

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

TRƯỜNG THPT XUÂN ĐỈNH

**TÌM SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ THÔNG QUA
CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN**

Lĩnh vực/ Môn: **Toán**

Cấp học: **THPT**

Tên Tác giả: **LÊ THỊ HẰNG**

Đơn vị công tác: **Trường THPT Xuân Đỉnh**

Chức vụ: **Giáo viên**

NĂM HỌC 2022-2023

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

ĐƠN YÊU CẦU CÔNG NHẬN SÁNG KIẾN

Kính gửi: Hội đồng khoa học ngành Giáo dục và Đào tạo

Họ và tên	Ngày tháng năm sinh	Nơi công tác	Chức danh	Trình độ chuyên môn	Tên sáng kiến
Lê Thị Hằng	26/06/1984	THPT Xuân Đình	Giáo viên	Thạc sĩ	Tìm số hạng tổng quát của dãy số thông qua cấp số cộng, cấp số nhân.

- Lĩnh vực áp dụng sáng kiến: Toán

- Ngày sáng kiến được áp dụng lần đầu hoặc áp dụng thử, (ghi ngày nào sớm hơn):

Tháng 2 năm 2020.

- Mô tả bản chất của sáng kiến: Dạy học sinh cách phân tích, cách tư duy để tìm số hạng tổng quát của dãy số thông qua cấp số cộng, cấp số nhân. Các bước thực hiện như sau:

Bước 1: Khảo sát học sinh qua một bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Bước 2: Tìm hiểu nguyên nhân và phân tích bài toán bằng phương pháp gợi mở định hướng học sinh.

Bước 3: Học sinh giải lại bài toán theo phân tích ở bước 2.

Bước 4: Phát triển bài toán .

- Những thông tin cần được bảo mật (nếu có): Không

- Các điều kiện cần thiết để áp dụng sáng kiến: Áp dụng cho học sinh đang học lớp 11 phần dãy số, cấp số cộng, cấp số nhân.

- Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tác giả : Học sinh yêu thích môn toán hơn vì có thể tự giải được các bài toán khó. Học sinh được phát triển tư duy qua các bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy số, thấy được mối liên hệ giữa dãy số, cấp số cộng và cấp số nhân. Cách phát triển bài toán làm cho học sinh dễ dàng tiếp thu và có hứng thú với môn toán.

- Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tổ chức, cá nhân đã tham gia áp dụng sáng kiến lần đầu hoặc áp dụng thử nếu có: Là tài liệu tham khảo hữu ích cho đồng nghiệp.

- Danh sách những người đã tham gia áp dụng thử hoặc áp dụng sáng kiến lần đầu:

Đội tuyển học sinh giỏi lớp 11 năm 2020.

Tôi xin cam đoan mọi thông tin nêu trong đơn là trung thực, đúng sự thật và hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật.

Hà Nội, ngày 11 tháng 3 năm 2023

Người nộp đơn

(Ký và ghi rõ họ tên)



Lê Thị Hằng

TRƯỜNG THPT XUÂN ĐÌNH
HỘI ĐỒNG SÁNG KIẾN

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

PHIẾU NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ

Họ tên tác giả: LÊ THỊ HẰNG

Tên đề tài: Tìm số hạng tổng quát của dãy số thông qua cấp số cộng, cấp số nhân

Lĩnh vực: Chuyên môn Toán

STT	Tiêu chuẩn	Điểm tối đa
1	Sáng kiến có tính mới	
1.1	Hoàn toàn mới, được áp dụng đầu tiên	25
1.2	Có cải tiến so với giải pháp trước đây với mức độ khả	
1.3	Có cải tiến so với giải pháp trước đây với mức độ trung bình	
1.4	Không có tính mới hoặc sao chép từ các giải pháp đã có trước đây	
Nhận xét: Tác giả đã xuất phát từ các bài toán cơ bản, phân tích, định hướng cho học sinh nhận dạng được cách biến đổi để xác định được dãy số trung gian là cấp cộng hoặc cấp số nhân và sử dụng các kiến thức về cấp số để tìm số hạng tổng quát của dãy số đã cho. Sau đó phát triển và mở rộng bài toán.		
2	Sáng kiến có tính áp dụng	
2.1	Có khả năng áp dụng trong phạm vi toàn ngành hoặc rộng hơn	25
2.2	Có khả năng áp dụng trong đơn vị và có thể nhân ra một số đơn vị có cùng điều kiện	
2.3	Có khả năng áp dụng trong đơn vị	
2.4	Không có khả năng áp dụng trong đơn vị	
Nhận xét: Sáng kiến có thể áp dụng rộng rãi trong công tác giảng dạy môn Toán cấp THPT đối với các học sinh đại trà và bồi dưỡng học sinh giỏi.		
3	Sáng kiến có tính hiệu quả	
3.1	Có hiệu quả, đem lại lợi ích kinh tế - xã hội, có tính lan tỏa	30
3.2	Có hiệu quả, đem lại lợi ích kinh tế - xã hội	
3.3	Có hiệu quả, lợi ích phù hợp với mức độ phù hợp tại đơn vị	
3.4	Không có hiệu quả cụ thể	
Nhận xét: Sáng kiến có tính hiệu quả cao và có tính lan tỏa tốt		
4	Điểm trình bày	
4.1	Trình bày khoa học, hợp lý	10
4.2	Trình bày chưa khoa học, chưa hợp lý	
Nhận xét: Trình bày khoa học, hợp lý đúng qui định		
Tổng cộng: 90		Đánh giá: ☐ Đạt (≥ 70 điểm) ☐ Không đạt

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG SÁNG KIẾN CƠ SỞ



HIỆU TRƯỞNG
Lê Ngọc Hoa

MỤC LỤC

A. ĐẶT VẤN ĐỀ.....	1
I. Lý do chọn đề tài.....	1
II. Mục đích nghiên cứu:.....	1
III. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu.....	1
IV. Phương pháp nghiên cứu.....	2
B. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ.....	3
I. Cơ sở lý luận:	3
II. Thực trạng của học sinh khi gặp các bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy số.....	4
III. Các biện pháp đã tiến hành.	6
1. Phân tích, hướng dẫn học sinh cách tư duy tìm ra dãy số mới là cấp số từ bài toán đơn giản.....	6
2. Phát triển và nâng cao bài toán.....	9
3. Một số bài tập tự luyện.....	14
IV. Kết quả đạt được.....	16
C. KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ.....	17
I. Kết luận.....	17
II. Khuyến nghị.....	17
D. TÀI LIỆU THAM KHẢO	

PHỤ LỤC

A. ĐẶT VẤN ĐỀ

I. Lý do chọn đề tài:

Dãy số là phần kiến thức rất quan trọng không chỉ trong chương trình toán học phổ thông, mà còn là một công cụ toán học có ứng dụng rộng rãi trong các ngành khoa học khác. Giải quyết được bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy số giúp học sinh giải quyết nhanh gọn các bài toán khó liên quan đến giới hạn, tính tăng giảm, bị chặn... của dãy số. Rèn luyện khả năng tư duy sáng tạo, là nền móng vững chắc để tiếp thu và phát triển các bộ môn khoa học khác.

Hiện nay, với hình thức thi trắc nghiệm thì học sinh rất lười làm các bài toán phải tư duy như bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy số, học sinh rất phụ thuộc vào máy tính và ngại khó. Trong quá trình giảng dạy, tôi đã sử dụng các kiến thức về cấp số cộng, cấp số nhân vào để giải quyết các bài toán về dãy số, học sinh khá hứng thú vì bài toán tìm số hạng tổng quát trở lên đơn giản hơn rất nhiều. Đặc biệt, trong các đề thi học sinh giỏi khối 11, các bài toán về dãy số đều được giải quyết khá đơn giản nếu học sinh tìm được công thức tổng quát.

Với mong muốn giúp học sinh có hứng thú hơn với toán học, phát triển tư duy, tăng tính sáng tạo và không ngại khó khi gặp các bài toán về dãy số. Học sinh giỏi có thêm công cụ để giải các bài toán liên quan trong các đề thi học sinh giỏi, tôi đưa ra sáng kiến kinh nghiệm: **“Tìm số hạng tổng quát của dãy số thông qua cấp số cộng, cấp số nhân”**

II. Mục đích nghiên cứu:

Mục đích nghiên cứu của đề tài là dẫn dắt học sinh cách tư duy, phân tích một bài toán nói chung và làm rõ mối liên hệ giữa khái niệm, định lý đối với dãy số nói riêng.

Giúp cho học sinh rèn luyện tính cẩn thận, sáng tạo, tư duy thông minh, biết qui lạ về quen và yêu thích toán học.

Giúp học sinh nắm vững các khái niệm, định lý, tính chất, công thức số hạng tổng quát của dãy số, cấp số cộng, cấp số nhân.

III. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

1. Đối tượng nghiên cứu:

Một số bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy số thông qua các công thức của cấp số cộng và cấp số nhân trong chương trình toán THPT.

2. Phạm vi nghiên cứu:

- Kiến thức về dãy số, cấp số cộng, cấp số nhân trong chương trình toán bậc trung học phổ thông.

- Một số sách nâng cao, đề thi học sinh giỏi các năm.

IV. Phương pháp nghiên cứu

1. Phương pháp nghiên cứu lý luận.

- Đọc sách, nghiên cứu lý luận và tài liệu tham khảo.

- Nghiên cứu kỹ sách giáo khoa lớp 11 để có hướng dẫn dắt và phân tích hiệu quả phục vụ cho mục đích nghiên cứu.

- Tìm hiểu các bài toán trong các đề thi học sinh giỏi các năm.

2. Phương pháp điều tra, quan sát.

Nghiên cứu thực trạng dạy và học giải tích lớp 11 chương trình chuẩn tại trường THPT qua các hình thức: Dự giờ, kiểm tra định kỳ, tham khảo ý kiến đóng góp của đồng nghiệp, lắng nghe chia sẻ của học sinh.

3. Phương pháp thực nghiệm sư phạm.

- Đưa vào giảng dạy học sinh giỏi khối 11 năm học 2019-2020, năm học 2022-2023, lớp 11A4 và 11D1 năm học 2019-2020, lớp 11D01 và 11D4 năm học 2022-2023, tổng kết và rút kinh nghiệm về những ưu điểm và nhược điểm của SKKN.

- Tổng hợp kiến thức, vận dụng cho mục đích nghiên cứu.

B. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

I. Cơ sở lý luận.

1. Dãy số, các cách cho dãy số.

1.1. Định nghĩa dãy số.

- Một hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay còn gọi tắt là dãy số).

- Hàm số u xác định trên tập gồm m số nguyên dương đầu tiên được gọi là một dãy số hữu hạn.

Ví dụ 1: Dãy số $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1.2. Cách cho dãy số.

a. Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát.

Ví dụ 2: Cho dãy $u(n)$: $u_n = (-2)^n + n - 1$, ta có $u_1 = -2$, $u_4 = 19, \dots$

b. Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi.

Ví dụ 3: Cho dãy $u(n)$:
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -4u_n + 3 \end{cases}$$

c. Cho dãy bằng cách diễn đạt bằng lời

2. Cấp số cộng, cấp số nhân.

2.1. Cấp số cộng.

2.1.1. Định nghĩa.

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó kể từ số hạng thứ 2 trở đi, mỗi số hạng bằng số hạng đứng trước nó cộng với một số d không đổi, nghĩa là: (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + d$

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

2.1.2. Các định lý.

Định lý 1: Cho cấp số cộng (u_n) , kể từ số hạng thứ 2 trở đi ta có:

$$u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k$$

Định lý 2: Cho cấp số cộng (u_n) , có số hạng đầu u_1 và công sai d .

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$

Định lý 3: Cho cấp số cộng (u_n) , có số hạng đầu u_1 và công sai d .

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n).n}{2}$$

2.2. Cấp số nhân.

2.2.1. Định nghĩa.

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó kể từ số hạng thứ 2 trở đi, mỗi số hạng bằng số hạng đứng trước nó nhân với một số q không đổi, nghĩa là : (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} \cdot q$.

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

2.2.2. Các định lý.

Định lý 1: Cho cấp số nhân (u_n) , kể từ số hạng thứ 2 trở đi ta có :

$$u_{k-1} \cdot u_{k+1} = u_k^2.$$

Định lý 2: Cho cấp số nhân (u_n) , có số hạng đầu u_1 và công bội q .

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}.$$

Định lý 3: Cho cấp số nhân (u_n) , có số hạng đầu u_1 và công bội q .

$$S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

II. Thực trạng của học sinh khi gặp các bài toán xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số.

1. Thực trạng.

Bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy số xuất hiện trong các đề kiểm tra và đề thi học sinh giỏi ở các mức độ vận dụng và vận dụng cao. Ở mức độ này học sinh cần nắm được kiến thức một cách tổng quát, biết cách phân tích và tổng hợp kiến thức một cách linh hoạt.

Vì vậy, khi gặp các bài toán này học sinh thường rất lúng túng, phần lớn sẽ bỏ qua bài toán này trong các đề kiểm tra. Số học sinh làm được thường sẽ hay dự đoán số hạng tổng quát dựa vào kinh nghiệm rồi chứng minh bằng phương pháp qui nạp toán học. Cách làm theo lối mòn này chỉ giải quyết được những bài toán cho dãy số đơn giản, các dãy số có công thức số hạng tổng quát càng phức tạp hơn học sinh sẽ không thể dự đoán được.

Về giảng dạy, đa số giáo viên không cho học sinh khai thác các bài toán dạng tìm số hạng tổng quát của dãy số hoặc thông qua số hạng tổng quát của dãy số để giải quyết vấn đề.

* Sau khi khảo sát học sinh bằng bài tập cụ thể với dãy số được cho bằng công thức truy hồi, tôi thấy học sinh gặp phải những vấn đề sau:

1. Phần lớn học sinh không có phương hướng giải quyết bài toán.

2. Không tìm được qui luật của dãy số thông qua các số hạng đầu của dãy để tìm số hạng tổng quát.

3. Không chứng minh công thức sau khi dự đoán công thức số hạng tổng quát dựa vào một vài số hạng đầu của dãy.

4. Khả năng phân tích và tổng hợp kiến thức chưa tốt.

5. Tâm lý ngại khó và chưa có hứng thú trong học tập.

* Sau khi tham khảo ý kiến của đồng nghiệp, tôi thấy phần lớn giáo viên chỉ chữa bài tập trong sách giáo khoa phần dãy số, có thể lồng ghép một số bài tập cụ thể dạng này vào tiết tự chọn và chỉ đưa ra lời giải mà không có một chủ đề riêng để dẫn dắt học sinh cách tư duy bài toán, tạo tiền đề cho các bài toán về dãy số ở các phần khác của chương và ở các chương khác. Do vậy tôi giải quyết vấn đề bằng cách xây dựng bài toán từ mức tư duy đơn giản đến nâng cao, dẫn dắt học sinh bằng các câu hỏi phân tích và tự giải quyết bài toán.

Các bước tiến hành:

Bước 1: Khảo sát học sinh qua một bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Bước 2: Tìm hiểu nguyên nhân và phân tích bài toán bằng phương pháp gợi mở định hướng học sinh.

Bước 3: Học sinh giải lại bài toán theo phân tích ở bước 2.

Bước 4: Phát triển bài toán .

2. Kết quả khảo sát trước khi thực hiện đề tài:

Đề bài: Cho dãy số (u_n) xác định bởi :
$$\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Xác định số hạng tổng quát của dãy đã cho.

* Kết quả: (90 học sinh của 2 lớp 11D01 và 11D4)

Hướng làm	Biết tìm qui luật bằng cách liệt kê một vài số hạng đầu của dãy	Biết liên hệ với cấp số nhân	Không có hướng làm
Tỉ lệ	27/90	3/90	60/90

* Kết quả: (10 học sinh trong đội tuyển học sinh giỏi)

Hướng làm	Biết tìm qui luật bằng cách liệt kê một vài số hạng đầu của dãy.	Biết liên hệ với cấp số nhân	Không có hướng làm
Tỉ lệ	9/10	1/10	0/10

III. Các biện pháp đã tiến hành.

1. Phân tích, hướng dẫn học sinh cách tư duy tìm ra dãy số mới là cấp số từ bài toán đơn giản.

Bài toán 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy đã cho.

Phân tích bài toán.

Học sinh trả lời các câu hỏi gợi mở sau:

CH1: Dãy số (v_n) xác định bởi $\begin{cases} v_1 \\ v_{n+1} = 10v_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ có là cấp số nhân hay

không? Nếu có, xác định công bội và số hạng tổng quát của dãy số (v_n) ?

Trả lời mong muốn:

+) Ta có $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 10$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, dãy số trên là 1 cấp số nhân với công bội $q=10$.

+) SHTQ: $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow v_n = v_1 \cdot 10^{n-1}$

CH2: Đặt $v_n = u_n - n$.

Hãy đưa dãy (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ về dãy mới (v_n) ?

Trả lời mong muốn: $u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n \Leftrightarrow u_{n+1} - (n+1) = 10u_n - 10n$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - (n+1) = 10(u_n - n)$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = 10v_n$$

Dãy (v_n) được cho như sau: $\begin{cases} v_1 = 7 \\ v_{n+1} = 10v_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

CH 3: Viết công thức số hạng tổng quát của dãy (v_n) . Từ đó viết công thức số hạng tổng quát của dãy (u_n) ?

Trả lời mong muốn: $v_n = 7 \cdot 10^{n-1} \Rightarrow u_n = 7 \cdot 10^{n-1} + n$.

CH 4: Những dãy số có công thức truy hồi dạng $u_{n+1} = q \cdot u_n + f(n)$ sẽ luôn phân tích được để đưa được về dãy số mới là cấp số nhân với công bội q đúng hay sai?

Trả lời mong muốn: Đúng.

Lời giải:

$$\text{Ta có } u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n \Leftrightarrow u_{n+1} - (n+1) = 10u_n - 10n$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - (n+1) = 10(u_n - n)$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n - n \text{ ta có: } \begin{cases} v_1 = u_1 - 1 \\ v_{n+1} = 10v_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 7 \\ v_{n+1} = 10v_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 10$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, nên dãy (v_n) là 1 cấp số nhân với công bội $q=10$.

Công thức số hạng tổng quát của dãy (v_n) là: $v_n = 7 \cdot 10^{n-1}$

Vậy: $u_n = 7 \cdot 10^{n-1} + n$.

Nhận xét: Với những dãy số mà công thức truy hồi có thể biểu diễn được dưới dạng $u_{n+1} + f(n+1) = q \cdot [u_n + f(n)]$, với q là hằng số thì ta đưa được về cấp số nhân bằng cách đặt $v_n = u_n + f(n)$. Dãy $(v_n): \begin{cases} v_1 = u_1 + f(1) \\ v_{n+1} = q \cdot v_n \end{cases}$ là một cấp số nhân với công bội q .

$$\text{Bài toán 2: Cho dãy số } (u_n) \text{ xác định bởi: } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy đã cho.

Phân tích bài toán.

Học sinh trả lời các câu hỏi gợi mở sau:

CH1: Dãy số (v_n) xác định bởi $\begin{cases} v_1 \\ v_{n+1} = v_n + 2 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là cấp số cộng hay

cấp số nhân không? Nếu có, xác định số hạng tổng quát của dãy số (v_n) ?

Trả lời mong muốn:

+ Ta có: $v_{n+1} = v_n + 2 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = 2$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số trên là cấp số cộng với công sai $d=2$.

+ Công thức số hạng tổng quát: $v_n = v_1 + (n-1) \cdot 2$

CH2: Hãy lấy nghịch đảo công thức truy hồi để tìm mối liên hệ giữa u_n và u_{n+1} ?

$$\text{Trả lời mong muốn: } u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = 2 + \frac{1}{u_n}.$$

CH3: Đưa ý tưởng đặt dãy mới để có công thức số hạng tổng quát?

Trả lời mong muốn:

$$\text{Đặt } v_n = \frac{1}{u_n}, \text{ ta được dãy } (v_n): \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + 2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

CH4: Dãy (v_n) là dãy số quen thuộc nào? Tìm số hạng tổng quát của dãy?

Trả lời mong muốn:

Ta có: $v_{n+1} - v_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, dãy số (v_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 2$

Số hạng tổng quát của dãy số (v_n) là: $v_n = v_1 + (n-1)d \Leftrightarrow v_n = 1 + (n-1).2$

Từ đó ta tìm được số hạng tổng quát của dãy (u_n) .

Lời giải:

$$\text{Ta có } u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Khi đó } u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = 2 + \frac{1}{u_n}.$$

$$\text{Với mọi } n \in \mathbb{N}^*, \text{ đặt } v_n = \frac{1}{u_n}, \text{ ta được dãy } (v_n): \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + 2 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dãy số (v_n) là cấp số cộng có $v_1 = 1$ và công sai $d = 2$.

Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng ta có:

$$v_n = v_1 + (n-1)d \Leftrightarrow v_n = 1 + (n-1).2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Vậy } u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2n-1}.$$

Nhận xét: Với những dãy số mà công thức truy hồi có thể biểu diễn được dưới dạng $f(u_{n+1}) = f(u_n) + d$ với d là hằng số thì ta đưa được về cấp số cộng

bằng cách đặt $v_n = f(u_n)$. Dãy $(v_n): \begin{cases} v_1 = f(u_1) \\ v_{n+1} = v_n + d \end{cases}$ là một cấp số cộng với công sai d .

Trên cơ sở đó ta mở rộng được bài toán theo nhiều cách cho công thức truy hồi ở phần 2.

2. Phát triển và nâng cao bài toán.

2.1. Phát triển và nâng cao bài toán tìm số hạng tổng quát thông qua cấp số nhân.

Bài 1. *Dãy (u_n) đưa được về dạng $u_{n+1} + f(n+1) = q \cdot [u_n + f(n)]$*

$$\text{Cho dãy số } (u_n) \text{ xác định bởi: } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(u_n - \frac{n+4}{n^2+3n+2} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy đã cho.

Phân tích bài toán.

CH 1: Dự đoán dãy (u_n) đưa được về dạng $u_{n+1} + f(n+1) = q \cdot [u_n + f(n)]$

không? Nếu có thì ta sẽ phân tích theo hướng như thế nào?

Trả lời mong muốn: Ta sẽ phân tích $u_{n+1} = \frac{3}{2} [u_n + f(n)] - f(n+1)$

$$\text{Nghĩa là: } \frac{3}{2} f(n) - f(n+1) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{n+4}{n^2+3n+2}$$

CH 2: Hãy phân tích để có dãy số mới thoả mãn là 1 cấp số nhân.

Trả lời mong muốn:

$$\text{Ta có: } \frac{n+4}{n^2+3n+2} = \frac{3}{n+1} - \frac{2}{n+2}$$

$$\text{Vậy: } u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(u_n + \frac{2}{n+2} - \frac{3}{n+1} \right) \Leftrightarrow u_{n+1} - 3 \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{3}{2} \left(u_n - 3 \cdot \frac{1}{n+1} \right)$$

CH 3: Đặt dãy mới để được dãy số mới là cấp số?

Trả lời mong muốn:

$$\text{Đặt } v_n = u_n - \frac{3}{n+1} \text{ ta được } v_{n+1} = \frac{3}{2} \cdot v_n.$$

Dãy mới (v_n) là 1 cấp số nhân

Lời giải:

$$\text{Với mọi } n \in \mathbb{N}^*, \text{ ta có. } u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(u_n + \frac{2}{n+2} - \frac{3}{n+1} \right)$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - 3 \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{3}{2} \left(u_n - 3 \cdot \frac{1}{n+1} \right) \quad (*)$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n - \frac{3}{n+1} \text{ ta được } v_{n+1} = \frac{3}{2} \cdot v_n.$$

$$\text{Dãy số } (v_n): \begin{cases} v_1 = u_1 - \frac{3}{2} \\ v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ là cấp số nhân có công bội } q.$$

$$\text{Với: } \begin{cases} v_1 = \frac{-1}{2} \\ q = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy với } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ ta có: } v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow u_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{3}{n+1}.$$

Bài 2: Đặt liên tiếp 2 dãy mới.

$$\text{Cho dãy số } (u_n) \text{ xác định bởi: } \begin{cases} u_1 = 16 \\ u_{n+1} + 14 = \frac{15(nu_n + 1)}{n+1}, \forall n \geq 1 \end{cases}.$$

Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy đã cho.

Phân tích bài toán: Theo cách phân tích của bài 1.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Với mọi } n \in \mathbb{N}^*, \text{ ta có: } u_{n+1} + 14 &= \frac{15(nu_n + 1)}{n+1} \Leftrightarrow (u_{n+1} + 14)(n+1) = 15(nu_n + 1) \\ &\Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} = 15nu_n - 14n + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } v_n = nu_n \text{ ta được } (v_n): \begin{cases} v_1 = 16 \\ v_{n+1} = 15v_n - 14n + 1 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(Đưa về dạng của bài toán mở đầu)

$$\text{Với mọi } n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 15v_n - 14n + 1 \Leftrightarrow v_{n+1} - (n+1) = 15(v_n - n).$$

$$\text{Đặt } w_n = v_n - n \text{ ta được } (w_n): \begin{cases} w_1 = 15 \\ w_{n+1} = 15w_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Dãy số } (w_n) \text{ là một cấp số nhân với công bội } q: \begin{cases} w_1 = 15 \\ q = 15 \end{cases}.$$

$$\text{Số hạng tổng quát của dãy } (w_n) \text{ là: } w_n = 15^n.$$

$$\text{của dãy } (v_n) \text{ là: } v_n = w_n + n \Leftrightarrow v_n = 15^n + n.$$

$$\text{Từ đó ta có: } u_n = \frac{v_n}{n} \Leftrightarrow u_n = \frac{15^n + n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Phân tích bài toán:

CH 1: Nếu phân tích được $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1}$ theo hướng làm xuất hiện dạng $u_{n+1} - a.u_n = q.(u_n - a.u_{n-1})$ thì hướng làm tiếp theo là gì?

CH 2: Dãy mới (v_n) được cho như thế nào?

Lời giải:

Với mọi $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ n \geq 2 \end{cases}$, ta có: $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$

Đặt $v_n = u_n - u_{n-1}$ ta được dãy (v_n) :
$$\begin{cases} v_2 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \end{cases}, \quad \forall n \geq 2.$$

Dãy số (v_n) là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2}$.

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} v_n = u_n - u_{n-1} \\ v_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2} \\ \\ v_2 = u_2 - u_1 \end{array} \right\} \rightarrow v_2 + v_3 + ...v_n = u_n - u_1.$$

$$\Leftrightarrow u_n = u_1 + (v_2 + v_3 + \dots + v_n)$$

Theo công thức tính tổng của các số hạng đầu cấp số nhân ta có :

$$v_2 + v_3 + \dots + v_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow u_n = 1 + \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \right] = 3 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \quad \text{với} \quad \forall n \geq 2$$

Vậy : $u_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ với $\forall n \geq 2$

2.2. Phát triển và nâng cao bài toán tìm số hạng tổng quát thông qua cấp số cộng.

Bài 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n}{2u_n + n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy đã cho.

Phân tích bài toán:

CH1: Theo cách phân tích của bài toán 2: $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = 2 + \frac{1}{u_n},$

hãy phân tích $u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n}{2u_n + n}.$

Trả lời mong muốn:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(n+1)u_n}{2u_n + n} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + n}{u_n(n+1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{n+1}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + n}{u_n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{u_{n+1}} = 2 + \frac{n}{u_n} \end{aligned}$$

CH2: Hướng đặt dãy mới (v_n) theo (u_n) ?

Trả lời mong muốn: Đặt $v_n = \frac{n}{u_n}$

Lời giải:

Ta có $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Khi đó:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(n+1)u_n}{2u_n + n} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + n}{u_n(n+1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{n+1}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + n}{u_n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{u_{n+1}} = 2 + \frac{n}{u_n} \end{aligned}$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = \frac{n}{u_n}$, ta được dãy $(v_n): \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + 2 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Dãy số (v_n) là cấp số cộng có $v_1 = 1$ và công sai $d = 2$.

Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng ta có:

$$v_n = v_1 + (n-1)d \Leftrightarrow v_n = 1 + (n-1).2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $u_n = \frac{n}{v_n} = \frac{n}{2n-1}.$

Bài 2: Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{3u_n - 1}, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy đã cho.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } u_{n+1} &= \frac{5u_n - 3}{3u_n - 1} \Leftrightarrow u_{n+1}(3u_n - 1) = 5u_n - 3 \\ &\Leftrightarrow 3u_n u_{n+1} - u_{n+1} = 5u_n - 3 \\ &\Leftrightarrow 4u_n u_{n+1} - 4u_n - 2u_{n+1} + 2 = u_n u_{n+1} - u_{n+1} + u_n - 1 \\ &\Leftrightarrow (u_{n+1} + 1)(u_n - 1) = (4u_n - 2)(u_{n+1} - 1) \\ &\Leftrightarrow \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} - 1} = \frac{4u_n - 2}{u_n - 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} - 1} = \frac{u_n + 1}{u_n - 1} + 3 \end{aligned}$$

Với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$ ta được dãy (v_n) :
$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + 3 \end{cases}$$

Dãy số (v_n) là một cấp số cộng có $v_1 = 2$ và công sai $d = 3$.

Áp dụng công thức số hạng tổng quát ta có:

$$v_n = v_1 + (n-1)d \Leftrightarrow v_n = 2 + 3(n-1) \Leftrightarrow v_n = 3n - 1.$$

$$\text{Do đó } \frac{u_n + 1}{u_n - 1} = 3n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{3n}{3n - 2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Một số bài tập tự luyện.

Tìm số hạng tổng quát của các dãy số sau:

Bài 1. Dãy số (u_n) biết:
$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1, \forall n \geq 2 \end{cases}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 2. Dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = 673 \\ u_{n+2} = \frac{2(n+2)^2 u_{n+1} - (n^3 + 4n^2 + 5n + 2)u_n}{n+3} \end{cases}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 3. Dãy số (u_n) biết:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n^2 + 2}, n \geq 1 \end{cases}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 4. Dãy số (u_n) biết:
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)u_n} \end{cases}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 5. Dãy số (u_n) biết:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = -1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Bài 6. Dãy số (u_n) biết:
$$\begin{cases} v_1 = 8 \\ v_2 = 34 \\ v_{n+2} = 8v_{n+1} + 1996v_n \end{cases}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 7. Dãy số (u_n) biết:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ 3^n(2u_{n+1} - u_n) = 2 \end{cases}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 8. Dãy số (u_n) biết:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{7}{2} \\ u_{n+1} = \frac{7u_n + 4}{2u_n + 5} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 9. Dãy số (u_n) biết:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2016} \\ u_{n+1} = \frac{2015u_n + 1}{2016} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 10. Dãy số (u_n) biết :
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 3 \\ u_n = nu_{n-1} - (n-2)u_{n-2} - 2n + 4 \end{cases}, \forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}.$$

Bài 11. Dãy số (u_n) biết :
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 12. Dãy số (u_n) biết :
$$\begin{cases} u_1 = -1, u_2 = 2, u_3 = 40 \\ u_n = \frac{10u_{n-1}^2 \cdot u_{n-3} - 24u_{n-1} \cdot u_{n-2}^2}{u_{n-2} \cdot u_{n-3}}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4. \end{cases}$$

Bài 13. Dãy số (u_n) biết :
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Bài 14. Dãy số (u_n) biết :
$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_2 = -2 \\ nu_{n+2} - (3n+1)u_{n+1} + 2(n+1)u_n = 3 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Bài 15. Dãy số (u_n) biết :
$$\begin{cases} u_1 = 0; u_2 = 18 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n - 24 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Bài 16. Dãy số (x_n) biết :
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n + 5)(x_n^2 + 5x_n + 8) + 16} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 17. Dãy số (u_n) biết :
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2n^3 - 9n^2 + 9n - 3 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Bài 18. Dãy số (x_n) biết :
$$\begin{cases} x_0 = 20; x_1 = 30 \\ x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Bài 19. Dãy số (a_n) biết :
$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 2004 \\ a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 3978 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Bài 20. Dãy số (u_n) biết
$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{9}(u_n + 4 + 4\sqrt{1 + 2u_n}) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

IV. Kết quả đạt được.

* Đối với học sinh:

- Học sinh yêu thích môn toán hơn vì biết tự khám phá và tư duy những bài tập mới mà học sinh cho là khó. Biết tư duy logic và liên kết các kiến thức với nhau để giải bài toán theo nhiều hướng khác nhau.

- Học sinh tương tác tốt và rất hứng thú với những bài toán liên quan đến dãy số. Đặc biệt là rất nhớ các công thức liên quan đến cấp số cộng, cấp số nhân.

- Học sinh biết cách phân tích và định hướng cách làm từ bài thứ 2 trở đi. Biết cách phân tích đầu bài và đặt các câu hỏi để dẫn dắt hướng đi cho bài làm. Tạo ra thói quen tốt khi giải toán, điều mà trước đây phần lớn học sinh chưa làm được.

- Học sinh biết cách đặt các câu hỏi ngược để dẫn dắt giải quyết các bài toán, hạn chế cách làm bài dập khuôn máy móc.

* Đối với giáo viên

- Tạo ra một hướng mới trong dạy học phát triển tư duy cho học sinh, làm thay đổi thói quen dạy học thụ động. Giáo viên có điều kiện phát huy năng lực của bản thân và có hướng mở rộng nhiều chuyên đề khác. Tạo cảm hứng trong dạy và học.

- Sáng kiến kinh nghiệm là một tài liệu tham khảo tốt cho đồng nghiệp. Do có sự đóng góp ý kiến của đồng nghiệp, quá trình trao đổi chuyên môn giúp đồng nghiệp gắn kết hơn. Làm phong phú tài liệu tham khảo cho tổ chuyên môn.

*** Kết quả đạt được của học sinh:**

1. Thi học sinh giỏi năm 2019-2020: 3/3 học sinh thi HSG cấp cụm khối 11 đều làm được câu tìm số hạng tổng quát của dãy số. Đạt 2 giải nhất, 1 giải nhì.

2. Kết quả áp dụng đối với lớp 11D01 và 11D4:

- **Kết quả khảo sát hứng thú của học sinh sau khi áp dụng SKKN:**

- **Kết quả khảo sát thông qua bài kiểm tra 30 phút.**

Kết quả	Mức độ hiểu bài			Mức độ yêu thích môn toán		
	Hiểu và biết cách vận dụng	Hiểu nhưng chưa biết cách vận dụng	Không hiểu bài	Rất yêu thích	Bình thường	Chưa có hứng thú
Tỉ lệ	60%	25%	15%	53%	29%	18%

C. KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ

I. Kết luận.

Đề tài SKKN này giúp học sinh làm quen, vận dụng linh hoạt các phần kiến thức đã học với nhau, nhằm nâng cao khả năng tư duy của học sinh. Với hệ thống bài tập dẫn dắt tương đối sát với chương trình học giúp học sinh tự tin hơn trong các kì thi. Đặc biệt là yêu thích môn toán tạo tiền đề cho các chương sau.

Trong nội dung của sáng kiến kinh nghiệm tôi đã hoàn thành tất cả các mục đích nghiên cứu và nhiệm vụ nghiên cứu đã đề ra. Cùng với rất nhiều sáng kiến kinh nghiệm khác tôi đã áp dụng cho học sinh từ nhiều khóa trước, bước đầu cho thấy học sinh vận dụng rất linh hoạt và sáng tạo vào mỗi bài tập, cho kết quả cao trong học tập, đặc biệt là kì thi THPTQG 2019 của Sở giáo dục và đào tạo Hà Nội.

Trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành đề tài, tôi đã sử dụng bài tập của các thầy cô từ những nguồn khác nhau. Mặc dù đề tài của tôi đã áp dụng cho hai thế hệ học sinh và đều cho kết quả tốt, song sáng kiến kinh nghiệm của tôi vẫn còn nhiều thiếu sót, kính mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô để sáng kiến kinh nghiệm của tôi được hoàn chỉnh, là tài liệu tham khảo tốt cho học sinh và đồng nghiệp.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

II. Khuyến nghị

Đối với Sở giáo dục: Cần chia sẻ những sáng kiến kinh nghiệm có hiệu quả cao tới tất cả giáo viên, để sáng kiến kinh nghiệm hàng năm của giáo viên là nguồn tài liệu tham khảo quý cho đồng nghiệp.

D.TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Báo toán học và tuổi trẻ
- [2] Nguyễn Phú Khánh- Huỳnh Đức Khánh (2018), NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.
- [3] Đề thi học sinh giỏi môn toán các năm, đề thi thử các trường THPT.
- [4] Sách giáo khoa đại số và giải tích 11 nâng cao.