiệm của mỗi phương trình (trong mặt phẳng phức):

a. $z^3 - 1 = 0$.

c. $z^3 + 5z^2 + 6z + 2 = 0$.

b. $z^3 - 2z^2 + 3z - 2 = 0$.

d. $z^3 - 2z - 4 = 0$.

Bài tập 11: Cho phương trình:

$$z^3 - (2i - 1)z^2 + (3 - 2i)z + 3 = 0.$$

a. Do đâu có thể nhận thấy nhanh chóng rằng $z = -1$ là một nghiệm của phương trình đó ?

b. Tìm các số phức α, β để có phân tích:

$$z^3 - (2i - 1)z^2 + (3 - 2i)z + 3 = (z + 1)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

rồi giải phương trình đã cho.

Bài tập 12: Tìm số thực a, b để có phân tích:

$$2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = (2z - 1)(z^2 + az + b)$$

rồi giải phương trình $2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = 0$.

Bài tập 13: Giải các phương trình sau và biểu diễn hình học tập hợp các nghiệm của mỗi phương trình (trong mặt phẳng phức):

a. $z^4 - 4 = 0$.

c. $z^4 + z^3 = z + 1$.

b. $z^4 + 1 = 0$.

d. $z^4 - z^3 = z - 1$.

Bài tập 14: Giải phương trình:

$$(z^2 - 1)^2 + (z - 3)^2 = 0.$$

Bài tập 15: Tìm các số thực a, b để có phân tích:

$$z^4 - 4z^2 - 16z - 16 = (z^2 - 2z - 4)(z^2 + az + b)$$

rồi giải phương trình $z^4 - 4z^2 - 16z - 16 = 0$.

Bài tập 16: Giải các phương trình:

a. $(z + i)(z^2 + 4)(z^3 - i) = 0$.

b. $(z^2 - z)^2 + 4(z^2 - z) - 12 = 0$.

Bài tập 17: Giải các phương trình:

a. $(z + 2 - 3i)^2 - 6(z + 2 - 3i) + 13 = 0$.

b. $(zi + 1)^2 - 8(zi + 1) + 15 = 0$.

Bài tập 18: Giải các phương trình:

a. $\left(\frac{z-1}{z+i}\right)^2 - 3\frac{z-1}{z+i} + 2 = 0$.

b. $\left(\frac{iz-3}{z+2i}\right)^2 - 2\frac{iz-3}{z+2i} + 2 = 0$.

Bài tập 19: Giải các phương trình:

a. $z^4 - 8z^2 - 9 = 0$.

c. $z^4 + (1 - 3i)z^2 - 2i - 2 = 0$.

b. $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

Bài tập 20: Giải các phương trình sau:

a. $2z^4 + 7z^3 + 9z^2 + 7z + 2 = 0$.

b. $z^4 - (1 + 2i)z^3 + 2(1 + i)z^2 - (1 + 2i)z + 1 = 0$.

c. $2z^4 - (3i - 4)z^3 + 2(2 - 3i)z^2 - (3i - 4)z + 2 = 0$.

DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG LƯỢNG GIÁC

Định nghĩa 1

(Argumen của số phức $z \neq 0$): Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z . Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox , tia cuối OM được gọi là một argumen của z .

Chú ý:

1. Nếu φ là một argumen của z thì mọi argumen của z có dạng $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Hai số phức z và lz (với $z \neq 0$ và l là số thực dương) có cùng argumen.

Định nghĩa 2

(Dạng lượng giác của số phức): Dạng $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$, trong đó $r > 0$ được gọi là **dạng lượng giác** của số phức $z \neq 0$. Còn dạng $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được gọi là **dạng đại số** của số phức z .

 **Nhận xét:** Để tìm dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) khác 0 cho trước, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: **Tìm r :** đó là môđun của z , $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; số r đó cũng là khoảng cách từ gốc O đến điểm M biểu diễn số z trong mặt phẳng phức.

Bước 2: **Tìm φ :** đó là argumen của z , φ là số thực sao cho $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ và $\sin\varphi = \frac{b}{r}$; số φ đó cũng là số đo một góc lượng giác tia đầu Ox , tia cuối OM .

Chú ý:

1. $|z| = 1$ khi và chỉ khi $z = \cos\varphi + i.\sin\varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$).
2. Khi $z = 0$ thì $|z| = r = 0$ nhưng argumen của z không xác định (đôi khi coi argumen của 0 là số thực tùy ý và vẫn viết $0 = 0(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$).
3. Cần để ý đòi hỏi $r > 0$ trong dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ của số phức $z \neq 0$.

2. NHÂN VÀ CHIA SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG LƯỢNG GIÁC

Định lý: Nếu $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ và $z' = r'(\cos\varphi' + i.\sin\varphi')$ với $r, r' \geq 0$ thì :

$$zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i.\sin(\varphi + \varphi')]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} [\cos(\varphi - \varphi') + i.\sin(\varphi - \varphi')] \text{ khi } r' > 0.$$

 **Chú ý:** Nếu các điểm M, M' biểu diễn theo thứ tự các số phức z, z' khác 0 thì argumen của $\frac{z}{z'}$ là số đo góc lượng giác tia đầu OM', tia cuối OM.

3. CÔNG THỨC MOA-VƠ (MOIVRE) VÀ ỨNG DỤNG

Công thức moa-vơ: Với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$[r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi).$$

Khi $r = 1$, ta được:

$$(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i.\sin n\varphi.$$

Ứng dụng vào lượng giác: Ta có:

$$(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i.\sin 3\varphi.$$

Mặt khác, sử dụng khai triển lũy thừa bậc ba ta được:

$$(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi.(i.\sin\varphi) + 3\cos\varphi.(i.\sin\varphi)^2 + \sin^3\varphi.$$

Từ đó, suy ra:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi.\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi.\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác: Số phức $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$, $r > 0$ có hai căn bậc hai là:

$$\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i.\sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\text{và } -\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i.\sin \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i.\sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right].$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: ACGUMEN CỦA SỐ PHỨC

Sử dụng định nghĩa về Acgumen của số phức.

Ví dụ 1: Tìm phần thực và phần ảo của số phức z , biết argumen của z bằng $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

 **Giải**

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì:

$$a = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ và } b = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Ví dụ 2: Tìm argumen của số phức z , biết:

a. $z = -1 + i$.

b. $z = \cos\varphi - i.\sin\varphi$.

c. $z = -\sin\varphi - i.\cos\varphi$.

 **Giải**

a. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$-1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{Argumen của } -1 + i \text{ bằng } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Cách 2: Ta có $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ nên:

$$\begin{cases} \cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{Argumen của } -1 + i \text{ bằng } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b. Ta biến đổi:

$$z = \cos\varphi - i.\sin\varphi = \cos(-\varphi) - i\sin(-\varphi)$$

$$\Rightarrow \text{Argumen của } z \text{ bằng } -\varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

c. Ta biến đổi:

$$z = -\sin\varphi - i.\cos\varphi = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$\Rightarrow \text{Argumen của } z \text{ bằng } -\frac{\pi}{2} - \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vấn đề 2: DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

Sử dụng kiến thức được trình bày trong nhận xét của phần 1.

Tuy nhiên, trong thực tế để tìm dạng lượng giác của số phức $z = a + bi$ chúng ta sử dụng phép biến đổi:

$$z = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Ví dụ 1: (Bài 27/tr 205 – Sgk):

- a. Giả sử số phức $z \neq 0$ có dạng lượng giác $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
Hãy tìm dạng lượng giác của các số phức:

$$\bar{z}; \quad -z; \quad \frac{1}{z}; \quad kz \quad (k \in \mathbb{R}^*).$$

- b. Xét riêng trường hợp $z = 1 + i\sqrt{3}$.

 **Giải**

- a. Ta lần lượt có:

- Số phức $\bar{z}$ có môđun r và argumen bằng $-\varphi$ nên có dạng:

$$\bar{z} = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] = r(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

- Số phức $-z$ có môđun r và argumen bằng $\varphi + \pi$ nên có dạng:

$$-z = r[\cos(\varphi + \pi) + i \sin(\varphi + \pi)] = -r(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

- Số phức $\frac{1}{z} = \frac{1}{z \cdot z} z$ có môđun $\frac{1}{r^2} r = \frac{1}{r}$ và argumen bằng φ nên có dạng:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

- Số phức kz có môđun $|kz| = |k|r$ và argumen bằng φ nếu $k > 0$ và là $\varphi + \pi$ nếu $k < 0$ nên có dạng:

$$kz = \begin{cases} kr(\cos \varphi + i \sin \varphi) & \text{nếu } k > 0 \\ -kr[\cos(\varphi + \pi) + i \sin(\varphi + \pi)] & \text{nếu } k < 0 \end{cases}$$
$$= kr(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

- b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Với $z = 1 + i\sqrt{3}$, ta có:

$$\text{Môđun } r = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\text{Argumen } \varphi \text{ thỏa mãn } \cos \varphi = \frac{1}{2} \text{ và } \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{chọn } \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Từ đó, suy ra $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ và khi đó:

$$\bar{z} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right];$$

$$-z = -2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right);$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z \cdot z} z = \frac{1}{4} \cdot 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right);$$

$$kz = \begin{cases} 2k \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) & \text{nếu } k > 0 \\ -2k \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) & \text{nếu } k < 0 \end{cases}$$

Cách 2: Chúng ta thường sử dụng ngay phép biến đổi:

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right);$$

$$\bar{z} = \overline{1 + i\sqrt{3}} = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right];$$

$$-z = -1 - i\sqrt{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right);$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{\overline{1 - i\sqrt{3}}}{1 + 3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

 **Chú ý:** Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa việc tìm dạng của những số phức được cho bởi một biểu thức phức.

Ví dụ 2: (Bài 28.b và 28.c/tr 205 – Sgk): *Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:*

a. $\frac{1}{2 + 2i}$.

b. $2i(\sqrt{3} - i)$.

 **Giải**

a. Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 + 2i} &= \frac{2 - 2i}{8} = \frac{1}{4}(1 - i) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]. \end{aligned}$$

b. Ta biến đổi:

$$2i(\sqrt{3} - i) = 2 + 2\sqrt{3}i = 4 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Ví dụ 3: *Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:*

$$1 - i\sqrt{3}; \quad 1 + i; \quad (1 - i\sqrt{3})(1 + i); \quad \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}.$$

 **Giải**

Ta lần lượt có:

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right].$$

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\begin{aligned} (1 - i\sqrt{3})(1 + i) &= 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right] \cdot \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= 2\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{12} \right) \right].$$

Ví dụ 4: (Bài 36/tr 207 – Sgk): *Viết dạng lượng giác của các số phức:*

a. $1 - i \tan \frac{\pi}{5}.$

b. $\tan \frac{5\pi}{8} + i.$

c. $1 - \cos \varphi - i \sin \varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}, \varphi \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$).

 *Giải*

a. Ta có:

$$\begin{aligned} 1 - i \tan \frac{\pi}{5} &= 1 - i \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{5}} \left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} \right) \\ &= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{5}} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{5} \right) \right]. \end{aligned}$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned} \tan \frac{5\pi}{8} + i &= \cot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8} \right) + i = \cot \left(-\frac{\pi}{8} \right) + i = \cot \frac{7\pi}{8} + i \\ &= \frac{\cos \frac{7\pi}{8}}{\sin \frac{7\pi}{8}} + i = \frac{1}{\sin \frac{7\pi}{8}} \left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right). \end{aligned}$$

c. Ta có:

$$\begin{aligned} 1 - \cos \varphi - i \sin \varphi &= 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left(\sin \frac{\varphi}{2} - i \cos \frac{\varphi}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \cos \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ví dụ 5: (Bài 40/tr 209 – Sgk): Xét các số phức:

$$z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}, \quad z_2 = -2 - 2i, \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

a. Viết z_1, z_2, z_3 dưới dạng lượng giác.

b. Từ câu a) hãy tính $\cos \frac{7\pi}{12}$ và $\sin \frac{7\pi}{12}$.

 **Giải**

a. Ta biến đổi:

$$z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2} = -2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right),$$

$$z_2 = -2 - 2i = -2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{-2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)}{-2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}.$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned} z_3 = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{-2 - 2i} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(-2 + 2i)}{8} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(-1 + i)}{4} \\ &= \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2} + (\sqrt{6} + \sqrt{2})i}{4}. \end{aligned}$$

Từ đó, suy ra:

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{và} \quad \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 6: Giải phương trình:

$$z^2 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)z + i \cos \varphi \sin \varphi = 0$$

trong đó φ là số thực cho trước.

 **Giải**

a. Phương trình có:

$$\Delta = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 - 4i \cos \varphi \sin \varphi = (\cos \varphi - i \sin \varphi)^2.$$

Nên phương trình đó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi + (\cos \varphi - i \sin \varphi)}{2} = \cos \varphi;$$

$$z_2 = \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi - (\cos \varphi - i \sin \varphi)}{2} = i \sin \varphi.$$

Vấn đề 3: CÁC ỨNG DỤNG

Ví dụ 1: (Bài 30/tr 206 – Sgk): Gọi M, M' là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số:

$$z = 1 - \sqrt{2}i, z' = 1 + \sqrt{6} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})i.$$

a. Tính $\frac{z'}{z}$.

b. Tìm số đo góc lượng giác (OM, OM') .

 **Giải**

a. Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{z'}{z} &= \frac{1 + \sqrt{6} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})i}{1 - i\sqrt{2}} = \frac{(1 - i\sqrt{2}) + \sqrt{3}(\sqrt{2} - i)}{1 - i\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - i)}{1 - i\sqrt{2}} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - i)(1 + i\sqrt{2})}{1 + 2} = 1 + i\sqrt{3}.\end{aligned}$$

b. Gọi φ là argumen của số phức $1 + i\sqrt{3}$, suy ra:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \text{ và } \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{chọn } \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Từ đó, suy ra $(OM, OM') = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2: (Bài 30/tr 206 – Sgk):

a. Xét các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số $2 + i, 3 + i$ để chứng minh rằng nếu $\tan a = \frac{1}{2}, \tan b = \frac{1}{3}$ với $a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{thì } a + b = \frac{\pi}{4}.$$

b. Xét các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số $2 + i, 5 + i, 8 + i$ để chứng minh rằng nếu $\tan a = \frac{1}{2}, \tan b = \frac{1}{5}, \tan c = \frac{1}{8}$ với

$$a, b, c \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ thì } a + b + c = \frac{\pi}{4}.$$

 **Giải**

a. Ta lần lượt có:

▪ Điểm $M(2; 1)$ biểu diễn số phức $2 + i$ thì:

$$\tan(\text{Ox}, OM) = \frac{1}{2} = \tan a.$$

▪ Điểm $N(3; 1)$ biểu diễn số phức $3 + i$ thì:

$$\tan(\text{Ox}, ON) = \frac{1}{3} = \tan b.$$

Do M, N cùng nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy và $a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên một argumen của $2 + i$ bằng a, một argumen của $3 + i$ bằng b. Từ đó một argumen của $(2 + i)(3 + i)$ bằng $a + b$.

Ta có:

$$(2 + i)(3 + i) = 5 + 5i = 5(1 + i) \text{ có argumen bằng } \frac{\pi}{4}.$$

Từ đó, suy ra:

$$a + b = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad a + b = \frac{\pi}{4} \quad \left(0 < b < a < \frac{\pi}{4}\right).$$

b. Ta lần lượt có:

- Điểm M(2; 1) biểu diễn số phức $2 + i$ thì $\tan(\text{Ox}, \text{OM}) = \frac{1}{2} = \tan a$.
- Điểm N(5; 1) biểu diễn số phức $5 + i$ thì $\tan(\text{Ox}, \text{ON}) = \frac{1}{5} = \tan b$.
- Điểm P(8; 1) biểu diễn số phức $8 + i$ thì $\tan(\text{Ox}, \text{OP}) = \frac{1}{8} = \tan c$.

Do M, N, P cùng nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy và $a, b, c \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên một argumen của $2 + i$ bằng a, một argumen của $5 + i$ bằng b, một argumen của $8 + i$ bằng c. Từ đó một argumen của:

$$(2 + i)(5 + i)(8 + i) \text{ bằng } a + b + c.$$

Ta có:

$$(2 + i)(5 + i)(8 + i) = (9 + 7i)(8 + i) = 65(1 + i) \text{ có argumen bằng } \frac{\pi}{4}.$$

Từ đó, suy ra:

$$a + b + c = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad a + b + c = \frac{\pi}{4} \quad \left(0 < c < b < a < \frac{\pi}{4}\right).$$

Ví dụ 3: (Bài 32/tr 207 – Sgk): Tính $\sin 4\varphi$ và $\cos 4\varphi$ theo các lũy thừa của $\sin \varphi$ và $\cos \varphi$.

 *Giải*

Ta có:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^4 = \cos 4\varphi + i \sin 4\varphi.$$

Mặt khác, sử dụng khai triển lũy thừa bậc bốn ta được:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^4 = \cos^4 \varphi + 4\cos^3 \varphi \cdot (i \sin \varphi) + 6\cos^2 \varphi \cdot (i \sin \varphi)^2 + 4\cos \varphi \cdot (i \sin \varphi)^3 + \sin^4 \varphi.$$

Từ đó, suy ra:

$$\cos 4\varphi = \cos^4 \varphi - 6\cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi,$$

$$\sin 4\varphi = 4\cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi - 4\cos \varphi \cdot \sin^3 \varphi.$$

Ví dụ 4: a. Xác định phần thực của số phức $\frac{z+1}{z-1}$, biết rằng $|z| = 1$ và $z \neq 1$.

b. Chứng minh rằng nếu $\frac{z+1}{z-1}$ là số ảo thì $|z| = 1$.

 **Giải**

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Từ giả thiết, ta đặt $z = a + bi$ với $a^2 + b^2 = 1$, khi đó:

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{a+bi+1}{a+bi-1} = \frac{a+1+bi}{a-1+bi} = \frac{(a+1+bi)(a-1-bi)}{(a-1)^2 + b^2}.$$

Khi đó, phần thực của số phức đó có dạng:

$$\frac{1}{(a-1)^2 + b^2} [(a+1)(a-1) + b^2] = \frac{a^2 + b^2 - 1}{(a-1)^2 + b^2} = 0.$$

Cách 2: Từ giả thiết, ta có $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} &= \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha + 1}{\cos \alpha + i \sin \alpha - 1} = \frac{\cos \alpha + 1 + i \sin \alpha}{\cos \alpha - 1 + i \sin \alpha} \\ &= \frac{(\cos \alpha + 1 + i \sin \alpha)(\cos \alpha - 1 - i \sin \alpha)}{(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Khi đó, phần thực của số phức đó có dạng:

$$\frac{1}{(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha} [(\cos \alpha + 1)(\cos \alpha - 1) + \sin^2 \alpha] = \cos^2 \alpha - 1 + \sin^2 \alpha = 0.$$

b. Từ kết quả câu a) suy ra:

$$\frac{z+1}{z-1} \text{ là số ảo} \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - 1}{(a-1)^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Ví dụ 5: (Bài 38/tr 209 – Sgk): Chứng minh rằng nếu $|z| = |w| = 1$ thì số

$$\frac{z+w}{1+zw} \text{ là số thực (giả sử } 1+zw \neq 0).$$

 **Giải**

Từ giả thiết, ta có:

$$z = \cos \alpha + i \sin \alpha \text{ và } w = \cos \beta + i \sin \beta,$$

$$\frac{z+w}{1+zw} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha + \cos \beta + i \sin \beta}{1 + (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)} = \frac{(\cos \alpha + \cos \beta) + i(\sin \alpha + \sin \beta)}{1 + \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)}$$

Khi đó, tử số của phần ảo của số phức đó có dạng:

$$-(\cos \alpha + \cos \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta) + [1 + \cos(\alpha + \beta)](\sin \alpha + \sin \beta) = 0$$

Vậy, số $\frac{z+w}{1+zw}$ là số thực.

Ví dụ 6: (Bài 34/tr 207 – Sgk): Cho số phức $w = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Tìm các số nguyên dương n để w^n là số thực. Hỏi có số nguyên dương m nào để w^m là số ảo?

 *Giải*

Ta có:

$$w = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow w^n = \left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]^n = \cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Khi đó, để w^n là số thực điều kiện là:

$$\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2n\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow n \text{ là bội của } 3.$$

Khi đó, để w^m là số ảo điều kiện là:

$$\cos\left(-\frac{2m\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2m\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \text{Không tồn tại } m.$$

Ví dụ 7: Viết dạng lượng giác của số phức z và các căn bậc hai của z cho mỗi trường hợp sau:

a. $|z| = 3$ và một argument của iz là $\frac{5\pi}{4}$.

b. $|z| = \frac{1}{3}$ và một argument của $\frac{\bar{z}}{1+i}$ là $-\frac{3\pi}{4}$.

 *Giải*

a. Giả sử $z = a + bi$ với môđun r và argument φ , ta có:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 3, \quad iz = i(a + bi) = -b + ai$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{4}.$$

Từ đó, suy ra $z = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i.\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ và các căn bậc hai của z là:

$$\sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i.\sin\frac{3\pi}{8}\right); \sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i.\sin\frac{11\pi}{8}\right).$$

b. Giả sử $z = a + bi$ với môđun r và argument φ , ta có:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\bar{z}}{1+i} = \frac{(a-bi)(1-i)}{2} = \frac{a+b}{2}(1-i)$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

Từ đó, suy ra $z = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ và các căn bậc hai của z là:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right).$$

Ví dụ 8: (Bài 33/tr 207 – Sgk): Tính:

$$(\sqrt{3} - i)^6; \quad \left(\frac{i}{1+i} \right)^{2004}; \quad \left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}} \right)^{21}.$$

 **Giải**

a. Ta lần lượt với:

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\sqrt{3} - i)^6 &= \left\{ 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] \right\}^6 \\ &= 2^6 \left[\cos(-\pi) + i \sin(-\pi) \right] = -2^6. \end{aligned}$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta lần lượt có dạng lượng giác của các số phức:

$$\begin{aligned} \frac{i}{1+i} &= \frac{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ \Rightarrow \left(\frac{i}{1+i} \right)^{2004} &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{2004} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2004} (\cos 501\pi + i \sin 501\pi) = -\frac{1}{2^{1002}}. \end{aligned}$$

Cách 2: Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{i}{1+i} &= \frac{i(1-i)}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ \Rightarrow \left(\frac{i}{1+i} \right)^{2004} &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{2004} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2004} (\cos 501\pi + i \sin 501\pi) = -\frac{1}{2^{1002}}. \end{aligned}$$

c. Ta lần lượt với:

$$\begin{aligned}\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}} &= \frac{(5+3i\sqrt{3})(1+2i\sqrt{3})}{13} = -1+i\sqrt{3} = -2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ \Rightarrow \left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21} &= \left\{-2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}^{21} \\ &= (-2)^{21}[\cos(-7\pi)+i.\sin(-7\pi)] = 2^{21}.\end{aligned}$$

Ví dụ 9: Tính $\left(\frac{4i}{1+i\sqrt{3}}\right)^6$ và $\frac{(\sqrt{3}+i)^5}{(1-i\sqrt{3})^{11}}$.

 *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta lần lượt có dạng lượng giác của các số phức:

$$\begin{aligned}4i &= 4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i.\sin\frac{\pi}{2}\right); \\ 1+i\sqrt{3} &= 2\left(\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right); \\ \Rightarrow \frac{4i}{1+i\sqrt{3}} &= \frac{4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i.\sin\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ \Rightarrow \left(\frac{4i}{1+i\sqrt{3}}\right)^6 &= \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6 = 2^6(\cos\pi+i.\sin\pi) = -64.\end{aligned}$$

Cách 2: Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{4i}{1+i\sqrt{3}} &= \frac{4i(1-i\sqrt{3})}{1+3} = \sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ \Rightarrow \left(\frac{4i}{1+i\sqrt{3}}\right)^6 &= \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6 = 2^6(\cos\pi+i.\sin\pi) = -64.\end{aligned}$$

b. Ta lần lượt có dạng lượng giác của các số phức:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}+i &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ \Rightarrow (\sqrt{3}+i)^5 &= \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^5 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i.\sin\frac{5\pi}{6}\right).\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 1 - i\sqrt{3} &= 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right] \\
 \Rightarrow (1 - i\sqrt{3})^{11} &= 2^{11} \left[\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) \right] \\
 &= 2^{11} \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) \right]. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^5}{(1 - i\sqrt{3})^{11}} = \frac{2^5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)}{2^{11} \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) \right]} = \frac{1}{2^6} \left(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2} \right) = \frac{i}{64}.$$

Ví dụ 10: (Bài 30/tr 206 – Sgk): Cho các số phức:

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i) \text{ và } \varepsilon = \frac{1}{2} (-1 + i\sqrt{3}).$$

Chứng minh rằng $z_0 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$; $z_1 = z_0 \cdot \varepsilon$; $z_2 = z_0 \cdot \varepsilon^2$ là các nghiệm của phương trình $z^3 - w = 0$.

 **Giải**

Trước tiên, ta có:

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}, \\
 \varepsilon &= \frac{1}{2} (-1 + i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \\
 \varepsilon^2 &= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Ta lần lượt với:

- Với $z_0 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$ thì:

$$\begin{aligned}
 z^3 - w &= \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)^3 - \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \\
 &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = 0
 \end{aligned}$$

Suy ra z_0 là một nghiệm của phương trình.

- Với $z_1 = z_0 \cdot \varepsilon$ thì:

$$z_1 = \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} z^3 - w &= \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)^3 - \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = 0 \end{aligned}$$

Suy ra z_1 là một nghiệm của phương trình.

■ Với $z_2 = z_0 \cdot \varepsilon^2$ thì:

$$z_2 = \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12}$$

$$\begin{aligned} z^3 - w &= \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)^3 - \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \cos \frac{17\pi}{4} + i \sin \frac{17\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = 0 \end{aligned}$$

Suy ra z_2 là một nghiệm của phương trình.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Tìm một argumen của mỗi số phức sau:

a. $-2 + 2\sqrt{3}i$.

c. $-\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}$.

b. $\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$.

d. $1 - \sin \varphi + i \cos \varphi$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$).

Bài tập 2: Tìm một argumen của mỗi số phức sau:

a. $(a + i)^3 + (a - i)^3$ (a là số thực cho trước).

b. $z - (1 + i\sqrt{3})$ biết argumen của z bằng $\frac{\pi}{3}$.

Bài tập 3: Hãy tìm dạng lượng giác của các số phức z , $\bar{z}$, $-z$, $\frac{1}{z}$, biết:

a. $z = 1 + i$.

b. $z = 1 - i$.

Bài tập 4: Hãy tìm dạng lượng giác của các số phức z , $\bar{z}$, $-z$, $\frac{1}{z}$, biết:

a. $z = \sqrt{3} + i$.

b. $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Bài tập 5: Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

$$\sqrt{3} - i; 1 - i\sqrt{3}; (\sqrt{3} - i)(1 - i\sqrt{3}); \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i\sqrt{3}}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}.$$

Bài tập 6: Viết dạng lượng giác của các số phức:

a. $1 + i \tan \frac{\pi}{5}$.

b. $\tan \frac{5\pi}{8} - i$.

c. $1 + \cos \varphi + i \sin \varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$, $\varphi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Bài tập 7: Viết dạng lượng giác của các số phức:

a. $1 - i \cot \frac{\pi}{5}$.

b. $\cot \frac{5\pi}{8} + i$.

c. $1 - \sin \varphi - i \cos \varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$, $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Bài tập 8: Cho hai số phức khác 0 là:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ và } z' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi'), \text{ với } r, r', \varphi, \varphi' \in \mathbb{R}.$$

Tìm điều kiện cần và đủ về r, r', φ, φ' để $z = z'$.

Bài tập 9: Cho $z = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

a. Viết z^2 dưới dạng đại số và dưới dạng lượng giác.

b. Từ câu a) hãy suy ra dạng lượng giác của z .

Bài tập 10: Dùng công thức khai triển nhị thức Niuton $(1 + i)^{19}$ và công thức Moavơ để tính $C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - \dots + C_{19}^{16} - C_{19}^{18}$.

Bài tập 11: Tính $(\sqrt{3} + i)^6$; $\left(\frac{i}{1-i}\right)^{2009}$; $\left(\frac{5-3i\sqrt{3}}{1+2i\sqrt{3}}\right)^{20}$.

Bài tập 12: Viết dạng lượng giác của các số phức:

a. $\frac{1 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)}{1 + \cos \varphi + i \sin \varphi}$.

b. $[1 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)](1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Bài tập 13:

a. Cho các số thực a, b sao cho $\sin \frac{a}{2} \neq 0$. Với mỗi số nguyên $n \geq 1$, xét các tổng:

$$S = \cos b + \cos(a + b) + \cos(2a + b) + \dots + \cos(na + b);$$

$$T = \sin b + \sin(a + b) + \sin(2a + b) + \dots + \sin(na + b)$$

Tính $S + iT$, từ đó suy ra S và T .

b. Chứng minh rằng với mỗi số thực $a \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), mỗi số nguyên $n \geq 1$, ta có:

$$\sin a + \sin 3a + \dots + \sin(2n-1)a = \frac{\sin^2 na}{\sin a}.$$

$$\cos a + \cos 3a + \dots + \cos(2n-1)a = \frac{\sin 2na}{2 \sin a}.$$

Bài tập 14:

a. Cho $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$). Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$,

$$\text{ta có } z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\varphi; \quad z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\varphi.$$

b. Từ câu a), chứng minh rằng:

$$\cos^4 \varphi = \frac{1}{8} (\cos 4\varphi + 4 \cos 2\varphi + 3).$$

$$\sin^5 \varphi = \frac{1}{16} (\sin 5\varphi - 5 \sin 3\varphi + 10 \sin \varphi).$$

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

CHƯƠNG I

NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Chủ đề 1:	Nguyên hàm	5
I.	Tóm tắt lí thuyết	5
II.	Phương pháp giải toán	6
Vấn đề 1:	Tìm nguyên hàm bằng định nghĩa.....	6
Vấn đề 2:	Tìm nguyên hàm sử dụng bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp và các tính chất cơ bản của nguyên hàm	9
Vấn đề 3:	Tìm nguyên hàm bằng phương pháp phân tích	17
Vấn đề 4:	Tìm nguyên hàm bằng phương pháp sử dụng nguyên hàm phụ	25
Chủ đề 2:	Một số phương pháp tìm nguyên hàm.....	31
I.	Tóm tắt lí thuyết	31
II.	Phương pháp giải toán	32
Vấn đề 1:	Phương pháp đổi biến.....	32
Vấn đề 2:	Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.....	50
Vấn đề 3:	Phương pháp tìm nguyên hàm của các hàm số hữu tỉ.....	66
Vấn đề 4:	Phương pháp tìm nguyên hàm của các hàm số vô tỉ.....	85
Vấn đề 5:	Phương pháp tìm nguyên hàm của các hàm số lượng giác.....	106
Vấn đề 6:	Phương pháp tìm nguyên hàm của các hàm số mũ và lôgarit	128
Chủ đề 3:	Tích phân	137
I.	Tóm tắt lí thuyết	137
II.	Phương pháp giải toán	138
Vấn đề 1:	Tính tích phân sử dụng các tính chất của tích phân và bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp	138
Vấn đề 2:	Tính tích phân bằng phương pháp phân tích	146
Vấn đề 3:	Ý nghĩa của tích phân.....	149
Vấn đề 4:	Mở đầu về bất đẳng thức tích phân	150
Chủ đề 4:	Một số phương pháp tính tích phân	155
I.	Tóm tắt lí thuyết	155
II.	Phương pháp giải toán	157
Vấn đề 1:	Phương pháp đổi biến dạng 1	157
Vấn đề 2:	Phương pháp đổi biến dạng 2	167
Vấn đề 3:	Phương pháp đổi biến cho lớp hàm số đặc biệt	175
Vấn đề 4:	Phương pháp lấy tích phân từng phần	178
Vấn đề 5:	Phương pháp tính tích phân của các hàm số hữu tỉ.....	186
Vấn đề 6:	Phương pháp tính tích phân của các hàm số vô tỉ.....	191
Vấn đề 7:	Một số phương pháp tính tích phân của hàm số lượng giác.....	197

Vấn đề 8:	Phương pháp tính tích phân của các hàm số mũ và lôgarit	211
Vấn đề 9:	Phương pháp tính tích phân của các hàm số dạng đặc biệt	217
Chủ đề 5:	Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng.....	235
I.	Tóm tắt lí thuyết	235
II.	Phương pháp giải toán	235
Vấn đề 1:	Tính diện tích hình phẳng dạng 1	235
Vấn đề 2:	Tính diện tích hình phẳng dạng 2	237
Vấn đề 3:	Tính diện tích hình phẳng dạng 3	240
Chủ đề 6:	Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể.....	244
I.	Tóm tắt lí thuyết	244
II.	Phương pháp giải toán	245
Vấn đề 1:	Tính thể tích vật thể.....	245
Vấn đề 2:	Tính thể tích vật thể tròn xoay dạng 1	246
Vấn đề 3:	Tính thể tích vật thể tròn xoay dạng 2	248

CHƯƠNG II SỐ PHỨC

Chủ đề 1:	Số phức.....	253
I.	Tóm tắt lí thuyết	253
II.	Phương pháp giải toán	256
Vấn đề 1:	Số phức và thuộc tính của nó	256
Vấn đề 2:	Các phép toán về số phức	260
Vấn đề 3:	Chứng minh tính chất của số phức	264
Vấn đề 4:	Tập hợp điểm.....	266
Vấn đề 5:	Mở đầu về phương trình phức	269
Chủ đề 2:	Căn bậc hai của số phức và phương trình bậc hai	273
I.	Tóm tắt lí thuyết	273
II.	Phương pháp giải toán	274
Vấn đề 1:	Căn bậc hai của số phức	274
Vấn đề 2:	Phương trình bậc hai	277
Chủ đề 3:	Dạng lượng giác của số phức và ứng dụng.....	303
I.	Tóm tắt lí thuyết	303
II.	Phương pháp giải toán	304
Vấn đề 1:	Acgumen của số phức	304
Vấn đề 2:	Dạng lượng giác của của số phức	305
Vấn đề 3:	Các ứng dụng	310
MỤC LỤC		319