ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP

Toán 10

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP
Toán 10

(Sách đã được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo phê duyệt sử dụng trong cơ sở giáo dục phổ thông tại Quyết định số 442/QĐ-BGDĐT ngày 28/01/2022)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

BIỂU TƯỢNG DÙNG TRONG SÁCH

CÂU HỎI KHỞI ĐỘNG
Gợi mở vấn đề, dẫn dắt học sinh vào bài học

HOẠT ĐỘNG
Giúp học sinh phân tích, kiến tạo kiến thức mới với sự hướng dẫn của giáo viên

KHÁM PHÁ KIẾN THỨC
Phát hiện kiến thức mới từ hoạt động

KIẾN THỨC TRỌNG TÂM
Nội dung kiến thức trọng tâm

LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG
- Sử dụng những kiến thức vừa học để làm những bài tập cơ bản
- Vận dụng kiến thức đã biết để giải quyết vấn đề, đặc biệt những vấn đề thực tiễn

CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT
Tìm hiểu thêm kiến thức toán học, lịch sử toán học và ứng dụng của toán học vào thực tiễn

Các em giữ gìn sách cẩn thận, không viết vào sách để sử dụng được lâu dài.

Các em học sinh lớp 10 thân mến!

Trong quá trình tìm hiểu môn Toán lớp 10, bên cạnh các nội dung cốt lõi mà các em được học, sách Chuyên đề học tập Toán 10 sẽ cung cấp thêm cho các em những hiểu biết toán học sâu sắc hơn, mở rộng hơn với nhiều ứng dụng của toán học trong thực tiễn. Chuyên đề học tập bao gồm các chuyên đề: hệ phương trình bậc nhất ba ẩn; phương pháp quy nạp toán học, nhị thức Newton; ba đường conic và ứng dụng.

Toàn bộ những điều trên được thể hiện qua những tranh ảnh, hình vẽ, bài tập độc đáo và hấp dẫn; qua những tri thức gần gũi, lí thú về khoa học tự nhiên và tích hợp với những môn học khác. Từ đó, các em được tiến thêm một bước trên con đường khám phá thế giới bí ẩn và đẹp đẽ của toán học, đặc biệt là được "làm giàu" về vốn văn hoá chung và có cơ hội "Mang cuộc sống vào bài học - Đưa bài học vào cuộc sống".

Chịu khó suy nghĩ, trao đổi với thầy cô giáo và bạn bè, nhất định các em sẽ ngày càng tiến bộ và cảm thấy vui sướng khi nhận ra ý nghĩa: Học toán rất có ích cho cuộc sống hằng ngày.

Chúc các em học tập thật tốt, say mê học toán và có thêm nhiều niềm vui.

Các tác giả

MỤC LỤC

CHUYÊN ĐỀ I

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu về hệ phương trình bậc nhất ba ẩn và ứng dụng của nó vào giải các bài toán ở Vật lí, Hoá học, Sinh học, Kinh tế, …

§1 HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

Trong kho tàng văn hoá dân gian Việt Nam có bài toán về Trâu ăn cỏ như sau:

Trâu đứng ăn năm,
Trâu nằm ăn ba,
Lụ khụ trâu già,
Ba con một bó,
Trăm con ăn cỏ,
Trăm bó no nê.

Hỏi có bao nhiêu trâu đứng, trâu nằm, trâu già?

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Phương trình bậc nhất ba ẩn

1 Cho phương trình: $2x + y - 3z = 1$ (1).

a) Nêu các ẩn của phương trình (1).

b) Với mỗi ẩn của phương trình (1), xác định bậc của ẩn đó.

Phương trình (1) *gọi là phương trình bậc nhất ba ẩn.*

Nhận xét

• Phương trình bậc nhất ba ẩn là phương trình có dạng: $ax + by + cz = d$, trong đó x, y, z là ba ẩn; các hệ số a, b, c không đồng thời bằng 0.

• Nếu phương trình bậc nhất ba ẩn $ax + by + cz = d$ trở thành mệnh đề đúng khi $x = x_0$; $y = y_0$; $z = z_0$ thì bộ số $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ gọi là một *nghiệm* của phương trình đó.

2. Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

2 Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -4 \\ -x + 3y + 5z = 5 \\ 2x + 7y - 3z = 3 \end{cases} \quad (*)$$

a) Mỗi phương trình của hệ (*) là phương trình có dạng như thế nào?

b) Bộ số $(x ; y ; z) = (-2 ; 1 ; 0)$ có là nghiệm của từng phương trình trong hệ (*) hay không? Vì sao?

• *Hệ (*) là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.*

• *Bộ số $(-2; 1 ; 0)$ đồng thời nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ (*) và được gọi là một nghiệm của hệ phương trình đó.*

• *Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn* là hệ phương trình mà mỗi phương trình trong hệ là một phương trình bậc nhất đối với ba ẩn đó.

• Bộ số $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ đồng thời nghiệm đúng tất cả các phương trình của một hệ phương trình bậc nhất ba ẩn được gọi là nghiệm của hệ phương trình đó.

Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Trong đó x, y, z là ba ẩn; các chữ còn lại là các hệ số; các hệ số của ba ẩn x, y, z trong mỗi phương trình không đồng thời bằng 0.

3 Nêu định nghĩa hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn tương đương.

Cho hai hệ phương trình bậc nhất ba ẩn:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{(I) và } \begin{cases} m_1x + n_1y + p_1z = q_1 \\ m_2x + n_2y + p_2z = q_2 \\ m_3x + n_3y + p_3z = q_3 \end{cases} \text{(II)}$$

Nhận xét

• Nếu tập nghiệm của hệ phương trình (I) bằng tập nghiệm của hệ phương trình (II) thì hệ phương trình (I) được gọi là tương đương với hệ phương trình (II).

• Phép biến đổi hệ phương trình bậc nhất ba ẩn về hệ phương trình tương đương với nó được gọi là phép biến đổi tương đương hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.

Chú ý: Để giải hệ phương trình (I), ta thường thực hiện một số phép biến đổi tương đương nhằm dẫn đến một hệ phương trình có thể tìm được nghiệm một cách dễ dàng.

II. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN BẰNG PHƯƠNG PHÁP GAUSS

4 Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -4 & (1) \\ 4y - 3z = -13 & (2) \\ -5z = -15 & (3) \end{cases} \quad \text{(III)}$$

Để giải hệ phương trình (III), ta làm như sau:

• Từ phương trình (3), ta có: $z = (-15) : (-5) \Leftrightarrow z = 3$.

• Thế $z = 3$ vào phương trình (2), ta được:

$$4y - 3 \,.\, 3 = -13 \Leftrightarrow 4y - 9 = -13 \Leftrightarrow 4y = (-13) + 9 \Leftrightarrow 4y = -4$$
$$\Leftrightarrow y = (-4) : 4 \Leftrightarrow y = -1.$$

• Thế $y = -1$, $z = 3$ vào phương trình (1), ta được:

$$x + 2 \,.\, (-1) - 3 = -4 \Leftrightarrow x - 5 = -4 \Leftrightarrow x = (-4) + 5 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy hệ phương trình (III) có nghiệm $(x ; y ; z) = (1 ; -1 ; 3)$.

Chú ý: Hệ phương trình (III) là một hệ phương trình có *dạng tam giác*. Để giải hệ phương trình có dạng tam giác như vậy, ta bắt đầu giải từ phương trình cuối và ngược dần lên.

Ví dụ 1 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ 2y + z = 6 \\ 3z = -12. \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$\begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ 2y + z = 6 \\ 3z = -12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ 2y + z = 6 \\ z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ 2y + (-4) = 6 \\ z = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ y = 5 \\ z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5 - 2 . (-4) = 3 \\ y = 5 \\ z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \\ z = -4. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x ; y ; z) = (-2 ; 5 ; -4)$.

5 Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -4 & (1) \\ x - 2y + 2z = 9 & (2) \\ 2x + y - z = -2 & (3) \end{cases} \quad \text{(IV)}$$

Có nhiều phương pháp giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn. Dưới đây, ta sẽ tìm hiểu phương pháp Gauss thông qua việc giải hệ phương trình (IV).

Bước 1. Khử số hạng chứa x

Trừ theo từng vế của phương trình (1) *cho phương trình* (2)*, rồi thay phương trình mới vào vị trí phương trình thứ hai.*

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ 4y - 3z = -13 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình (1) *với* 2 *rồi trừ theo từng vế cho phương trình* (3)*, sau đó thay phương trình mới vào vị trí phương trình thứ ba.*

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ 4y - 3z = -13 & (4) \\ 3y - z = -6 & (5) \end{cases}$$

Bước 2. Khử số hạng chứa y

Nhân hai vế của phương trình (4) *với* 3*, nhân hai vế của phương trình* (5) *với* 4*, rồi trừ theo từng vế hai phương trình vừa tìm được và thay phương trình mới vào vị trí phương trình thứ ba.*

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ 4y - 3z = -13 & \text{(V)} \\ -5z = -15 \end{cases}$$

Bước 3. Giải hệ phương trình (V) có dạng tam giác, ta được nghiệm $(x ; y ; z) = (1 ; -1 ; 3)$.

Nhận xét: Phương pháp giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn bằng cách biến đổi hệ đó về hệ có dạng tam giác (như cách làm trên) gọi là phương pháp khử dần ẩn số hay *phương pháp Gauss.*

Ví dụ 2 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 5x-y+3z=10 \\ -3x+7y-4z=7. \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 5x-y+3z=10 \\ -3x+7y-4z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 16y+7z=-5 \\ -3x+7y-4z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 16y+7z=-5 \\ 16y+2z=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 16y+7z=-5 \\ 5z=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 16y+7.(-3)=-5 \\ z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3.1+2.(-3)=1 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=-3. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x\,;y\,;z)=(4\,;1\,;-3)$.

1 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x+y-3z=11 \\ 2x-3y+2z=9 \\ x+y+z=-3. \end{cases}$$

Ví dụ 3 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2x-y-2z=2 \\ x+2y-3z=-1. \end{cases}$$

2 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+2y+6z=5 \\ -x+y-2z=3 \\ x-4y-2z=13. \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2x-y-2z=2 \\ x+2y-3z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+z=1 \\ -5y+4z=0 \\ x+2y-3z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+z=1 \\ -5y+4z=0 \\ -5y+4z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+z=1 \\ -5y+4z=0 \\ 0=2. \end{cases}$$

Phương trình thứ ba của hệ vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 4 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y - 3z = 3 \\ x + y - 5z = 1 \\ -3x + 2y = -3. \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} 3x - y - 3z = 3 \\ x + y - 5z = 1 \\ -3x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 3z = 3 \\ -4y + 12z = 0 \\ -3x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 3z = 3 & (1) \\ -4y + 12z = 0 & (2) \\ y - 3z = 0 & (3) \end{cases}$$

Hai phương trình (2) và (3) tương đương. Khi đó, hệ phương trình đưa về:

$$\begin{cases} 3x - y - 3z = 3 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6z = 3 \\ y = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = 3z. \end{cases}$$

Đặt $z = t$ với t là số thực bất kì, ta có: $x = 2t + 1$, $y = 3t$.

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm $(x ; y ; z) = (2t + 1 ; 3t ; t)$ với t là số thực bất kì.

3 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ y - z = 0 \\ -x + 2y = 1. \end{cases}$$

III. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM NGHIỆM CỦA HỆ BA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

Ta có thể tìm nghiệm của hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn bằng cách sử dụng máy tính cầm tay. Mỗi máy tính khác nhau có thể có các phím khác nhau. Tuy nhiên, đều có quy tắc chung là phải mở chương trình giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn rồi mới nhập dữ liệu.

Ví dụ 5 Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ -x + 2y + 5z = 6 \\ x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

Giải. Sử dụng loại máy tính phù hợp, ấn liên tiếp các phím:

$\boxed{\text{MODE}}\boxed{5}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{-}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{-}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{5}\boxed{=}\boxed{6}\boxed{=}$
$\boxed{1}\boxed{=}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{-}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{=}$

Ta thấy trên màn hình hiện ra $x = \dfrac{29}{60}$.

Ấn tiếp phím $\boxed{=}$ ta thấy trên màn hình hiện ra $y = \dfrac{8}{15}$.

Ấn tiếp phím $\boxed{=}$ ta thấy trên màn hình hiện ra $z=\frac{13}{12}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x\,;\,y\,;\,z)=\left(\frac{29}{60};\frac{8}{15};\frac{13}{12}\right)$.

Chú ý: $\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{5}\ \boxed{2}$ để vào chế độ giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.

4 Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x-3y+4z=-5 \\ -4x+5y-z=6 \\ 3x+4y-3z=7. \end{cases}$$

BÀI TẬP

1. Kiểm tra xem mỗi bộ số $(x\,;\,y\,;\,z)$ đã cho có là nghiệm của hệ phương trình tương ứng hay không.

a) $\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 5x-y+3z=16 \\ -3x+7y+z=-14 \end{cases}$ $(0\,;3\,;-2), (12\,;5\,;-13), (1\,;-2\,;3)$;

b) $\begin{cases} 3x-y+4z=-10 \\ -x+y+2z=6 \\ 2x-y+z=-8 \end{cases}$ $(-2\,;4\,;0), (0\,;-3\,;10), (1\,;-1\,;5)$;

c) $\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases}$ $(4\,;18\,;78), (8\,;11;81), (12\,;4\,;84)$.

2. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x-2y+4z=4 \\ 3y-z=2 \\ 2z=-10; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y-5z=-7 \\ 2y=4 \\ y+z=3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3x+2y=2 \\ x=10. \end{cases}$

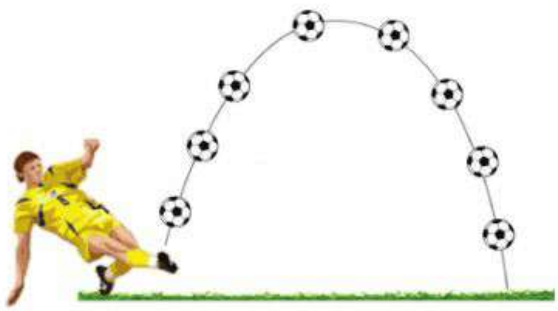
3. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 3x-y-2z=5 \\ 2x+y+3z=6 \\ 6x-y-4z=9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y-3z=5 \\ 3x-y+z=4 \\ 7x+y-5z=-2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y-4z=-1 \\ 2x-y-3z=3 \\ x-3y+z=4. \end{cases}$

4. Tìm số đo ba góc của một tam giác, biết tổng số đo của góc thứ nhất và góc thứ hai bằng hai lần số đo của góc thứ ba, số đo của góc thứ nhất lớn hơn số đo của góc thứ ba là 20°.

5. Bác Thanh chia số tiền 1 tỉ đồng của mình cho ba khoản đầu tư. Sau một năm, tổng số tiền lãi thu được là 84 triệu đồng. Lãi suất cho ba khoản đầu tư lần lượt là 6%, 8%, 15% và số tiền đầu tư cho khoản thứ nhất bằng tổng số tiền đầu tư cho khoản thứ hai và thứ ba. Tính số tiền bác Thanh đầu tư cho mỗi khoản.

6. Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết quỹ đạo chuyển động của quả bóng là một parabol và độ cao h của quả bóng được tính bởi công thức $h = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$, trong đó độ cao h và độ cao ban đầu h_0 được tính bằng mét, t là thời gian của chuyển động tính bằng giây, a là gia tốc của chuyển động tính bằng m/s^2, v_0 là vận tốc ban đầu được tính bằng m/s. Tìm a, v_0, h_0 biết sau 0,5 giây quả bóng đạt được độ cao 6,075 m; sau 1 giây quả bóng đạt độ cao 8,5 m; sau 2 giây quả bóng đạt độ cao 6 m.



7. Một cửa hàng bán đồ nam gồm áo sơ mi, quần âu và áo phông. Ngày thứ nhất bán được 22 áo sơ mi, 12 quần âu và 18 áo phông, doanh thu là 12 580 000 đồng. Ngày thứ hai bán được 16 áo sơ mi, 10 quần âu và 20 áo phông, doanh thu là 10 800 000 đồng. Ngày thứ ba bán được 24 áo sơ mi, 15 quần âu và 12 áo phông, doanh thu là 12 960 000 đồng. Hỏi giá bán mỗi áo sơ mi, mỗi quần âu và mỗi áo phông là bao nhiêu? Biết giá từng loại trong ba ngày không thay đổi.

8. Ba nhãn hiệu bánh quy là A, B, C được cung cấp bởi một nhà phân phối. Với tỉ lệ thành phần dinh dưỡng theo khối lượng, bánh quy nhãn hiệu A chứa 20% protein, bánh quy nhãn hiệu B chứa 28% protein và bánh quy nhãn hiệu C chứa 30% protein. Một khách hàng muốn mua một đơn hàng như sau:

- Mua tổng cộng 224 cái bánh quy bao gồm cả ba nhãn hiệu A, B, C;
- Lượng protein trung bình của đơn hàng này (gồm cả ba nhãn hiệu A, B, C) là 25%;
- Lượng bánh nhãn hiệu A gấp đôi lượng bánh nhãn hiệu C.

Tính lượng bánh quy mỗi loại mà khách hàng đó đặt mua.

9. Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} -x+2y-3z=2 \\ 2x+y+2z=-3 \\ -2x-3y+z=5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 5y-4z=0 \\ x+2y-3z=-1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ 3x-5y-z=-3 \\ -x+4y-2z=1. \end{cases}$

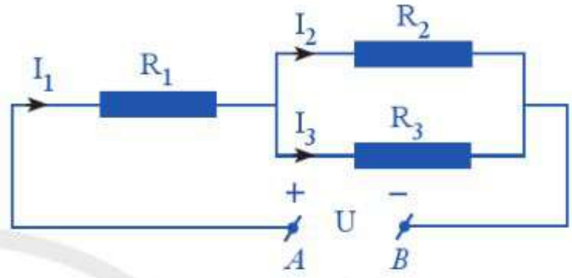
§2 ỨNG DỤNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn là một công cụ để giải quyết nhiều vấn đề trong thực tiễn cũng như trong các môn học khác như: Vật lí, Hoá học, Sinh học, Kinh tế, ...

I. ỨNG DỤNG TRONG VẬT LÍ

1. Ứng dụng trong bài toán về mạch điện

Bài toán 1. Cho mạch điện như *Hình 1*. Biết $R_1 = 36\ \Omega$, $R_2 = 90\ \Omega$, $R_3 = 60\ \Omega$ và $U = 60$ V. Gọi I_1 là cường độ dòng điện chạy qua mạch chính, I_2 và I_3 là cường độ dòng điện chạy qua hai nhánh. Tính I_1, I_2, I_3.



Hình 1

Giải

Cường độ dòng điện của đoạn mạch mắc song song là: $I_2 + I_3$.

Ta có: $I_1 = I_2 + I_3$ hay $I_1 - I_2 - I_3 = 0$.

Hiệu điện thế giữa hai đầu đoạn mạch mắc song song là: $U_2 = I_2 \,.\, R_2 = I_3 \,.\, R_3$ nên $90I_2 = 60I_3$ hay $3I_2 - 2I_3 = 0$.

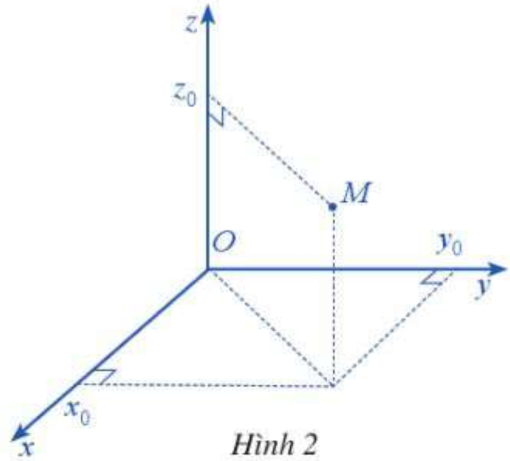
Hiệu điện thế giữa hai đầu đoạn mạch *AB* là: $U = U_1 + U_2$ nên $60 = I_1 \,.\, R_1 + I_2 \,.\, R_2$ hay $36I_1 + 90I_2 = 60 \Rightarrow 6I_1 + 15I_2 = 10$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 3I_2 - 2I_3 = 0 \\ 6I_1 + 15I_2 = 10. \end{cases}$

Giải hệ phương trình, ta được $I_1 = \dfrac{5}{6}$(A), $I_2 = \dfrac{1}{3}$(A), $I_3 = \dfrac{1}{2}$(A).

2. Ứng dụng trong viễn thông

Bài toán 2. Cũng như trong mặt phẳng toạ độ, trong không gian ta có thể đưa vào hệ trục toạ độ *Oxyz*. Khi đó, mỗi điểm *M* trong không gian có toạ độ là bộ ba số $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ và được kí hiệu là $M(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ (*Hình 2*).



Hình 2

Khoảng cách giữa hai điểm $P(x_1\,;\,y_1\,;\,z_1)$, $Q(x_2\,;\,y_2\,;\,z_2)$ trong không gian được tính như sau:

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS (Global Positioning System – Hệ thống định vị toàn cầu) trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, toạ độ của một điểm trong không gian đó sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước.

Chẳng hạn, ta xét một ví dụ cụ thể như sau:

Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho bốn vệ tinh $A(0 ; 4 ; 5)$, $B(-3 ; -1 ; 3)$, $C(-2 ; 8 ; 9)$, $D(-7 ; 2 ; -3)$ và trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận được tín hiệu phản hồi, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm toạ độ. Biết các khoảng cách đó là $MA = 3$, $MB = 5$, $MC = 9$, $MD = 10$.

Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất
(*Nguồn: https://commons.wikimedia.org*)

a) Chứng minh toạ độ của điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+(y-4)^2+(z-5)^2 = 9 & (1) \\ (x+3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = 25 & (2) \\ (x+2)^2+(y-8)^2+(z-9)^2 = 81 & (3) \\ (x+7)^2+(y-2)^2+(z+3)^2 = 100 & (4) \end{cases}$$

b) Viết hệ phương trình có được bằng cách trừ theo từng vế của mỗi phương trình (2), (3), (4) cho phương trình (1).

c) Tìm toạ độ của điểm M.

Giải

a) Gọi toạ độ điểm $M(x ; y ; z)$. Theo giả thiết, $MA = 3$, $MB = 5$, $MC = 9$, $MD = 10$ nên ta có:

$$\begin{cases} MA^2 = 3^2 \\ MB^2 = 5^2 \\ MC^2 = 9^2 \\ MD^2 = 10^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-4)^2+(z-5)^2 = 9 & (1) \\ (x+3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = 25 & (2) \\ (x+2)^2+(y-8)^2+(z-9)^2 = 81 & (3) \\ (x+7)^2+(y-2)^2+(z+3)^2 = 100 & (4) \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

Vậy toạ độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình (I).

b) Sau khi trừ theo từng vế của mỗi phương trình (2), (3), (4) cho phương trình (1), ta nhận được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 6x+10y+\ \ 4z=38 \\ 4x-\ \ 8y-\ \ 8z=-36 \\ 14x+\ \ 4y+16z=70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5y+2z=19 \\ 2x-4y-4z=-18 \\ 7x+2y+8z=35 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

c) Giải hệ phương trình (II), ta được $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Vậy $M(1 ; 2 ; 3)$.

II. ỨNG DỤNG TRONG HOÁ HỌC

1. Phương pháp đại số trong cân bằng phản ứng hoá học

Xét phản ứng hoá học có dạng: $x_1A_1 + x_2A_2 \rightarrow x_3A_3 + x_4A_4$, trong đó mỗi phân tử A_i có thể có nhiều hơn một nguyên tố.

Để cân bằng phản ứng trên, ta phải tìm các hệ số x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho các nguyên tố được bảo toàn.

Bước 1. Coi x_1, x_2, x_3, x_4 là các ẩn, lập hệ phương trình bậc nhất bốn ẩn dựa theo định luật bảo toàn nguyên tố trong phản ứng hoá học.

Bước 2. Chọn ra một trong bốn ẩn x_1, x_2, x_3, x_4 và cho ẩn đó một giá trị cụ thể. Thông thường, ta chọn ra ẩn ứng với phân tử có cấu trúc phức tạp nhất trong bốn phân tử A_1, A_2, A_3, A_4. Giải hệ phương trình bậc nhất theo ba ẩn còn lại.

Bài toán 3. Tìm các hệ số x, y, z để cân bằng phương trình: $xFe_3O_4 + yO_2 \xrightarrow{t^o} zFe_2O_3$.

Giải

Theo định luật bảo toàn nguyên tố đối với Fe và O, ta có: $3x = 2z$ hay $3x - 2z = 0$ và $4x + 2y = 3z$ hay $4x + 2y - 3z = 0$.

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x-\qquad 2z=0 \\ 4x+2y-3z=0 \end{cases} \quad (1)$$

Chọn $x = 4$. Khi đó, hệ (1) trở thành $\begin{cases} x \qquad\qquad = 4 \\ \qquad 2z = 12 \\ 2y-3z=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ z=6 \\ y=1. \end{cases}$

Vậy ta có phương trình sau cân bằng: $4Fe_3O_4 + O_2 \xrightarrow{t^o} 6Fe_2O_3$.

Bài toán 4. Hoà tan hoàn toàn 13,4 g hỗn hợp X gồm Mg, Al, Fe vào dung dịch H_2SO_4 đặc nóng dư thu được 0,55 mol khí SO_2 chỉ theo các phương trình phản ứng hoá học (1), (2), (3). Mặt khác, nếu cho 13,4 g hỗn hợp trên tác dụng với dung dịch HCl dư thì thu được 0,5 mol khí H_2 chỉ theo các phương trình phản ứng hoá học (4), (5), (6):

	$Mg + 2H_2SO_4 \xrightarrow{t^\circ} MgSO_4 + 2H_2O + SO_2$ (1)	$Mg + 2HCl \rightarrow MgCl_2 + H_2$ (4)
Số mol	a ... a	a ... a
	$2Al + 6H_2SO_4 \xrightarrow{t^\circ} Al_2(SO_4)_3 + 6H_2O + 3SO_2$ (2)	$2Al + 6HCl \rightarrow 2AlCl_3 + 3H_2$ (5)
Số mol	b ... $1{,}5b$	b ... $1{,}5b$
	$2Fe + 6H_2SO_4 \xrightarrow{t^\circ} Fe_2(SO_4)_3 + 6H_2O + 3SO_2$ (3)	$Fe + 2HCl \rightarrow FeCl_2 + H_2$ (6)
Số mol	c ... $1{,}5c$	c ... c

Ở đó, a, b, c (a, b, c lớn hơn 0) lần lượt là số mol của Mg, Al và Fe trong hỗn hợp X.

Tính khối lượng Mg, Al, Fe trong hỗn hợp X.

Giải

Do khối lượng hỗn hợp X bằng 13,4 g; nguyên tử khối (khối lượng mol) của Mg, Al, Fe lần lượt là 24, 27, 56 nên ta có: $24a + 27b + 56c = 13{,}4$.

Số mol SO_2 là 0,55 (mol).

Từ các phương trình (1), (2), (3), ta có: $a + 1{,}5b + 1{,}5c = 0{,}55$.

Số mol H_2 là 0,5 (mol).

Từ các phương trình (4), (5), (6), ta có: $a + 1{,}5b + c = 0{,}5$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 24a + 27b + 56c = 13{,}4 \\ a + 1{,}5b + 1{,}5c = 0{,}55 \\ a + 1{,}5b + c = 0{,}5. \end{cases}$

Giải hệ phương trình, ta được: $a = 0{,}1$ (mol); $b = 0{,}2$ (mol); $c = 0{,}1$ (mol).

Vậy ta có:

Khối lượng Mg trong hỗn hợp X là: $24 \,.\, 0{,}1 = 2{,}4$ (g).

Khối lượng Al trong hỗn hợp X là: $27 \,.\, 0{,}2 = 5{,}4$ (g).

Khối lượng Fe trong hỗn hợp X là: $56 \,.\, 0{,}1 = 5{,}6$ (g).

2. Tìm cấu tạo của nguyên tử và xác định công thức phân tử của hợp chất

Ta đã biết một nguyên tố có ba loại hạt cơ bản là: p (proton), n (neutron), e (electron).

Ta gọi Z là số lượng hạt p. Khi đó, theo nguyên lí cân bằng điện tích, ta có Z cũng là số lượng hạt e.

Ta gọi N là số lượng hạt n.

Đặt A = Z + N, A được gọi là số khối.

Bài toán 5. Tổng số hạt cơ bản (p, n, e) của một nguyên tử X là 26. Số hạt mang điện nhiều hơn số hạt không mang điện là 6. Xác định số hạt p, n, e của nguyên tử X.

Giải

Có hai loại hạt mang điện của X là p và e. Vì thế tổng số hạt mang điện của X là 2Z.

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2Z + N = 26 \\ 2Z - N = 6. \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được Z = 8, N = 10.

Vậy nguyên tử X có 8 hạt p, 10 hạt n và 8 hạt e.

Bài toán 6. Trong phân tử M_2X có tổng số hạt (p, n, e) là 140 hạt, trong đó số hạt mang điện nhiều hơn số hạt không mang điện là 44 hạt. Số khối của nguyên tử M lớn hơn số khối của nguyên tử X là 23. Tổng số hạt (p, n, e) trong nguyên tử M nhiều hơn trong nguyên tử X là 34 hạt. Xác định công thức phân tử của hợp chất M_2X.

Giải

Gọi Z_M, N_M lần lượt là số lượng hạt p, n của nguyên tử M;

Z_X, N_X lần lượt là số lượng hạt p, n của nguyên tử X.

• Theo giả thiết, tổng số hạt (p, n, e) trong phân tử M_2X là 140 hạt nên ta có:

$$2(2Z_M + N_M) + (2Z_X + N_X) = 140 \text{ hay } 4Z_M + 2N_M + 2Z_X + N_X = 140.$$

• Do trong phân tử M_2X số hạt mang điện nhiều hơn số hạt không mang điện là 44 hạt nên ta có:

$$(4Z_M + 2Z_x) - (2N_M + N_X) = 44 \text{ hay } 4Z_M - 2N_M + 2Z_x - N_X = 44.$$

• Số khối của nguyên tử M lớn hơn số khối của nguyên tử X là 23 nên ta có:

$$(Z_M + N_M) - (Z_X + N_X) = 23 \text{ hay } Z_M + N_M - Z_X - N_X = 23.$$

• Tổng số hạt (p, n, e) trong nguyên tử M nhiều hơn trong nguyên tử X là 34 hạt nên ta có:

$$(2Z_M + N_M) - (2Z_X + N_X) = 34 \text{ hay } 2Z_M + N_M - 2Z_X - N_X = 34.$$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 4Z_M + 2N_M + 2Z_X + N_X = 140 & (1) \\ 4Z_M - 2N_M + 2Z_X - N_X = 44 & (2) \\ Z_M + N_M - Z_X - N_X = 23 & (3) \\ 2Z_M + N_M - 2Z_X - N_X = 34 & (4) \end{cases}$

Cộng theo vế của phương trình (1) với từng phương trình (2), (3), (4), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8Z_M + 4Z_X = 184 \\ 5Z_M + 3N_M + Z_X = 163 \\ 6Z_M + 3N_M = 174. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được $Z_M = 19$, $N_M = 20$, $Z_X = 8$. Do đó, $N_X = 8$.

Vì $Z_M = 19$ nên M là K (kalium); $Z_X = 8$ nên X là O (oxygen).

Vậy phân tử đó là K_2O.

III. ỨNG DỤNG TRONG SINH HỌC

Bài toán 7. Một phân tử DNA có tổng số nucleotide (nu) loại G với một loại nucleotide khác bằng 60% tổng số nucleotide của phân tử DNA. Tổng số liên kết hydrogen của phân tử DNA là 3 120. Trong mạch 1 có số nu loại A bằng $\frac{1}{2}$ số nu loại G và bằng $\frac{1}{4}$ số nu loại T. Xác định số nucleotide mỗi loại trên từng mạch của phân tử DNA đó.

Giải

Kí hiệu: A, G, T, X lần lượt là tổng số nu loại A, G, T, X của phân tử DNA;

N là tổng số nu của phân tử DNA ;

A_1, G_1, T_1, X_1 lần lượt là tổng số nu loại A, G, T, X trong mạch 1;

A_2, G_2, T_2, X_2 lần lượt là tổng số nu loại A, G, T, X trong mạch 2.

• Ta có: $G + A = 50\%N$; $A = T$; $G = X$.

Mà đề bài cho tổng số nu loại G với một loại nu khác là 60% của N nên $G + X = 60\%N$. Suy ra $G = X = 30\%N$ và $A + T = 40\%N$.

Vì $A = T$ nên từ $A + T = 40\%N$ ta có: $A = T = 20\%N$. Do đó, $G = 1{,}5A$.

• Ta có số liên kết hydrogen bằng $2A + 3G = 3\,120$ mà $G = 1{,}5A$ nên $A = T = 480$; $G = X = 720$.

Vậy $N = 2(A + G) = 2\,400$.

Do đó, tổng số nucleotide của phân tử DNA trên mỗi mạch là $2\,400 : 2 = 1\,200$.

• Ta có: $A_1 = T_2$, $A_2 = T_1$ nên $A_1 + T_1 = A_1 + A_2 = 480$.

Theo giả thiết ở mạch 1 có $A_1 = \frac{1}{2}G_1 = \frac{1}{4}T_1$ hay $G_1 = 2A_1$, $T_1 = 4A_1$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} A_1 + T_1 = 480 \\ 4A_1 - T_1 = 0 \\ 2A_1 - G_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 96 \\ T_1 = 384 \\ G_1 = 192. \end{cases}$

Vậy số nucleotide loại X của mạch 1 là: $X_1 = 1\,200 - 96 - 384 - 192 = 528$.

• Ở mạch 2, ta có:

$A_2 = T_1 = 384$; $T_2 = A_1 = 96$; $G_2 = X_1 = 528$; $X_2 = G_1 = 192$.

IV. ỨNG DỤNG TRONG KINH TẾ

1. Mô hình cân bằng thị trường hàng hoá có liên quan

Giả sử trên thị trường có n loại hàng hoá được mua và bán, đánh số lần lượt là hàng hoá 1, 2, ..., n. Ta nói n loại hàng hoá đó *có liên quan* nếu giá của một mặt hàng nào đó thay đổi thì nó không những ảnh hưởng tới lượng cung (kí hiệu là Q_{S_i}) và lượng cầu (kí hiệu là Q_{D_i}) của bản thân mặt hàng đó, mà nó còn ảnh hưởng tới giá và lượng cung, lượng cầu của các mặt hàng còn lại.

Như vậy, đối với n loại hàng hoá có liên quan thì lượng cung Q_{S_i} (hoặc lượng cầu Q_{D_i}) của mỗi loại hàng hoá là một đại lượng phụ thuộc vào n biến $P_1, P_2, ..., P_n$, trong đó $P_1, P_2, ..., P_n$ lần lượt là giá của hàng hoá 1, 2, ..., n. Người ta thường biểu diễn sự phụ thuộc của lượng cung và lượng cầu vào giá của các hàng hoá bởi *hàm cung* và *hàm cầu* như sau:

$$Q_{S_i} = S_i(P_1, P_2, ..., P_n),$$
$$Q_{D_i} = D_i(P_1, P_2, ..., P_n)\ (1 \le i \le n),$$

trong đó $P_1, P_2, ..., P_n$ lần lượt là giá của hàng hoá 1, 2, ..., n.

Mô hình cân bằng thị trường n loại hàng hoá có liên quan (cân bằng cung cầu) được xác định bởi hệ phương trình: $Q_{S_i} = Q_{D_i}$, $1 \le i \le n$. Giải hệ phương trình đó chúng ta tìm được bộ giá cân bằng thị trường: $\overline{P} = \left(\overline{P_1}, \overline{P_2}, ..., \overline{P_n}\right)$. Thay vào Q_{S_i} (hoặc Q_{D_i}) chúng ta thu được bộ lượng cân bằng thị trường: $\overline{Q} = \left(\overline{Q_1}, \overline{Q_2}, ..., \overline{Q_n}\right)$.

Bài toán 8. Xét thị trường gồm ba loại hàng hoá gồm chè, cà phê, ca cao có hàm cung và hàm cầu tương ứng như sau:

$Q_{S_1} = -10 + P_1;\quad Q_{D_1} = 20 - P_1 - P_3$ (chè)

$Q_{S_2} = 2P_2;\quad Q_{D_2} = 40 - 2P_2 - P_3$ (cà phê)

$Q_{S_3} = -5 + 3P_3;\quad Q_{D_3} = 10 - P_1 + P_2 - P_3$ (ca cao)

a) Hãy thiết lập mô hình cân bằng thị trường của ba loại hàng hoá trên.

b) Xác định giá và lượng cung cà phê ở trạng thái cân bằng thị trường.

Giải

a) Mô hình cân bằng thị trường của ba loại hàng hoá trên được cho bởi hệ phương trình bậc nhất ba ẩn sau:

$$\begin{cases} Q_{S_1} = Q_{D_1} \\ Q_{S_2} = Q_{D_2} \\ Q_{S_3} = Q_{D_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 + P_1 = 20 - P_1 - P_3 \\ 2P_2 = 40 - 2P_2 - P_3 \\ -5 + 3P_3 = 10 - P_1 + P_2 - P_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + P_3 = 30 \\ 4P_2 + P_3 = 40 \\ P_1 - P_2 + 4P_3 = 15 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

b) Giải hệ phương trình (I), ta có:

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + \qquad\qquad P_3 = 30 \\ \qquad 4P_2 + \ P_3 = 40 \\ 2P_1 - 2P_2 + 8P_3 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + \qquad\qquad P_3 = 30 \\ \qquad 4P_2 + \ P_3 = 40 \\ \qquad 2P_2 - 7P_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + \qquad\qquad P_3 = 30 \\ \qquad 4P_2 + \ P_3 = 40 \\ \qquad 4P_2 - 14P_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + \qquad\quad P_3 = 30 \\ \qquad 4P_2 + P_3 = 40 \\ \qquad\quad 15P_3 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = \dfrac{41}{3} \\ P_2 = \dfrac{28}{3} \\ P_3 = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Vậy ở trạng thái cân bằng thị trường, giá cà phê là $\overline{P_2} = \dfrac{28}{3}$ và lượng cung cà phê là:

$$\overline{Q_{S_2}} = 2\overline{P_2} = 2 \cdot \frac{28}{3} = \frac{56}{3}.$$

2. Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân

Tổng thu nhập quốc dân, kí hiệu là Y, thường được tính trên hai nguồn chủ yếu: Chi tiêu cố định của chính phủ, kí hiệu là G_0, và tiền của người dân (bao gồm đầu tư của các hộ gia đình, kí hiệu là I_0, và tiêu dùng của các hộ gia đình, kí hiệu là C). Ta nói thu nhập quốc dân là cân bằng nếu $Y = C + I_0 + G_0$.

Xét mô hình cân bằng thu nhập quốc dân có dạng hệ phương trình bậc nhất:

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = a(Y - T) + b \\ T = \alpha Y. \end{cases}$$

Trong đó: T là thuế, $C = a(Y - T) + b$, các hằng số $0 < a < 1$, $b > 0$, $0 < \alpha < 1$ được chọn trước (phụ thuộc vào sự lựa chọn mô hình của các nhà hoạch định chính sách).

Bài toán 9. Cho mô hình cân bằng thu nhập quốc dân:

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = 150 + 0{,}8(Y - T) \\ T = 0{,}2Y. \end{cases}$$

Trong đó, Y là tổng thu nhập quốc dân, G_0 là chi tiêu cố định của chính phủ, I_0 là đầu tư của các hộ gia đình, C là tiêu dùng của các hộ gia đình, T là thuế và các đại lượng Y, G_0, I_0, T, C được tính theo cùng đơn vị đo.

a) Tìm trạng thái cân bằng khi $I_0 = 300$, $G_0 = 900$.

b) Khi suy thoái kinh tế, ta chọn $C = 150 + 0,7(Y - T)$. Giả sử $I_0 = 300$. Hỏi G_0 bằng bao nhiêu thì ổn định được tổng thu nhập quốc dân?

Giải

a) Khi $I_0 = 300$, $G_0 = 900$, mô hình cân bằng thu nhập quốc dân có dạng:

$$\begin{cases} Y - C = 1\,200 \\ -0,8Y + C + 0,8T = 150 \\ 0,2Y - T = 0 \end{cases} \quad \text{(I)}.$$

Giải hệ phương trình (I), ta có:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} Y - C = 1\,200 \\ 8Y - 10C - 8T = -1\,500 \\ 2Y - 10T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y - C = 1\,200 \\ 2C + 8T = 11\,100 \\ Y = 5T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 3\,750 \\ C = 2\,550 \\ T = 750. \end{cases}$$

b) Theo giả thiết $C = 150 + 0,7(Y - T)$ và $I_0 = 300$ nên mô hình cân bằng thu nhập quốc dân có dạng:

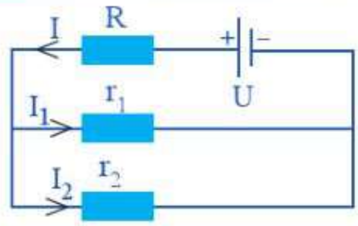
$$\begin{cases} Y - C = 300 + G_0 \\ -0,7Y + C + 0,7T = 150 \\ 0,2Y - T = 0 \end{cases} \quad \text{(II). Giải hệ (II), ta có:}$$

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} C = Y - 300 - G_0 \\ -0,7Y + Y - 300 - G_0 + 0,7\,.\,0,2Y = 150 \\ T = 0,2Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = Y - 300 - G_0 \\ \dfrac{11}{25}Y = 450 + G_0 \\ T = 0,2Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = Y - 300 - G_0 \\ Y = \dfrac{450 + G_0}{0,44} \\ T = 0,2Y. \end{cases}$$

Để ổn định được thu nhập quốc dân thì $Y = \dfrac{450 + G_0}{0,44} = 3\,750 \Leftrightarrow G_0 = 1\,200$.

BÀI TẬP

1. Cho mạch điện như *Hình 3*. Biết U = 20 V, R = 0,5 Ω, $r_1 = 1$ Ω, $r_2 = 2$ Ω. Tìm cường độ dòng điện I_1, I_2, I chạy qua mỗi điện trở.

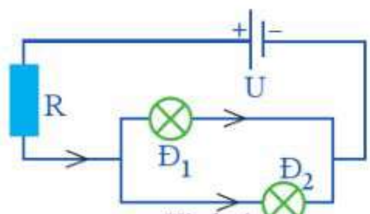


Hình 3

2. Cho mạch điện như *Hình 4*. Biết U = 24 V, $Đ_1$: 12 V – 6 W, $Đ_2$: 12 V – 12 W, R = 3 Ω.

a) Tính điện trở của mỗi bóng đèn.

b) Tính cường độ dòng điện chạy qua mỗi bóng đèn và điện trở R.



Hình 4

3. Tìm các hệ số x, y, z để cân bằng mỗi phương trình phản ứng hoá học sau:

a) $xKClO_3 \xrightarrow{t^\circ} yKCl + zO_2$;

b) $xFeCl_2 + yCl_2 \longrightarrow zFeCl_3$;

c) $xFe + yO_2 \xrightarrow{t^\circ} zFe_2O_3$;

d) $xNa_2SO_3 + 2KMnO_4 + yNaHSO_4 \xrightarrow{t^\circ} zNa_2SO_4 + 2MnSO_4 + K_2SO_4 + 3H_2O$.

4. Một giáo viên dạy Hoá tạo 1 000 g dung dịch HCl 25% từ ba loại dung dịch HCl có nồng độ lần lượt là 10%, 20% và 30%. Tính khối lượng dung dịch mỗi loại. Biết rằng lượng HCl có trong dung dịch 10% bằng $\frac{1}{4}$ lượng HCl có trong dung dịch 20%.

5. Tổng số hạt p, n, e trong hai nguyên tử kim loại A và B là 177. Trong đó số hạt mang điện nhiều hơn số hạt không mang điện là 47. Số hạt mang điện của nguyên tử B nhiều hơn của nguyên tử A là 8. Xác định số hạt proton trong một nguyên tử A.

6. Một phân tử DNA có khối lượng là $72 \cdot 10^4$ đvC và có 2 826 liên kết hydrogen. Mạch 2 có số nu loại A bằng 2 lần số nu loại T và bằng 3 lần số nu loại X. Xác định số nucleotide mỗi loại trên từng mạch của phân tử DNA đó. Biết rằng một nu có khối lượng trung bình là 300 đvC.

7. Tìm đa thức bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ (với $a \neq 0$) biết $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$, $f(2) = 7$.

8. Ba lớp 10A, 10B, 10C trồng được 164 cây bạch đàn và 316 cây thông. Mỗi học sinh lớp 10A trồng được 3 cây bạch đàn và 2 cây thông; mỗi học sinh lớp 10B trồng được 2 cây bạch đàn và 3 cây thông; mỗi học sinh lớp 10C trồng được 5 cây thông. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh? Biết số học sinh lớp 10A bằng trung bình cộng số học sinh lớp 10B và 10C.

9. Độ cao h của một vật trong chuyển động được tính bởi công thức $h = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$, với độ cao h và độ cao ban đầu h_0 được tính bằng mét, t là thời gian của chuyển động tính bằng giây, a là gia tốc của chuyển động tính bằng m/s^2, v_0 là vận tốc ban đầu tính bằng m/s. Tìm a, v_0, h_0. Biết rằng sau 1 s và 3 s vật cùng đạt được độ cao 50,225 m; sau 2 s vật đạt độ cao 55,125 m.

10. Một ngân hàng muốn đầu tư số tiền tín dụng là 100 tỉ đồng thu được vào ba nguồn: mua trái phiếu với mức sinh lời 8%/năm, cho vay thu lãi suất 10%/năm và đầu tư bất động sản với mức sinh lời 12%/năm. Theo điều kiện của quỹ tín dụng đề ra là tổng số tiền đầu tư vào trái phiếu và cho vay phải gấp ba lần số tiền đầu tư vào bất động sản. Nếu ngân hàng muốn thu được mức thu nhập 9,6 tỉ đồng hằng năm thì nên đầu tư như thế nào vào ba nguồn đó?

CHUYÊN ĐỀ II

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC. NHỊ THỨC NEWTON

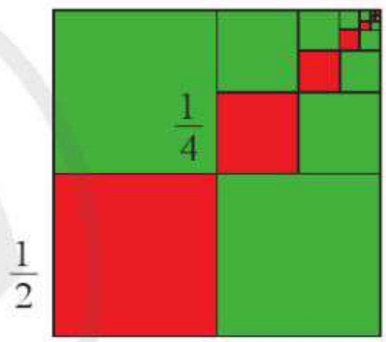
Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: phương pháp quy nạp toán học, nhị thức Newton.

§1 PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Chia hình vuông cạnh 1 thành bốn hình vuông nhỏ bằng nhau, lấy ra hình vuông nhỏ thứ nhất (ở góc dưới bên trái, màu đỏ), cạnh của hình vuông đó bằng $\frac{1}{2}$.

Chia hình vuông nhỏ ở góc trên bên phải thành bốn hình vuông bằng nhau, lấy ra hình vuông nhỏ thứ hai (màu đỏ), cạnh của hình vuông đó bằng $\frac{1}{4}$.

Tiếp tục quá trình trên ta được dãy các hình vuông nhỏ (màu đỏ) ở *Hình 1*.



Hình 1

Cạnh của hình vuông nhỏ thứ n (màu đỏ) bằng bao nhiêu? Vì sao?

I. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Xét mệnh đề chứa biến $P(n)$: "$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$" với n là số nguyên dương.

a) Chứng tỏ rằng $P(1)$ là mệnh đề đúng.

b) Với k là một số nguyên dương tuỳ ý mà $P(k)$ là mệnh đề đúng, cho biết $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1)$ bằng bao nhiêu.

c) Với k là một số nguyên dương tuỳ ý mà $P(k)$ là mệnh đề đúng, chứng tỏ rằng $P(k + 1)$ cũng là mệnh đề đúng bằng cách chỉ ra $k^2 + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$.

Ta đã chứng tỏ được rằng:
• $P(1)$ là mệnh đề đúng,
• Với k là một số nguyên dương tuỳ ý, nếu $P(k)$ là mệnh đề đúng thì $P(k + 1)$ cũng là mệnh đề đúng.
Khi đó $P(n)$ là mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ theo một nguyên lí mà ta gọi là nguyên lí quy nạp toán học.

Phương pháp chứng minh như trên (để khẳng định tính đúng đắn của một mệnh đề toán học) được gọi là *phương pháp quy nạp toán học*.

Để chứng minh mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta làm như sau:

Bước 1. Chứng tỏ mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2. Với k là một số nguyên dương tuỳ ý mà $P(k)$ là mệnh đề đúng (gọi là giả thiết quy nạp), ta phải chứng tỏ $P(k + 1)$ cũng là mệnh đề đúng.

Nhận xét: Để chứng minh mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên n, $n \geq m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ở *Bước 1* trong cách làm trên, ta phải chứng tỏ mệnh đề đúng với $n = m$.

Ví dụ 1 Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải

Bước 1. Khi $n = 1$, ta có: $1^3 - 1 = 0$ chia hết cho 3.

Bước 2. Với k là một số nguyên dương tuỳ ý mà $k^3 - k$ chia hết cho 3, ta phải chứng minh $(k+1)^3 - (k+1)$ chia hết cho 3.

Thật vậy, ta có: $(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 - k + 3(k^2 + k)$.

Theo giả thiết quy nạp, $(k^3 - k) \vdots 3$, mà $3(k^2 + k) \vdots 3$.

Suy ra $[k^3 - k + 3(k^2 + k)] \vdots 3$, tức là $[(k+1)^3 - (k+1)] \vdots 3$.

Do đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, $n^3 - n$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 2 Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\dfrac{1}{1\,.\,2} + \dfrac{1}{2\,.\,3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

Giải

Bước 1. Khi $n = 1$, ta có: $\dfrac{1}{1\,.\,(1+1)} = \dfrac{1}{1+1}$, vậy đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước 2. Với k là một số nguyên dương tuỳ ý mà đẳng thức đúng, ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với $k+1$, tức là $\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+...+\frac{1}{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có: $\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$.

Suy ra

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

Vậy đẳng thức đúng với $k+1$. Do đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tức là

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Chứng minh:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

II. ÁP DỤNG

Ví dụ 3 Một người gửi số tiền A (đồng) vào ngân hàng với lãi suất $r\%$/năm. Biết rằng, nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Chứng minh số tiền nhận được (bao gồm cả vốn lẫn lãi) sau n (năm) là $T_n = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ (đồng), nếu trong khoảng thời gian này người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi.

Giải

Sau 1 năm, số tiền vốn và lãi thu được là: $A + A\cdot\frac{r}{100} = A\left(1+\frac{r}{100}\right)$ (đồng).

Vậy $T_1 = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^1$, tức là đẳng thức đúng với $n = 1$.

Với k là một số nguyên dương tuỳ ý mà đẳng thức đúng, ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với $k+1$, tức là $T_{k+1} = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{k+1}$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có: $T_k = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^k$.

Ta thấy, sau khi hết k (năm) thì số tiền $T_k = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^k$ trở thành tiền vốn để tính tiền lãi cho năm thứ $k+1$. Do đó, số tiền vốn và lãi người đó có được sau $k+1$ (năm) là:

$$A\left(1+\frac{r}{100}\right)^k + A\left(1+\frac{r}{100}\right)^k \cdot \frac{r}{100} = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^k\left(1+\frac{r}{100}\right) = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{k+1},$$

tức là $T_{k+1} = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{k+1}$ (đồng).

Vậy đẳng thức đúng với $k+1$. Do đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tức là số tiền cả vốn lẫn lãi người đó có được sau n (năm) là:

$$T_n = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n \text{ (đồng).}$$

Ví dụ 4 Cho x là số thực, $x > -1$. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (1)$$

Giải

Bước 1. Khi $n = 1$, ta có: $(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1x$. Vậy bất đẳng thức (1) đúng với $n = 1$.

Bước 2. Với k là một số nguyên dương tuỳ ý mà bất đẳng thức (1) đúng, ta phải chứng minh bất đẳng thức (1) cũng đúng với $k+1$, tức là:

$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có:

$(1+x)^k \geq 1+kx$.

Vì theo giả thiết ta có: $1 + x > 0$, nên bất đẳng thức trên vẫn đúng nếu nhân cả hai vế với $1 + x$. Khi đó ta nhận được:

$(1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx) \cdot (1+x)$

$\Leftrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x+kx^2$.

Do $kx^2 \geq 0$ nên ta có: $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$.

Vậy bất đẳng thức (1) đúng với $k+1$. Do đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, bất đẳng thức (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý: Bất đẳng thức (1) còn được gọi là bất đẳng thức Bernoulli.

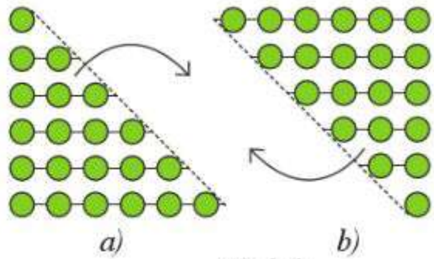
2 Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+\sqrt{2})^n$, $(1-\sqrt{2})^n$ lần lượt viết được ở dạng $a_n + b_n\sqrt{2}$, $a_n - b_n\sqrt{2}$, trong đó a_n, b_n là các số nguyên dương.

3 Chứng minh $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 5

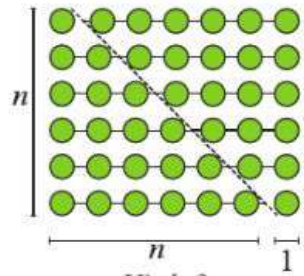
a) Nêu quy luật xếp số chấm lần lượt ở hàng thứ nhất, hàng thứ hai, ... theo thứ tự từ trên xuống dưới trong *Hình 2a*. Tính số chấm ở hàng thứ n.

b) Nêu quy luật xếp số chấm lần lượt ở hàng thứ nhất, hàng thứ hai, ... theo thứ tự từ dưới lên trên trong *Hình 2b*. Tính số chấm ở hàng thứ n.



Hình 2

c) Ghép *Hình 2a* và *Hình 2b* ta được *Hình 3*. Giả sử *Hình 2a* và *Hình 2b* có n hàng. Tính số chấm có trong *Hình 3*. Từ đó, xác định công thức tính tổng: $T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.



Hình 3

Giải

a) Số chấm ở hàng thứ n theo thứ tự từ trên xuống dưới trong *Hình 2a* là n.

b) Số chấm ở hàng thứ n theo thứ tự từ dưới lên trên trong *Hình 2b* là n.

c) Do các chấm ở *Hình 3* xếp thành n hàng và $n + 1$ cột nên số chấm ở *Hình 3* là $S_n = n(n+1)$.
Gọi T_n là số chấm ở *Hình 2a*. Khi đó $T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$. Mặt khác, số chấm ở *Hình 2b* cũng là T_n. Suy ra $T_n = \frac{1}{2}S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Vậy $T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ta chứng minh $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học như sau:

Bước 1. Khi $n = 1$, ta có: $T_1 = 1 = \frac{1.(1+1)}{2}$. Vậy đẳng thức đúng.

Bước 2. Với k là một số nguyên dương tuỳ ý mà đẳng thức đúng, ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với $k + 1$, tức là $T_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có: $T_k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Suy ra $T_{k+1} = 1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

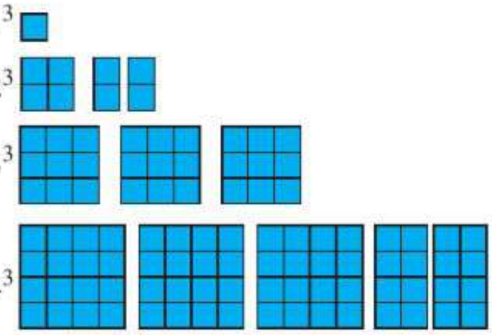
Vậy đẳng thức đúng với $k + 1$. Do đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 6

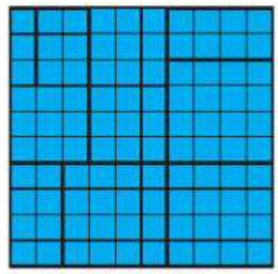
a) Diện tích của các hình tô màu trong mỗi hàng ở *Hình 4* được viết ở bên trái mỗi hàng đó. Tiếp tục vẽ theo quy luật đó, hãy tìm diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n.

b) Ghép các hình tô màu trong n hàng đầu tiên ta được một hình vuông (chẳng hạn, ghép các hình tô màu ở bốn hàng trong *Hình 4* ta được hình vuông ở *Hình 5*). Nêu kích thước của hình vuông ghép được. Từ đó, tính diện tích của hình đó.

c) Dự đoán công thức tính tổng $P_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.



Hình 4


Hình 5

Giải

a) Diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n là n^3.

b) Ghép các hình tô màu trong n hàng đầu tiên ta được một hình vuông có cạnh bằng $1+2+3+4+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Vậy diện tích hình vuông ghép được là $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

c) Dự đoán $P_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1+2+3+...+n)^2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tức là $P_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Ta chứng minh $P_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học như sau:

Bước 1. Khi $n = 1$, ta có: $P_1 = 1^3 = \left[\frac{1.(1+1)}{2}\right]^2$. Vậy đẳng thức đúng khi $n = 1$.

Bước 2. Với k là một số nguyên dương tuỳ ý mà đẳng thức đúng, ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với $k+1$, tức là $P_{k+1} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có: $P_k = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$.

Suy ra $P_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$

$$= \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 (k^2 + 4k + 4) = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

Vậy đẳng thức đúng với $k + 1$. Do đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tức là $P_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI TẬP

1. Cho $S_n = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n$ và $T_n = 2^{n+1} - 1$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) So sánh S_1 và T_1; S_2 và T_2; S_3 và T_3.

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

2. Cho $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}$ và $T_n = 2 - \frac{1}{2^n}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) So sánh S_1 và T_1; S_2 và T_2; S_3 và T_3.

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

3. Cho $S_n = \frac{1}{1\,.\,5} + \frac{1}{5\,.\,9} + \frac{1}{9\,.\,13} + ... + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tính S_1, S_2, S_3, S_4.

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

4. Cho q là số thực khác 1. Chứng minh: $1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $13^n - 1$ chia hết cho 6.

b) $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9.

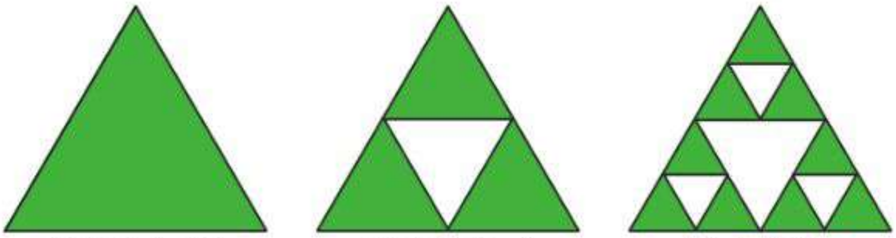
6. Chứng minh $n^n > (n+1)^{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

7. Chứng minh $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Cho tam giác đều màu xanh (*Hình thứ nhất*).

a) Nêu quy luật chọn tam giác đều màu trắng ở *Hình thứ hai*.

b) Nêu quy luật chọn các tam giác đều màu trắng ở *Hình thứ ba*.



Hình thứ nhất *Hình thứ hai* *Hình thứ ba*

c) Nêu quy luật tiếp tục chọn các tam giác đều màu trắng từ *Hình thứ tư* và các tam giác đều màu trắng ở những hình sau đó.

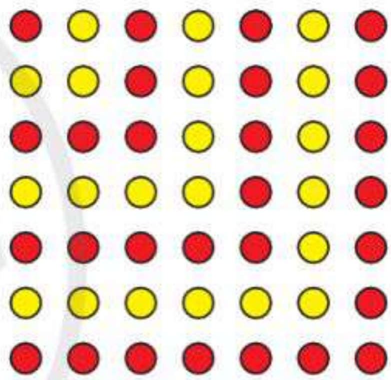
d) Tính số tam giác đều màu xanh lần lượt trong các *Hình thứ nhất*, *Hình thứ hai*, *Hình thứ ba*.

e) Dự đoán số tam giác đều màu xanh trong *Hình thứ n*. Chứng minh kết quả đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

9. Quan sát *Hình 6*.

a) Nêu quy luật sắp xếp các chấm đỏ và vàng xen kẽ nhau khi xếp các chấm đó từ góc trên bên trái xuống góc dưới bên phải (tạo thành hình vuông).

b) Giả sử hình vuông thứ n có mỗi cạnh chứa n chấm. Tính tổng số chấm được xếp trong hình vuông (kể cả trên cạnh). Chứng minh kết quả đó bằng phương pháp quy nạp toán học.



Hình 6

10. Giả sử năm đầu tiên, cô Hạnh gửi vào ngân hàng A (đồng) với lãi suất $r\%$/năm. Hết năm đầu tiên, cô Hạnh không rút tiền ra và gửi thêm A (đồng) nữa. Hết năm thứ hai, cô Hạnh cũng không rút tiền ra và lại gửi thêm A (đồng) nữa. Cứ tiếp tục như vậy cho những năm sau. Chứng minh số tiền cả vốn lẫn lãi mà cô Hạnh có được sau n (năm) là $T_n = \dfrac{A(100+r)}{r}\left[\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^n - 1\right]$ (đồng), nếu trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi.

11. Một người gửi số tiền A (đồng) vào ngân hàng. Biểu lãi suất của ngân hàng như sau: Chia mỗi năm thành m kì hạn và lãi suất $r\%$/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi kì hạn, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Chứng minh số tiền nhận được (bao gồm cả vốn lẫn lãi) sau n (năm) gửi là $S_n = A\left(1+\dfrac{r}{100m}\right)^{m.n}$ (đồng), nếu trong khoảng thời gian này người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi.

§2 NHỊ THỨC NEWTON

Làm thế nào để khai triển biểu thức $(a + b)^n$ với n là số nguyên dương một cách nhanh chóng?

I. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

1

a) Quan sát khai triển biểu thức sau:

$$(a + b)^5 = C_5^0a^5 + C_5^1a^{5-1}b^1 + C_5^2a^{5-2}b^2 + C_5^3a^{5-3}b^3 + C_5^4a^{5-4}b^4 + C_5^5b^5.$$

Từ đó nêu dạng tổng quát của mỗi số hạng trong khai triển biểu thức $(a + b)^5$.

b) Xét biểu thức $(a + b)^n$ với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

Nêu dự đoán về dạng tổng quát của mỗi số hạng trong khai triển biểu thức $(a + b)^n$.

Khai triển biểu thức $(a + b)^n$ là tổng có $n + 1$ số hạng, trong đó:

- *Số hạng không chứa b có dạng $C_n^0a^n$;*
- *Số hạng không chứa a có dạng $C_n^nb^n$;*
- *Mỗi số hạng còn lại đều có dạng $C_n^ka^{n-k}b^k$ $(1 \leq k \leq n-1)$.*

Trong trường hợp tổng quát, với n là số nguyên dương, ta có công thức nhị thức Newton:

$$(a + b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + ... + C_n^ka^{n-k}b^k + ... + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n.$$

Nhận xét

Từ công thức nhị thức Newton nói trên, ta có khai triển của $(a - b)^n$ như sau:

$(a - b)^n = C_n^0a^n - C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 - C_n^3a^{n-3}b^3 + ...$, ở đó các dấu "+", "–" xen kẽ nhau.

Chẳng hạn, ta có: $(a - b)^3 = C_3^0a^{3-0} - C_3^1a^{3-1}b^1 + C_3^2a^{3-2}b^2 - C_3^3b^3$

$$= C_3^0a^3 - C_3^1a^2b^1 + C_3^2ab^2 - C_3^3b^3;$$

$$(a-b)^4 = C_4^0a^{4-0} - C_4^1a^{4-1}b^1 + C_4^2a^{4-2}b^2 - C_4^3a^{4-3}b^3 + C_4^4b^4$$
$$= C_4^0a^4 - C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 - C_4^3ab^3 + C_4^4b^4.$$

Ví dụ 1 Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x+y)^6$; b) $(x-y)^6$.

Giải. Ta có:

a) $(x+y)^6 = C_6^0x^6 + C_6^1x^5y + C_6^2x^4y^2 + C_6^3x^3y^3 + C_6^4x^2y^4 + C_6^5xy^5 + C_6^6y^6$
$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$

b) $(x-y)^6 = C_6^0x^6 - C_6^1x^5y + C_6^2x^4y^2 - C_6^3x^3y^3 + C_6^4x^2y^4 - C_6^5xy^5 + C_6^6y^6$
$= x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6.$

1 Khai triển biểu thức $(x+2)^7$.

Ví dụ 2 Khai triển biểu thức $(x+1)^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải

$$(x+1)^n = C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1}.1 + \dots + C_n^kx^{n-k}.1^k + \dots + C_n^{n-1}x.1^{n-1} + C_n^n.1^n$$
$$= C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + \dots + C_n^kx^{n-k} + \dots + C_n^{n-1}x + C_n^n.$$

Ví dụ 3 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, tính mỗi tổng sau:

a) $A = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$;

b) $B = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$;

c) $C = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n-2} + C_{2n}^{2n}$;
$D = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-3} + C_{2n}^{2n-1}$.

2 Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh
$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Giải

a) Ta có:

$$(a+b)^{2n} = C_{2n}^0a^{2n} + C_{2n}^1a^{2n-1}b + C_{2n}^2a^{2n-2}b^2 + \dots + C_{2n}^{2n-1}ab^{2n-1} + C_{2n}^{2n}b^{2n}.$$

Cho $a = b = 1$, ta có:

$$(1+1)^{2n} = C_{2n}^0 1^{2n} + C_{2n}^1 1^{2n-1}.1 + C_{2n}^2 1^{2n-2}.1^2 + \dots + C_{2n}^{2n-1}1.1^{2n-1} + C_{2n}^{2n}1^{2n}$$
$$= C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}.$$

Vậy $A = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$.

b) Ta có:

$$(a-b)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^{0}\, a^{2n} - \mathrm{C}_{2n}^{1}\, a^{2n-1} b + \mathrm{C}_{2n}^{2}\, a^{2n-2} b^2 - \ldots - \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} a b^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n}\, b^{2n}.$$

Cho $a = b = 1$, ta có:

$$(1-1)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^{0}\, 1^{2n} - \mathrm{C}_{2n}^{1}\, 1^{2n-1}.\,1 + \mathrm{C}_{2n}^{2}\, 1^{2n-2}.\,1^2 - \ldots - \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} 1\,.\,1^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n}\, 1^{2n}$$

$$= \mathrm{C}_{2n}^{0} - \mathrm{C}_{2n}^{1} + \mathrm{C}_{2n}^{2} - \ldots - \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n}.$$

Vậy $B = (1-1)^{2n} = 0$.

c) Ta có: $C + D = A = 2^{2n}$ và $C - D = B = 0$ nên $C = D = 2^{2n} : 2 = 2^{2n-1}$.

Ví dụ 4 Tính $T = \mathrm{C}_n^0 2^n + \mathrm{C}_n^1 2^{n-1}.3 + \ldots + \mathrm{C}_n^k 2^{n-k}.3^k + \ldots + \mathrm{C}_n^{n-1} 2^1.3^{n-1} + \mathrm{C}_n^n 3^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải

$$T = \mathrm{C}_n^0 2^n + \mathrm{C}_n^1 2^{n-1}.3^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^k 2^{n-k}.3^k + \ldots + \mathrm{C}_n^{n-1} 2^1.3^{n-1} + \mathrm{C}_n^n 3^n$$

$$= (2+3)^n = 5^n.$$

II. TAM GIÁC PASCAL

2

Ta đã biết: $(a+b)^2 = \mathrm{C}_2^0 a^2 + \mathrm{C}_2^1 ab + \mathrm{C}_2^2 b^2$;

$(a+b)^3 = \mathrm{C}_3^0 a^3 + \mathrm{C}_3^1 a^2 b + \mathrm{C}_3^2 ab^2 + \mathrm{C}_3^3 b^3$;

$(a+b)^4 = \mathrm{C}_4^0 a^4 + \mathrm{C}_4^1 a^3 b + \mathrm{C}_4^2 a^2 b^2 + \mathrm{C}_4^3 ab^3 + \mathrm{C}_4^4 b^4$;

$(a+b)^5 = \mathrm{C}_5^0 a^5 + \mathrm{C}_5^1 a^4 b + \mathrm{C}_5^2 a^3 b^2 + \mathrm{C}_5^3 a^2 b^3 + \mathrm{C}_5^4 ab^4 + \mathrm{C}_5^5 b^5$.

Ta sắp xếp những hệ số tổ hợp ở trên như sau:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & \mathrm{C}_2^0 & & \mathrm{C}_2^1 & & \mathrm{C}_2^2 & & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathrm{C}_3^0 & & \mathrm{C}_3^1 & & \mathrm{C}_3^2 & & \mathrm{C}_3^3 & & \\
 & \mathrm{C}_4^0 & & \mathrm{C}_4^1 & & \mathrm{C}_4^2 & & \mathrm{C}_4^3 & & \mathrm{C}_4^4 & \\
\mathrm{C}_5^0 & & \mathrm{C}_5^1 & & \mathrm{C}_5^2 & & \mathrm{C}_5^3 & & \mathrm{C}_5^4 & & \mathrm{C}_5^5
\end{array}$$

Nêu phép toán để từ hai số hạng của dòng trên suy ra được số hạng tương ứng (thể hiện ở mũi tên ↓) ở dòng dưới trong bảng các hệ số nói trên.

Nhận xét: Xuất phát từ dãy các hệ số trong khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n$ với $n \in \mathbb{N}$, ta bổ sung thêm hai dòng đầu tiên và nhận được tam giác các hệ số như sau:

$n = 0$	C_0^0	1
$n = 1$	$C_1^0 \quad C_1^1$	$1 \quad 1$
$n = 2$	$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$	$1 \quad 2 \quad 1$
$n = 3$	$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$	$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$
$n = 4$	$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$	$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$
$n = 5$	$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$	$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$
...	....	....

Tam giác số ở trên được gọi là *tam giác Pascal*.

Trong tam giác Pascal, tổng hai số hạng liên tiếp ở dòng trên thì bằng số hạng tương ứng ở dòng tiếp theo vì ta đã biết tính chất $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ với $0 \le k < n$ và $k, n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 5

a) Viết tam giác số Pascal ứng với $n \le 6$.

b) Viết khai triển của nhị thức $(a + b)^6$ (không sử dụng hệ số ở dạng tổ hợp).

Giải

a) Tam giác số Pascal ứng với $n \le 6$ là

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

3 Sử dụng tam giác Pascal để khai triển các biểu thức sau:

a) $(x + y)^7$;

b) $(x - 2)^7$.

b) Khai triển của nhị thức $(a + b)^6$ là:

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

III. HỆ SỐ TRONG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

Trong mục này, ta sẽ tìm hiểu một số tính chất của các hệ số trong khai triển nhị thức Newton $(a + b)^n$.

1. Sự biến thiên của dãy hệ số trong khai triển nhị thức $(a + b)^n$

3 Xét dãy các hệ số trong khai triển nhị thức $(a + b)^4$ (*Hình 7a*) và nhị thức $(a + b)^5$ (*Hình 7b*) sau:

$$C_4^2 = 6$$
$$C_4^1 = 4 \longleftrightarrow C_4^3 = 4$$
$$C_4^0 = 1 \longleftrightarrow C_4^4 = 1$$

a)

$$C_5^2 = 10 \longleftrightarrow C_5^3 = 10$$
$$C_5^1 = 5 \longleftrightarrow C_5^4 = 5$$
$$C_5^0 = 1 \longleftrightarrow C_5^5 = 1$$

b)

Hình 7

a) So sánh từng cặp hệ số C_4^0 và C_4^4; C_4^1 và C_4^3 ở *Hình 7a*.

So sánh từng cặp hệ số C_5^0 và C_5^5; C_5^1 và C_5^4; C_5^2 và C_5^3 ở *Hình 7b*.

b) Nêu nhận xét về sự tăng giảm của mỗi dãy hệ số:

$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$ (trong khai triển $(a + b)^4$).

$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$ (trong khai triển $(a + b)^5$).

Dãy hệ số trong khai triển $(a + b)^4$ và $(a + b)^5$ như đã viết ở trên cùng có hai tính chất sau:

- *Các cặp hệ số tính từ hai đầu trở vào (tương ứng) thì bằng nhau.*
- *Dãy hệ số tăng dần đến "giữa" rồi giảm dần.*

Nhận xét: Một cách tổng quát, dãy hệ số: $C_n^0 \; C_n^1 \; C_n^2 \; \dots \; C_n^{n-1} \; C_n^n$ trong khai triển $(a + b)^n$ có hai tính chất sau:

- Các cặp hệ số tính từ hai đầu trở vào (tương ứng) thì bằng nhau:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \text{ với mọi } k \in \mathbb{N}, k \le n, n \in \mathbb{N}^*.$$

- Dãy hệ số tăng dần đến "giữa" rồi giảm dần:

$$C_n^0 < C_n^1 < C_n^2 < \dots \text{ và } \dots > C_n^{n-2} > C_n^{n-1} > C_n^n.$$

Ví dụ 6 Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển của:

a) $(a + b)^6$; b) $(a + b)^7$.

Giải

Ta có:

a) $C_6^0 < C_6^1 < C_6^2 < C_6^3$ và $C_6^3 > C_6^4 > C_6^5 > C_6^6$.

Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển của $(a + b)^6$ là $C_6^3 = 20$.

4 Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển của:

a) $(a + b)^{2\,022}$;

b) $(a + b)^{2\,023}$.

b) $C_7^0 < C_7^1 < C_7^2 < C_7^3 = C_7^4$ và $C_7^4 > C_7^5 > C_7^6 > C_7^7$.

Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển của $(a+b)^7$ là $C_7^3 = C_7^4 = 35$.

2. Hệ số của x^k trong khai triển $(ax+b)^n$ $(ab \neq 0)$ thành đa thức

4 Cho a và b là hai số thực khác 0. Quan sát khai triển nhị thức:

$$(ax+b)^n = C_n^0(ax)^n + C_n^1(ax)^{n-1}b + C_n^2(ax)^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}(ax)b^{n-1} + C_n^n b^n$$
$$= C_n^0 a^n x^n + C_n^1 a^{n-1}bx^{n-1} + C_n^2 a^{n-2}b^2x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1}x + C_n^n b^n.$$

Nêu công thức tính hệ số của x^k trong khai triển trên.

Hệ số của x^k trong khai triển trên là $C_n^{n-k}a^k b^{n-k}$ với $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 7 Xét khai triển của $(2x+1)^{12}$.

a) Nêu số hạng chứa x^6, từ đó nêu hệ số của x^6.

b) Nêu hệ số của x^k với $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 12$.

Giải

a) Số hạng chứa x^6 là $C_{12}^6 2^6x^6$. Hệ số của x^6 là $C_{12}^6 2^6$.

b) Số hạng chứa x^{12} là $C_{12}^0(2x)^{12} = 2^{12}x^{12}$. Do đó, hệ số của x^{12} là 2^{12}.

Số hạng tự do là $C_{12}^{12} . 1^{12} = 1$.

Số hạng chứa x^k $(1 \leq k \leq 11)$ là $C_{12}^{12-k}(2x)^k = C_{12}^{12-k}2^kx^k$.

Do đó, hệ số của x^k $(1 \leq k \leq 11)$ là $C_{12}^{12-k}2^k$.

5 Xét khai triển của $(x+5)^{15}$. Nêu hệ số của x^k với $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 15$.

Ví dụ 8 Xét khai triển của $(3x-2)^{18}$.

a) Nêu số hạng chứa x^9, từ đó nêu hệ số của x^9.

b) Nêu số hạng chứa x^{10}, từ đó nêu hệ số của x^{10}.

Giải. Ta có:

$$(3x-2)^{18} = C_{18}^0(3x)^{18} - C_{18}^1(3x)^{17} . 2 + C_{18}^2(3x)^{16} . 2^2 - \ldots - C_{18}^{17}(3x) . 2^{17} + C_{18}^{18}2^{18}$$
$$= C_{18}^0 3^{18}x^{18} - C_{18}^1 3^{17} . 2x^{17} + C_{18}^2 3^{16} . 2^2x^{16} - \ldots - C_{18}^{17}3 . 2^{17}x + C_{18}^{18}2^{18}$$

a) Số hạng chứa x^9 là $-C_{18}^9 3^9.2^9x^9$. Hệ số của x^9 là $-C_{18}^9 3^9.2^9 = -C_{18}^9 6^9$.

b) Số hạng chứa x^{10} là $C_{18}^8 3^{10}.2^8x^{10}$. Hệ số của x^{10} là $C_{18}^8 3^{10}.2^8$.

BÀI TẬP

1. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(2x+y)^6$; b) $(x-3y)^6$; c) $(x-1)^n$;

d) $(x+2)^n$; e) $(x+y)^{2n}$; g) $(x-y)^{2n}$,

trong đó n là số nguyên dương.

2. Tính:

a) $S = C_{2022}^{0} 9^{2022} + C_{2022}^{1} 9^{2021} + ... + C_{2022}^{k} 9^{2022-k} + ... + C_{2022}^{2021} 9 + C_{2022}^{2022}$;

b) $T = C_{2\,022}^{0} 4^{2\,022} - C_{2\,022}^{1} 4^{2\,021} . 3 + ... - C_{2\,022}^{2\,021} 4 . 3^{2\,021} + C_{2\,022}^{2\,022} 3^{2\,022}$.

3. Chứng minh:

$$C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1} + ... + C_n^k 3^{n-k} + ... + C_n^{n-1} 3 + C_n^n$$
$$= C_n^0 + C_n^1 3 + ... + C_n^k 3^k + ... + C_n^{n-1} 3^{n-1} + C_n^n 3^n \text{ với } 0 \le k \le n;\ k,\ n \in \mathbb{N}.$$

4. Xác định hệ số của:

a) x^{12} trong khai triển của $(x+4)^{30}$;

b) x^{10} trong khai triển của $(3+2x)^{30}$;

c) x^{15} và x^{16} trong khai triển của $\left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{7}\right)^{51}$.

5. Xét khai triển của $\left(x + \frac{5}{2}\right)^{12}$.

a) Xác định hệ số của x^7.

b) Nêu hệ số của x^k với $k \in \mathbb{N}, k \le 12$.

6. Xét khai triển của $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\right)^{21}$.

a) Xác định hệ số của x^{10}.

b) Nêu hệ số của x^k với $k \in \mathbb{N}, k \le 21$.

7. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển của:

a) $(a+b)^8$; b) $(a+b)^9$.

8. Chứng minh công thức nhị thức Newton bằng phương pháp quy nạp:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

9. Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh:

a) $n^5 - n$ chia hết cho 5 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $n^7 - n$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

10. Cho tập hợp $A = \{x_1; x_2; x_3; ...; x_n\}$ có n phần tử. Tính số tập hợp con của A.

11. Một nhóm gồm 10 học sinh tham gia chiến dịch Mùa hè xanh. Nhà trường muốn chọn ra một đội công tác có ít nhất hai học sinh trong những học sinh trên. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội công tác như thế?

12. Để tham gia một cuộc thi làm bánh, bạn Tiến làm 12 chiếc bánh có màu khác nhau và chọn ra số nguyên dương chẵn chiếc bánh để cho vào một hộp trưng bày. Hỏi bạn Tiến có bao nhiêu cách để chọn bánh cho vào hộp trưng bày đó?

13. Bác Thành muốn mua quà cho con nhân dịp sinh nhật nên đã đến một cửa hàng đồ chơi. Bác dự định chọn một trong năm loại đồ chơi. Ở cửa hàng, mỗi loại đồ chơi đó chỉ có 10 sản phẩm khác nhau bày bán. Biết rằng nếu mua bộ trực thăng điều khiển từ xa, bác sẽ chỉ mua 1 sản phẩm; nếu mua bộ đồ chơi lego, bác sẽ mua 3 sản phẩm khác nhau; nếu mua bộ lắp ghép robot chạy bằng năng lượng mặt trời, bác sẽ mua 5 sản phẩm khác nhau; nếu mua rubik, bác sẽ mua 7 sản phẩm khác nhau; còn nếu mua mô hình khủng long, bác sẽ mua 9 sản phẩm khác nhau. Bác Thành có bao nhiêu cách chọn quà sinh nhật cho con?

14. Giả sử tính trạng ở một loài cây được quy định do tác động cộng gộp của n cặp alen phân li độc lập $A_1a_1, A_2a_2, ..., A_na_n$. Cho cây F_1 dị hợp về n cặp alen giao phối với nhau. Tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 là hệ số của khai triển nhị thức Newton $(a+b)^{2n}$, nghĩa là tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 là $C_{2n}^0 : C_{2n}^1 : C_{2n}^2 : ... : C_{2n}^{2n-2} : C_{2n}^{2n-1} : C_{2n}^{2n}$.

Cho biết một loài cây có tính trạng được quy định bởi tác động cộng gộp của 4 cặp alen phân li độc lập. Tìm tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 nếu cây F_1 dị hợp về 4 cặp alen giao phối với nhau.

CHUYÊN ĐỀ III

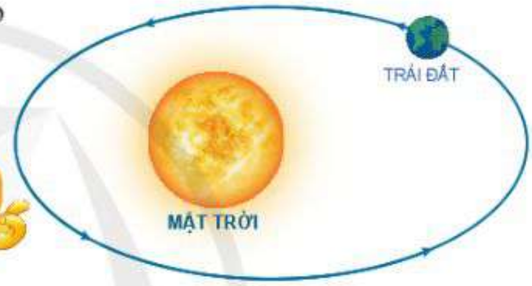
BA ĐƯỜNG CONIC VÀ ỨNG DỤNG

Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: xác định được các yếu tố đặc trưng của ba đường conic (elip, hypebol, parabol) và giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với ba đường conic đó.

§1 ELIP

Trái Đất chuyển động quanh Mặt Trời theo một quỹ đạo là đường elip mà Mặt Trời là một tiêu điểm (*Hình 1*).

Làm thế nào để tìm được khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất giữa Trái Đất và Mặt Trời?



Hình 1

Ở sách giáo khoa Toán 10 Chương VII, chúng ta đã học về ba đường conic, trong đó có đường elip. Với bài học này, chúng ta sẽ tìm hiểu thêm những yếu tố đặc trưng của elip.

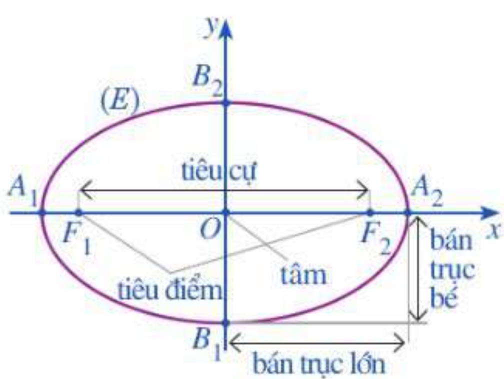
I. TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA ELIP

1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta xét elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, trong đó $a>b>0$ (*Hình 2*).

a) Tìm toạ độ hai tiêu điểm F_1, F_2 của (E).

b) (E) cắt trục Ox tại các điểm A_1, A_2 và cắt trục Oy tại các điểm B_1, B_2. Tìm độ dài các đoạn thẳng OA_2 và OB_2.

Chú ý: Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ (với $c=\sqrt{a^2-b^2}$) được gọi là *tiêu cự* của elip (E). Đoạn A_1A_2 là *trục lớn*, đoạn B_1B_2 là *trục bé* của elip. Độ dài của trục lớn là $2a$, độ dài của trục bé là $2b$. Các độ dài $OA_2 = a$, $OB_2 = b$ lần lượt được gọi là độ dài bán trục lớn, độ dài bán trục bé.



Hình 2

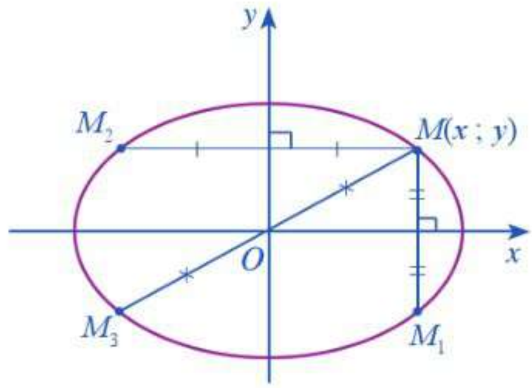
2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta xét elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, trong đó $a>b>0$.

Cho điểm $M(x\ ;\ y)$ nằm trên (E) (*Hình 3*).

a) Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua trục Ox. Tìm toạ độ của điểm M_1. Điểm M_1 có nằm trên (E) hay không? Tại sao?

b) Gọi M_2 là điểm đối xứng của M qua trục Oy. Tìm toạ độ của điểm M_2. Điểm M_2 có nằm trên (E) hay không? Tại sao?

c) Gọi M_3 là điểm đối xứng của M qua gốc O. Tìm toạ độ của điểm M_3. Điểm M_3 có nằm trên (E) hay không? Tại sao?



Hình 3

Nếu điểm $M(x\ ;\ y)$ nằm trên elip (E) thì các điểm $M_1(x\ ;-y)$, $M_2(-x\ ;\ y)$, $M_3(-x\ ;-y)$ cũng nằm trên (E).

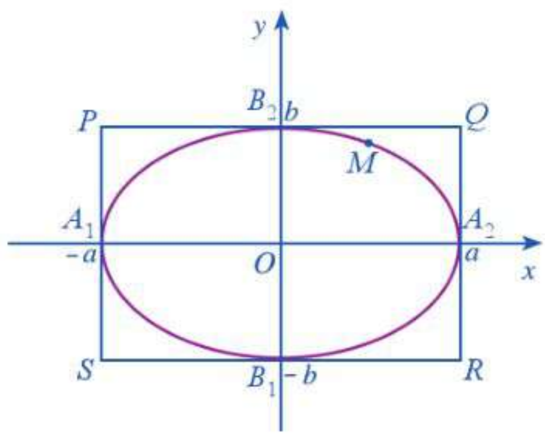
Elip (E) nhận hai trục toạ độ làm hai trục đối xứng và gốc toạ độ O làm tâm đối xứng. Gốc O còn được gọi là tâm của elip (E).

II. HÌNH CHỮ NHẬT CƠ SỞ

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta xét elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, trong đó $a>b>0$.

(E) cắt trục Ox tại các điểm $A_1(-a\ ;\ 0)$, $A_2(a\ ;\ 0)$ và cắt trục Oy tại các điểm $B_1(0\ ;-b)$, $B_2(0\ ;\ b)$. Bốn điểm này được gọi là các đỉnh của elip.

Vẽ qua A_1, A_2 hai đường thẳng song song với trục tung; vẽ qua B_1, B_2 hai đường thẳng song song với trục hoành. Bốn đường thẳng đó tạo thành hình chữ nhật $PQRS$. Ta gọi hình chữ nhật đó là *hình chữ nhật cơ sở* của elip (E) (*Hình 4*).



Hình 4

3

a) Nêu nhận xét về vị trí bốn đỉnh của elip (E) với bốn cạnh của hình chữ nhật cơ sở.

b) Cho điểm $M(x ; y)$ thuộc elip (E). Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của x và của y.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Khi đó, ta có:

- Hình chữ nhật cơ sở có bốn đỉnh là $P(-a ; b)$, $Q(a ; b)$, $R(a ; -b)$, $S(-a ; -b)$;
- Bốn đỉnh của elip là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật cơ sở;
- Nếu điểm $M(x ; y)$ thuộc (E) thì $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$. Do đó, mọi điểm của elip nếu không phải là đỉnh thì đều nằm trong hình chữ nhật cơ sở.

Ví dụ 1 Cho elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) Tìm toạ độ các đỉnh của elip.

b) Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của elip.

Giải

a) Ta có: $a^2 = 25$, suy ra $a = 5$; $b^2 = 9$, suy ra $b = 3$.

Vậy elip có các đỉnh là $A_1(-5 ; 0)$, $A_2(5 ; 0)$, $B_1(0 ; -3)$, $B_2(0 ; 3)$.

b) Toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là $P(-5 ; 3)$, $Q(5 ; 3)$, $R(5 ; -3)$, $S(-5 ; -3)$.

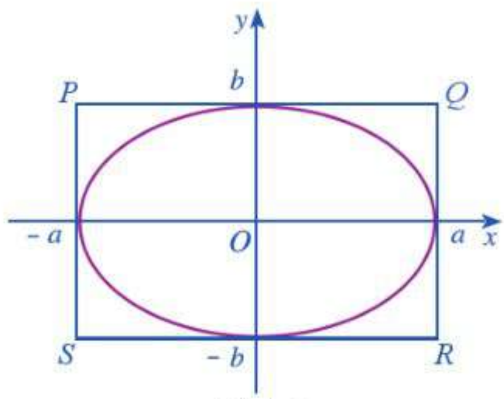
1 Viết phương trình chính tắc của elip, biết $A_1(-4 ; 0)$ và $B_2(0 ; 2)$ là hai đỉnh của nó.

4 Quan sát elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > b > 0$ và hình chữ nhật cơ sở $PQRS$ của (E) (*Hình 5*).

a) Tính tỉ số giữa hai cạnh $\frac{QR}{PQ}$ của hình chữ nhật $PQRS$.

b) Tỉ số $\frac{QR}{PQ}$ phản ánh đặc điểm gì của (E) về hình dạng?

Ta thấy: $\frac{QR}{PQ} = \frac{b}{a}$ với $0 < \frac{b}{a} < 1$. Tỉ số $\frac{b}{a}$ phản ánh cụ thể hình dạng của (E) như sau:



Hình 5

- Nếu tỉ số $\frac{b}{a}$ càng bé thì hình chữ nhật cơ sở càng "dẹt", do đó (E) càng "gầy".
- Nếu tỉ số $\frac{b}{a}$ càng lớn thì b càng gần a và hình chữ nhật cơ sở càng gần với hình vuông, do đó (E) càng "béo".

III. TÂM SAI CỦA ELIP

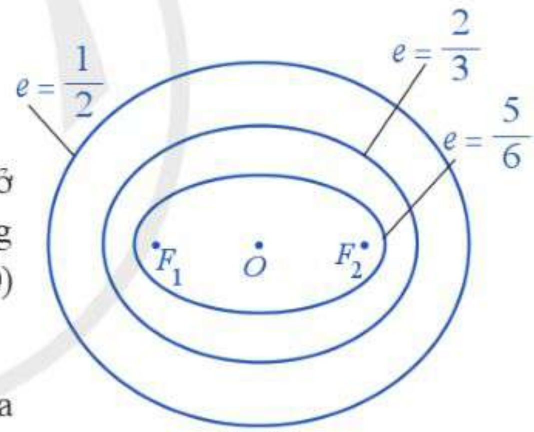
Trong mặt phẳng, cho hai điểm F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$. Như đã biết, elip là tập hợp những điểm M trong mặt phẳng có tổng khoảng cách đến hai điểm F_1, F_2 bằng hằng số $2a$ cho trước $(a > c > 0)$. Vì thế, người ta thường mô tả những yếu tố đặc trưng cho elip chỉ thông qua các hằng số a và c. Chẳng hạn, thay vì sử dụng tỉ số $\frac{b}{a}$, người ta sử dụng tỉ số $\frac{c}{a}$. Hơn nữa, tỉ số $\frac{c}{a}$ đóng vai trò quan trọng trong việc tìm hiểu các tính chất của elip nói riêng và ba đường conic nói chung.

Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip gọi là *tâm sai* của elip và được kí hiệu là e, tức là $e = \frac{c}{a}$.

Nhận xét: • $0 < e < 1$.

• $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

Từ mối liên hệ giữa hình dạng của hình chữ nhật cơ sở với hình dạng của elip, ta có: Nếu e càng lớn (tức là càng gần 1) thì elip càng "gầy"; nếu e càng bé (tức là càng gần 0) thì elip càng "béo" (*Hình 6*).



Hình 6

Ví dụ 2 Tìm toạ độ tiêu điểm, tiêu cự và tâm sai của elip có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Giải

Ta có: $a = 5, b = 3$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, tức là $c = 4$. Suy ra $2c = 8$.

Vậy elip có hai tiêu điểm là $F_1(-4 ; 0)$, $F_2(4 ; 0)$ và có tiêu cự là 8.

Tâm sai của elip là $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

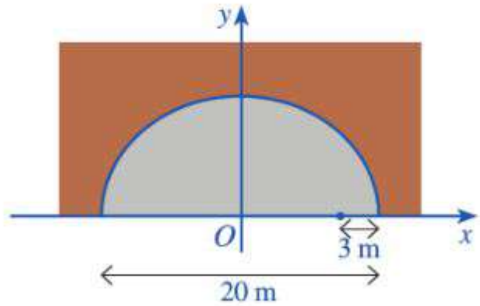
2 Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết tiêu cự bằng 12 và tâm sai bằng $\frac{3}{5}$.

Ví dụ 3 Một đường hầm xuyên qua núi có chiều rộng là 20 m, mặt cắt đứng của đường hầm có dạng nửa elip và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở *Hình 7*. Giả sử tâm sai của đường elip là $e = 0{,}5$.

a) Tìm chiều cao của đường hầm đó.

b) Tìm độ cao của đường hầm tại điểm trên mặt đường cách chân hầm bên phải là 3 m.

Làm tròn các kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét.



Hình 7

Giải

Gọi chiều cao của đường hầm là b (m). Khi đó elip có bán trục lớn là $a = 10$ (m), bán trục bé là b (m). Elip có nửa tiêu cự là $c = a \cdot e = 10 \cdot 0{,}5 = 5$ (m).

a) Chiều cao của đường hầm là $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8,7$ (m).

b) Phương trình chính tắc của elip là $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{75} = 1$. Một điểm trên mặt đường cách chân hầm bên phải 3 m có hoành độ $x = 7$. Do đó độ cao của đường hầm tại điểm đó là $y > 0$ thoả mãn $\dfrac{7^2}{100} + \dfrac{y^2}{75} = 1$. Suy ra $y = \sqrt{75 \cdot \left(1 - \dfrac{7^2}{100}\right)} \approx 6{,}2$.

Vậy độ cao của đường hầm tại điểm trên mặt đường cách chân hầm bên phải 3 m là khoảng 6,2 m.

IV. BÁN KÍNH QUA TIÊU CỦA MỘT ĐIỂM THUỘC ELIP

5 Giả sử đường elip (E) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, ở đó $F_1F_2 = 2c$ với $0 < c < a$. Ta chọn hệ trục toạ độ Oxy có gốc là trung điểm của đoạn thẳng F_1F_2. Trục Oy là đường trung trực của F_1F_2 và F_2 nằm trên tia Ox (*Hình 8*). Khi đó, $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$ là các tiêu điểm của elip (E).

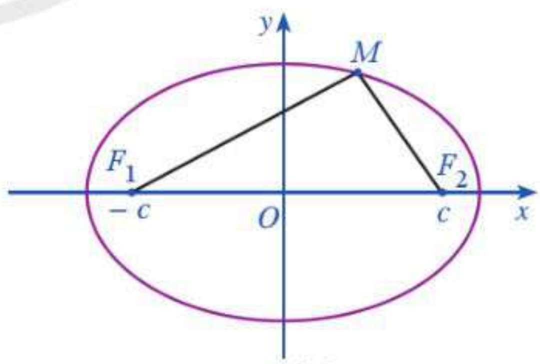
Giả sử điểm $M(x\,;y)$ thuộc elip (E).

Chứng minh rằng:

a) $MF_1^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$;

b) $MF_2^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$;

c) $MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$.



Hình 8

Để chứng minh các đẳng thức trên, ta làm như sau:

a) $MF_1^2 = [x - (-c)]^2 + (y-0)^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$.

b) $MF_2^2 = (x-c)^2 + (y-0)^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$.

c) $MF_1^2 - MF_2^2 = (x^2 + 2cx + c^2 + y^2) - (x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = 4cx$.

6 Sử dụng đẳng thức c) ở trên và đẳng thức $MF_1 + MF_2 = 2a$, chứng minh:

a) $MF_1 - MF_2 = \frac{2c}{a}x$; b) $MF_1 = a + \frac{c}{a}x$; c) $MF_2 = a - \frac{c}{a}x$.

Với mỗi điểm M thuộc đường elip, các đoạn thẳng MF_1, MF_2 được gọi là *bán kính qua tiêu* của điểm M.

Độ dài các bán kính qua tiêu là $MF_1 = a + ex$, $MF_2 = a - ex$.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng công thức tính độ dài bán kính qua tiêu để lập phương trình chính tắc của elip. Cụ thể, ta chứng minh được rằng: Nếu điểm $M(x\,;y) \in (E)$ thì $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1), ở đó $b = \sqrt{a^2 - c^2}$; ngược lại, nếu điểm M có toạ độ $(x\,;y)$ thoả mãn (1) thì $MF_1 = a + \frac{cx}{a}$, $MF_2 = a - \frac{cx}{a}$. Do đó $MF_1 + MF_2 = 2a$, tức là M thuộc elip (E).

Vậy phương trình (1) là phương trình chính tắc của elip đã cho.

Ví dụ 4 Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Giả sử M là điểm thuộc elip và có hoành độ là 2. Tìm độ dài các bán kính qua tiêu của điểm M.

Giải. Ta có: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$. Do đó $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8$. Vậy độ dài các bán kính qua tiêu của điểm M là:

$MF_1 = a + ex = 5 + 0{,}8 \,.\, 2 = 6{,}6$; $MF_2 = a - ex = 5 - 0{,}8 \,.\, 2 = 3{,}4$.

Ví dụ 5 Cho elip có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Giả sử $M(x\,;y)$ là điểm thuộc elip. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của bán kính qua tiêu MF_1 và MF_2.

Giải. Theo công thức về độ dài bán kính qua tiêu, ta có: $MF_1 = a + \frac{c}{a}x$.

Vì $-a \le x \le a$ nên $a + \frac{c}{a}.(-a) \le a + \frac{c}{a}x \le a + \frac{c}{a}.a \Leftrightarrow a - c \le MF_1 \le a + c$.

Vậy MF_1 có giá trị nhỏ nhất là $a - c$ khi $x = -a$ và có giá trị lớn nhất là $a + c$ khi $x = a$.

Bằng lập luận tương tự, ta thấy MF_2 có giá trị nhỏ nhất là $a - c$ khi $x = a$ và có giá trị lớn nhất là $a + c$ khi $x = -a$.

Ví dụ 6 Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một elip (E) mà Trái Đất là một tiêu điểm. (E) có độ dài trục lớn và độ dài trục bé lần lượt là (khoảng) 768 800 km và 767 619 km.

(*Nguồn: Ron Larson (2014), Precalculus: Real Mathematics, Real People, Cengage*).

Tính khoảng cách ngắn nhất và khoảng cách dài nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị ki-lô-mét).

Giải. Giả sử (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ trong đó:

$a = 768\,800 : 2 = 384\,400$ (km), $b = 767\,619 : 2 = 383\,809{,}5$ (km).

Ta có: $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{384\,400^2-383\,809{,}5^2}$

$=\sqrt{453\,627\,709{,}8}\approx 21\,298{,}54$ (km).

Khoảng cách ngắn nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng là:

$a-c\approx 384\,400-21\,298{,}54=363\,101{,}46$ (km).

Khoảng cách dài nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng là:

$a+c\approx 384\,400+21\,298{,}54=405\,698{,}54$ (km).

3 Cho elip (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ với tiêu điểm $F_2(\sqrt{5};0)$. Tìm toạ độ điểm $M\in(E)$ sao cho độ dài F_2M nhỏ nhất.

V. ĐƯỜNG CHUẨN CỦA ELIP

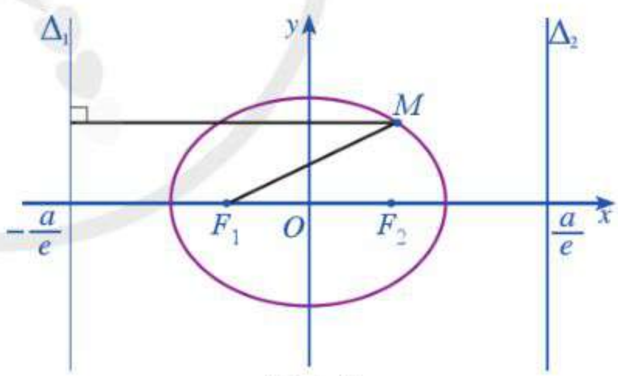
Tương tự như parabol, elip cũng có thể xác định thông qua tiêu điểm và đường thẳng đóng vai trò như đường chuẩn.

7 Cho elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

Xét đường thẳng $\Delta_1: x=-\frac{a}{e}$. Với mỗi điểm $M(x;y)\in(E)$ (*Hình 9*), tính:

a) Khoảng cách $d(M,\Delta_1)$ từ điểm $M(x;y)$ đến đường thẳng Δ_1.

b) Tỉ số $\frac{MF_1}{d(M,\Delta_1)}$.



Hình 9

Ta có thể thực hiện như sau:

a) Viết lại phương trình đường thẳng Δ_1 ở dạng: $x+0y+\frac{a}{e}=0$.

Với mỗi điểm $M(x;y)$ thuộc (E), ta có:

$$d(M,\Delta_1)=\frac{\left|x+0y+\frac{a}{e}\right|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\frac{|a+ex|}{e}.$$

b) Do $MF_1=a+ex>0$ nên $MF_1=|a+ex|$, suy ra $d(M,\Delta_1)=\frac{MF_1}{e}$. Vậy $\frac{MF_1}{d(M,\Delta_1)}=e$.

Nhận xét: Ta xét đường thẳng $\Delta_2: x=\frac{a}{e}$. Bằng cách lập luận tương tự trên, với mỗi điểm $M(x;y)\in(E)$, ta cũng có:

$$\frac{MF_2}{d(M,\Delta_2)}=e.$$

Đường thẳng $\Delta_1 : x = -\frac{a}{e}$ gọi là *đường chuẩn* ứng với tiêu điểm $F_1(-c ; 0)$.

Đường thẳng $\Delta_2 : x = \frac{a}{e}$ gọi là *đường chuẩn* ứng với tiêu điểm $F_2(c ; 0)$.

Chú ý: Tỉ số của khoảng cách từ một điểm M bất kì thuộc đường elip đến tiêu điểm và khoảng cách từ điểm đó đến đường chuẩn tương ứng luôn bằng tâm sai của elip:

$$\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M, \Delta_2)} = e.$$

Ví dụ 7 Tìm các tiêu điểm và đường chuẩn của elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Giải

Ta có: $a = 5$, $b = 4$, nên $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$.

Do đó, hai tiêu điểm là $F_1(-3 ; 0)$ và $F_2(3 ; 0)$.

Mặt khác, ta có: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0,6$.

Đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_1(-3 ; 0)$ là $\Delta_1: x = -\frac{25}{3}$.

Đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_2(3 ; 0)$ là $\Delta_2: x = \frac{25}{3}$.

4 Viết phương trình chính tắc của elip, biết tiêu điểm $F_2(5 ; 0)$ và đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó là $x = \frac{36}{5}$.

VI. LIÊN HỆ GIỮA ĐƯỜNG TRÒN VÀ ĐƯỜNG ELIP

8 Cho elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$.

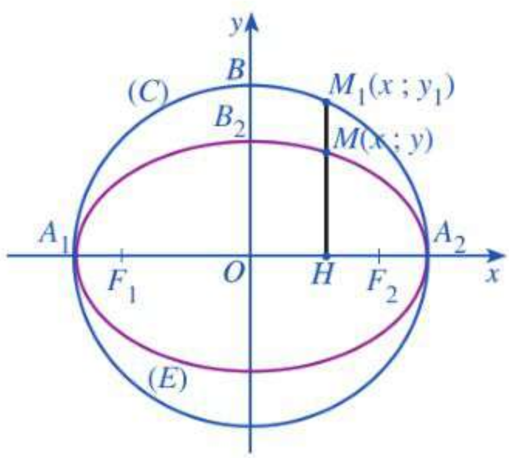
Xét đường tròn (C) tâm O bán kính a có phương trình là $x^2 + y^2 = a^2$.

Xét điểm $M(x ; y) \in (E)$ và điểm $M_1(x ; y_1) \in (C)$ sao cho y và y_1 luôn cùng dấu (khi M khác với hai đỉnh A_1, A_2 của (E)) (*Hình 10*).

a) Từ phương trình chính tắc của elip (E), hãy tính y^2 theo x^2.

Từ phương trình của đường tròn (C), hãy tính y_1^2 theo x^2.

b) Tính tỉ số $\frac{HM}{HM_1} = \frac{y}{y_1}$ theo a và b.



Hình 10

Để tính các đại lượng trên, ta làm như sau:

Ta có: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y^2=\dfrac{(a^2-x^2)b^2}{a^2}$;

$x^2+y_1^2=a^2 \Leftrightarrow y_1^2=a^2-x^2$.

Do đó $\dfrac{y^2}{y_1^2}=\dfrac{b^2}{a^2}$. Vậy $\dfrac{HM}{HM_1}=\dfrac{y}{y_1}=\dfrac{b}{a}$, tức là $y_1=\dfrac{a}{b}y$.

Nhận xét

• Mỗi điểm $M_1(x\,;y_1)$ trên đường tròn (C) qua "phép co" theo trục tung với hệ số $\dfrac{b}{a}$ thì biến thành điểm $M(x\,;y)$ trên elip (E).

• Mỗi điểm $M(x\,;y)$ trên elip (E) qua "phép giãn" theo trục tung với hệ số $\dfrac{a}{b}$ thì biến thành điểm $M_1(x\,;y_1)$ trên đường tròn (C).

VII. CÁCH VẼ ĐƯỜNG ELIP

9 Vẽ elip (E): $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

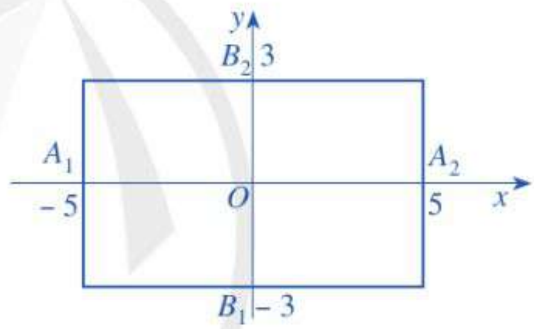
Để vẽ elip (E), ta có thể làm như sau:

Ta thấy $a=5$, $b=3$. (E) có các đỉnh là $A_1(-5\,;0)$, $A_2(5\,;0)$, $B_1(0\,;-3)$, $B_2(0\,;3)$.

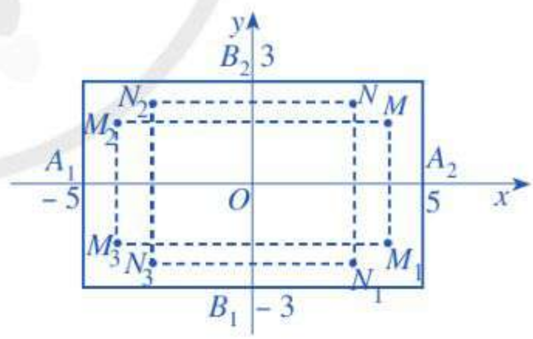
Bước 1. Vẽ hình chữ nhật cơ sở có bốn cạnh thuộc bốn đường thẳng $x=-5$, $x=5$, $y=-3$, $y=3$.

Bước 2. Tìm một số điểm cụ thể thuộc elip, chẳng hạn ta thấy điểm $M\left(4\,;\dfrac{9}{5}\right)$ và điểm $N\left(3\,;\dfrac{12}{5}\right)$ thuộc (E). Do đó các điểm $M_1\left(4\,;-\dfrac{9}{5}\right)$, $M_2\left(-4\,;\dfrac{9}{5}\right)$, $M_3\left(-4\,;-\dfrac{9}{5}\right)$, $N_1\left(3\,;-\dfrac{12}{5}\right)$, $N_2\left(-3\,;\dfrac{12}{5}\right)$, $N_3\left(-3\,;-\dfrac{12}{5}\right)$ thuộc (E).

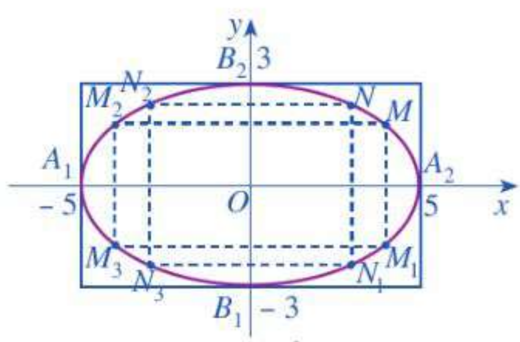
Bước 3. Vẽ đường elip (E) đi qua các điểm cụ thể trên, nằm ở phía trong hình chữ nhật cơ sở và tiếp xúc với các cạnh của hình chữ nhật cơ sở tại bốn đỉnh của (E) là $A_1(-5\,;0)$, $A_2(5\,;0)$, $B_1(0\,;-3)$, $B_2(0\,;3)$.



Bước 1



Bước 2



Bước 3

Nhận xét: Để vẽ elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, ta có thể làm như sau:

• Vẽ hình chữ nhật cơ sở có bốn cạnh thuộc bốn đường thẳng $x=-a$, $x=a$, $y=-b$, $y=b$.

• Xác định bốn đỉnh và một số điểm cụ thể thuộc elip.

• Vẽ đường elip ở phía trong hình chữ nhật cơ sở sao cho elip đó tiếp xúc với các cạnh của hình chữ nhật cơ sở tại bốn đỉnh của nó và đi qua những điểm cụ thể đã chọn.

BÀI TẬP

1. Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a) Độ dài trục lớn bằng 6 và tiêu điểm là $F_1(-2\,;0)$;

b) Tiêu cự bằng 12 và tâm sai bằng $\frac{3}{5}$;

c) Tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và chu vi hình chữ nhật cơ sở của (E) bằng 20.

2. Tìm tâm sai của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

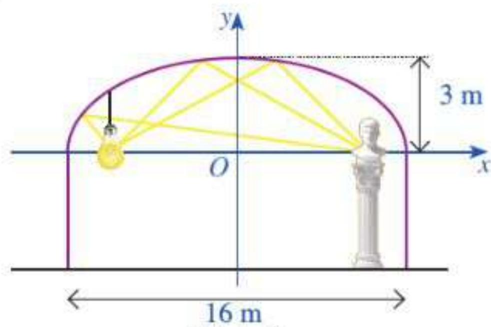
a) Độ dài bán trục lớn gấp hai lần độ dài bán trục bé;

b) Khoảng cách từ một đỉnh trên trục lớn đến một đỉnh trên trục bé bằng tiêu cự.

3. Trái Đất chuyển động quanh Mặt Trời theo một quỹ đạo là đường elip mà Mặt Trời là một tiêu điểm. Biết elip này có bán trục lớn $a \approx 149\ 598\ 261$ km và tâm sai $e \approx 0{,}017$. Tìm khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất giữa Trái Đất và Mặt Trời (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị ki-lô-mét).

4. Cho elip (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Tìm toạ độ điểm $M \in (E)$ sao cho độ dài F_2M lớn nhất, biết F_2 là một tiêu điểm có hoành độ dương của (E).

5. *Hình 11* minh hoạ mặt cắt đứng của một căn phòng trong bảo tàng với mái vòm trần nhà của căn phòng đó có dạng một nửa đường elip. Chiều rộng của căn phòng là 16 m, chiều cao của mái vòm là 3 m.



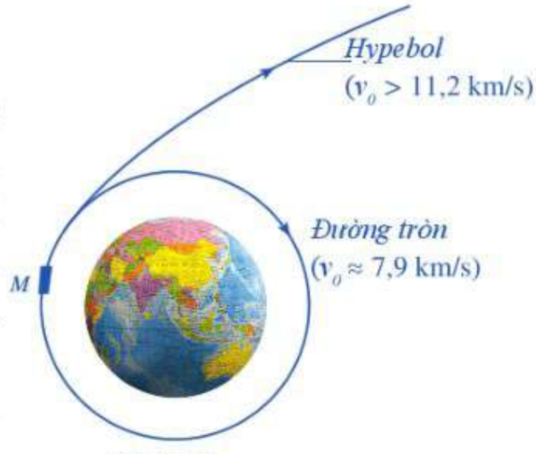
Hình 11

a) Viết phương trình chính tắc của elip biểu diễn mái vòm trần nhà trong hệ trục toạ độ Oxy (đơn vị trên hai trục là mét).

b) Một nguồn sáng được đặt tại tiêu điểm thứ nhất của elip. Cần đặt bức tượng ở vị trí có toạ độ nào để bức tượng sáng rõ nhất? Giả thiết rằng vòm trần phản xạ ánh sáng. Biết rằng, một tia sáng xuất phát từ một tiêu điểm của elip, sau khi phản xạ tại elip thì sẽ đi qua tiêu điểm còn lại.

§2 HYPEBOL

Quỹ đạo bay của một con tàu vũ trụ phóng đi từ Trái Đất phụ thuộc vào tốc độ của con tàu. Khi con tàu đạt tốc độ vũ trụ cấp 1, tức là tốc độ xấp xỉ 7,9 km/s, thì con tàu trở thành một vệ tinh của Trái Đất. Khi con tàu có tốc độ lớn hơn tốc độ vũ trụ cấp 2, tức là tốc độ con tàu lớn hơn 11,2 km/s, thì con tàu có quỹ đạo bay là một phần của hypebol (*Hình 12*). (*Nguồn: https://vi.wikipedia.org*)



Hình 12

Quỹ đạo bay dạng hypebol của con tàu có đặc điểm gì?

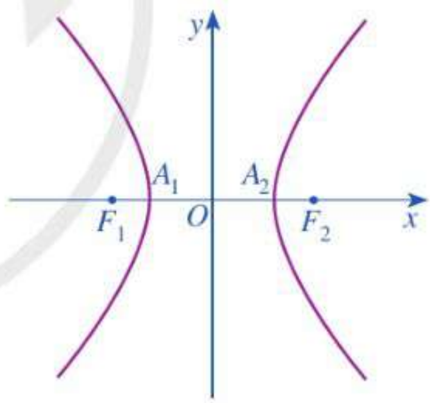
Ở sách giáo khoa Toán 10 chương VII, chúng ta đã học về ba đường conic, trong đó có đường hypebol. Trong bài học này, chúng ta sẽ tìm hiểu thêm những yếu tố đặc trưng của hypebol.

I. TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA HYPEBOL

1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta xét hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > 0$, $b > 0$ (*Hình 13*).

a) Tìm toạ độ hai tiêu điểm F_1, F_2 của hypebol (H).

b) Hypebol (H) cắt trục Ox tại các điểm A_1, A_2. Tìm độ dài các đoạn thẳng OA_1 và OA_2.

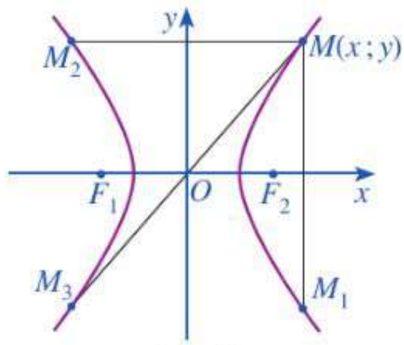


Hình 13

Chú ý: Độ dài $F_1F_2 = 2c$ được gọi là tiêu cự của hypebol (H).

Đoạn thẳng A_1A_2 gọi là trục thực; độ dài $A_1A_2 = 2a$ gọi là độ dài trục thực của hypebol (H).

2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta xét hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > 0$, $b > 0$ (*Hình 14*). Cho điểm $M(x\,;y)$ nằm trên hypebol (H). Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là điểm đối xứng của M qua trục Ox, trục Oy và gốc O. Các điểm M_1, M_2, M_3 có nằm trên hypebol (H) hay không? Tại sao?



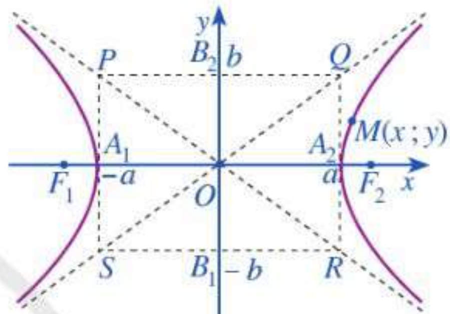
Hình 14

Nếu điểm $M(x\,;y)$ nằm trên hypebol (H) thì các điểm $M_1(x\,;-y)$, $M_2(-x\,;y)$, $M_3(-x\,;-y)$ cũng nằm trên hypebol (H).

Hypebol (H) nhận hai trục toạ độ làm hai trục đối xứng và gốc toạ độ O làm tâm đối xứng. Gốc O còn được gọi là tâm của hypebol (H).

II. HÌNH CHỮ NHẬT CƠ SỞ

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta xét hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>0$, $b>0$.



Hình 15

Hypebol (H) cắt trục Ox tại các điểm $A_1(-a\,;0)$, $A_2(a\,;0)$. Hai điểm này được gọi là hai đỉnh của hypebol. Trên trục Oy, ta lấy các điểm $B_1(0\,;-b)$, $B_2(0\,;b)$.

Vẽ qua A_1, A_2 hai đường thẳng song song với trục tung; vẽ qua B_1, B_2 hai đường thẳng song song với trục hoành. Bốn đường thẳng đó tạo thành hình chữ nhật $PQRS$. Ta gọi hình chữ nhật đó là hình chữ nhật cơ sở của hypebol (H) (*Hình 15*).

3

a) Quan sát điểm $M(x\,;y)$ nằm trên hypebol (H) (*Hình 15*) và chứng tỏ rằng $x\le -a$ hoặc $x\ge a$.

b) Viết phương trình hai đường thẳng PR và QS.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>0$, $b>0$. Khi đó, ta có:

- Hình chữ nhật cơ sở có bốn đỉnh là $P(-a\,;b)$, $Q(a\,;b)$, $R(a\,;-b)$, $S(-a\,;-b)$;
- Mọi điểm của hypebol nếu không phải là đỉnh đều nằm ngoài hình chữ nhật cơ sở của nó;
- Độ dài $B_1B_2=2b$ được gọi là độ dài trục ảo của hypebol (H);
- Hai đường thẳng PR và QS lần lượt có phương trình $y=-\frac{b}{a}x$, $y=\frac{b}{a}x$ và được gọi là hai đường tiệm cận của hypebol (H).

Ví dụ 1 Cho hypebol (*H*): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

a) Tìm toạ độ các đỉnh và độ dài các trục của hypebol.

b) Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của hypebol.

Giải

a) Ta có: $a^2 = 9$, suy ra $a = 3$; $b^2 = 16$, suy ra $b = 4$.

Hypebol có các đỉnh là $A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$; độ dài trục thực là $2 . 3 = 6$; độ dài trục ảo là $2 . 4 = 8$.

b) Toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của hypebol là $P(-3; 4)$, $Q(3; 4)$, $R(3; -4)$, $S(-3; -4)$.

Ví dụ 2 Cho hypebol (*H*) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$.

a) Viết phương trình hai đường tiệm cận của hypebol (*H*).

b) Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên hypebol (*H*) với $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Tính khoảng cách *MK* từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng có phương trình là $y = \frac{5}{4}x$. Nhận xét về độ lớn của *MK* khi điểm $M(x_0; y_0)$ di động trên hypebol (*H*) càng ngày càng xa gốc toạ độ, tức là khi x_0 càng ngày càng lớn.

Giải

a) Phương trình hai đường tiệm cận của hypebol (*H*) là $y = \pm\frac{5}{4}x$.

b) Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường tiệm cận $y = \frac{5}{4}x$ là:

$$MK = \frac{\left|y_0 - \frac{5}{4}x_0\right|}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{41}}\left|4y_0 - 5x_0\right| = \frac{\left|16{y_0}^2 - 25{x_0}^2\right|}{\sqrt{41} . \left|4y_0 + 5x_0\right|} = \frac{400}{\sqrt{41} . (4y_0 + 5x_0)}.$$

Vì vậy, khi điểm $M(x_0; y_0)$ di động trên hypebol (*H*) càng ngày càng xa gốc toạ độ thì khoảng cách *MK* càng ngày càng nhỏ, điều đó cũng có nghĩa là điểm *M* càng ngày càng gần sát đường tiệm cận đó (điều này giải thích ý nghĩa của từ "tiệm cận").

1 Viết phương trình chính tắc của hypebol có một đỉnh là $A_2(5; 0)$ và một đường tiệm cận là $y = -3x$.

III. TÂM SAI CỦA HYPEBOL

4 Nêu định nghĩa tâm sai của elip có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$.

Giống như elip, đối với hypebol có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > 0$, $b > 0$, ta nói:

Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục thực của hypebol là *tâm sai* của hypebol và được kí hiệu là e, tức là $e = \frac{c}{a}$.

Nhận xét: • $e = \frac{c}{a} > 1$.

• $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

Ví dụ 3 Tìm toạ độ tiêu điểm, tiêu cự và tâm sai của hypebol có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Giải

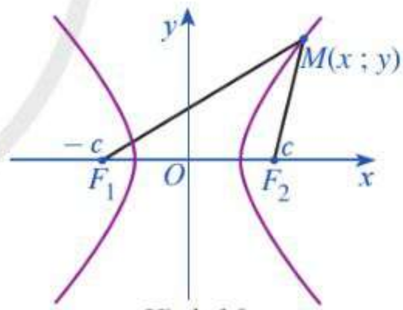
Ta có: $a = 5$, $b = 3$. Suy ra $c^2 = a^2 + b^2 = 34$, tức là $c = \sqrt{34}$.

Hypebol có hai tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{34} ; 0)$, $F_2(\sqrt{34} ; 0)$, tiêu cự là $2\sqrt{34}$ và tâm sai là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{34}}{5}$.

2 Viết phương trình chính tắc của hypebol, biết độ dài trục ảo bằng 6 và tâm sai bằng $\frac{5}{4}$.

IV. BÁN KÍNH QUA TIÊU CỦA MỘT ĐIỂM THUỘC HYPEBOL

5 Trong mặt phẳng, xét đường hypebol (H) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$, ở đó $F_1F_2 = 2c$ với $c > a > 0$. Ta chọn hệ trục toạ độ Oxy có gốc là trung điểm của đoạn thẳng F_1F_2. Trục Oy là đường trung trực của F_1F_2 và F_2 nằm trên tia Ox (*Hình 16*). Khi đó, $F_1(-c ; 0)$, $F_2(c ; 0)$ là các tiêu điểm của (H).



Hình 16

Với mỗi điểm $M(x ; y)$ thuộc đường hypebol (H), chứng minh:

a) $MF_1^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$;

b) $MF_2^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$;

c) $MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$.

6 Với mỗi điểm $M(x ; y)$ thuộc hypebol (H), từ hai đẳng thức $MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$ và $|MF_1 - MF_2| = 2a$, chứng minh:

$$MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right| = |a + ex|;\ MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right| = |a - ex|.$$

Với mỗi điểm M thuộc đường hypebol, các đoạn thẳng MF_1, MF_2 được gọi là *bán kính qua tiêu* của điểm M. Độ dài các bán kính qua tiêu là $MF_1 = |a + ex|$, $MF_2 = |a - ex|$.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng công thức tính độ dài bán kính qua tiêu để lập phương trình chính tắc của hypebol.

Cụ thể, ta có thể chứng minh được rằng:

Nếu điểm $M(x\,;y) \in (H)$ thì $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (1), ở đó $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Ngược lại, nếu điểm M có toạ độ $(x\,;y)$ thoả mãn (1) thì $MF_1 = \left|a + \dfrac{c}{a}x\right|$, $MF_2 = \left|a - \dfrac{c}{a}x\right|$,

do đó $|MF_1 - MF_2| = 2a$, tức là M thuộc hypebol (H).

Vậy phương trình (1) là phương trình chính tắc của hypebol đã cho.

Ví dụ 4 Cho hypebol có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Giả sử M là điểm thuộc hypebol có hoành độ là 12.
Tìm độ dài các bán kính qua tiêu của điểm M.

Giải

Ta có: $a = 3$, $b = 4$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ và $e = \dfrac{5}{3}$.

Các bán kính qua tiêu của điểm M là:

$$MF_1 = \left|3 + \frac{5}{3}.12\right| = 23; \quad MF_2 = \left|3 - \frac{5}{3}.12\right| = 17.$$

3 Cho hypebol có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$. Giả sử M là điểm thuộc hypebol có tung độ là $\sqrt{11}$. Tìm độ dài các bán kính qua tiêu của điểm M.

V. ĐƯỜNG CHUẨN CỦA HYPEBOL

Tương tự như elip, ta cũng có thể xác định được đường chuẩn của một hypebol.

7 Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > 0$, $b > 0$.
Xét đường thẳng $\Delta_1 : x = -\dfrac{a}{e}$.

Với mỗi điểm $M(x_0\,;y_0) \in (H)$ (*Hình 17*), tính:

a) Khoảng cách $d(M\,,\Delta_1)$ từ điểm $M(x_0\,;y_0)$ đến đường thẳng Δ_1;

b) Tỉ số $\dfrac{MF_1}{d(M\,,\Delta_1)}$.

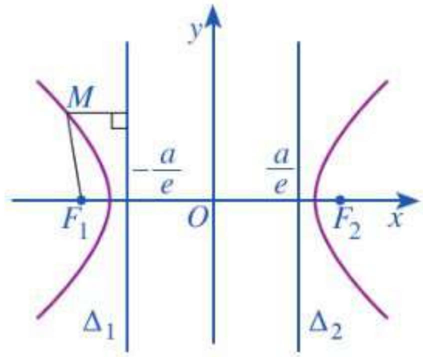
Để tính khoảng cách và tỉ số nói trên, ta làm như sau:

Ta viết lại phương trình đường thẳng Δ_1 ở dạng $\Delta_1 : x + 0 \,.\, y + \frac{a}{e} = 0$.

Với mỗi điểm $M\,(x_0\,;\,y_0)$ thuộc hypebol, ta có:

$$d(M\,,\,\Delta_1) = \frac{\left|x_0 + 0\,.\,y_0 + \frac{a}{e}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|a + ex_0|}{e} = \frac{MF_1}{e}.$$

Vậy $\dfrac{MF_1}{d(M\,,\,\Delta_1)} = e$.



Hình 17

Nhận xét: Ta xét đường thẳng $\Delta_2 : x = \frac{a}{e}$. Bằng cách lập luận tương tự như trên, với mỗi điểm $M(x_0\,;\,y_0) \in (H)$, ta có $\dfrac{MF_2}{d(M\,,\,\Delta_2)} = e$.

Đường thẳng $\Delta_1 : x = -\frac{a}{e}$ gọi là *đường chuẩn* ứng với tiêu điểm $F_1(-\,c\,;\,0)$.

Đường thẳng $\Delta_2 : x = \frac{a}{e}$ gọi là *đường chuẩn* ứng với tiêu điểm $F_2(c\,;\,0)$.

Chú ý: Tỉ số của khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc hypebol đến tiêu điểm và khoảng cách từ điểm đó đến đường chuẩn tương ứng luôn bằng tâm sai của hypebol.

$$\frac{MF_1}{d(M\,,\,\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M\,,\,\Delta_2)} = e.$$

Ví dụ 5 Tìm các tiêu điểm và đường chuẩn của hypebol có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$.

Giải

Ta có: $a = 12$, $b = 5$, suy ra $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$.

Do đó, hai tiêu điểm là $F_1(-\,13\,;\,0)$ và $F_2(13\,;\,0)$.

Mặt khác, ta có: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{13}{12}$. Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_1(-\,13\,;\,0)$ là $\Delta_1 : x = -\dfrac{144}{13}$.

Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_2(13\,;\,0)$ là $\Delta_2 : x = \dfrac{144}{13}$.

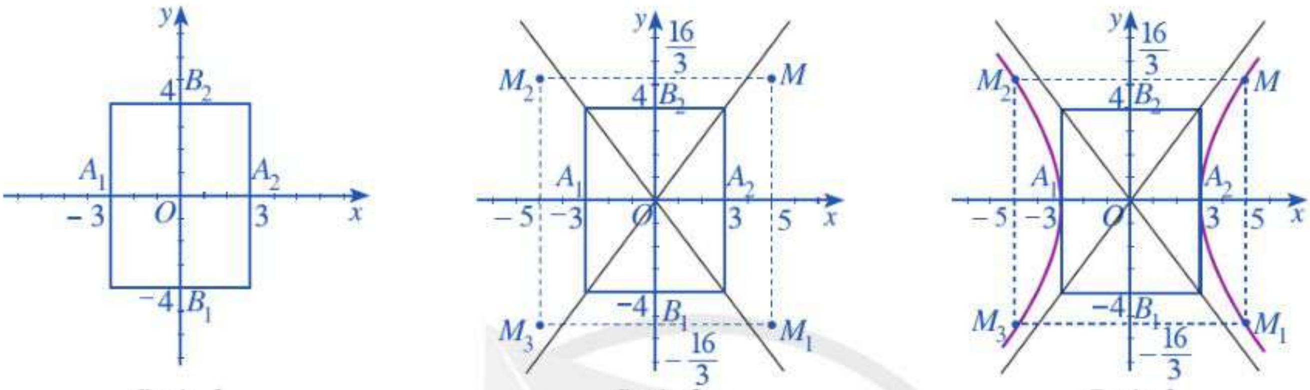
4 Viết phương trình chính tắc của đường hypebol biết một tiêu điểm là $F_2(\sqrt{2}\,;\,0)$ và đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó là $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

VI. CÁCH VẼ ĐƯỜNG HYPEBOL

8 Vẽ hypebol (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Để vẽ hypebol (H), ta có thể làm như sau:

Ta thấy $a = 3$, $b = 4$. (H) có các đỉnh là $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$.



Bước 1 *Bước 2* *Bước 3*

Bước 1. Vẽ hình chữ nhật cơ sở có bốn cạnh thuộc bốn đường thẳng $x = -3$, $x = 3$, $y = -4$, $y = 4$.

Bước 2. Vẽ hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở.

Tìm một số điểm cụ thể thuộc hypebol, chẳng hạn ta thấy điểm $M\left(5;\frac{16}{3}\right)$ thuộc (H). Do đó các điểm $M_1\left(5;-\frac{16}{3}\right)$, $M_2\left(-5;\frac{16}{3}\right)$, $M_3\left(-5;-\frac{16}{3}\right)$ thuộc (H).

Bước 3. Vẽ đường hypebol bên ngoài hình chữ nhật cơ sở; nhánh bên trái tiếp xúc với cạnh của hình chữ nhật cơ sở tại điểm $A_1(-3;0)$ và đi qua M_2, M_3; nhánh bên phải tiếp xúc với cạnh của hình chữ nhật cơ sở tại điểm $A_2(3;0)$ và đi qua M, M_1. Vẽ các điểm thuộc hypebol càng xa gốc toạ độ thì càng sát với đường tiệm cận. Hypebol nhận gốc toạ độ là tâm đối xứng và hai trục toạ độ là hai trục đối xứng.

Nhận xét: Để vẽ hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$, ta có thể làm như sau:

- Vẽ bốn đường thẳng $x = -a$, $x = a$, $y = -b$, $y = b$ và xác định hình chữ nhật cơ sở $PQRS$ của hypebol.
- Vẽ hai đường tiệm cận PR, QS của hypebol.
- Vẽ từng nhánh của hypebol ở phía ngoài hình chữ nhật cơ sở sao cho tiếp xúc với cạnh của hình chữ nhật cơ sở tại đỉnh của hypebol và đi qua những điểm cụ thể đã chọn, đồng thời nhận PR, QS làm hai đường tiệm cận.

5 Cho hypebol (H) có một đỉnh là $A_1(-4;0)$ và tiêu cự là 10. Viết phương trình chính tắc và vẽ hypebol (H).

BÀI TẬP

1. Viết phương trình chính tắc của hypebol, biết:

a) Tiêu điểm là $F_1(-3\ ;\ 0)$ và đỉnh là $A_2(2\ ;\ 0)$.

b) Đỉnh là $A_2(4\ ;\ 0)$ và tiêu cự bằng 10.

c) Tiêu điểm $F_2(4\ ;\ 0)$ và phương trình một đường tiệm cận là $y = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}x$.

2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hypebol có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{1} = 1$.

a) Xác định toạ độ các đỉnh, tiêu điểm, tiêu cự, độ dài trục thực của hypebol.

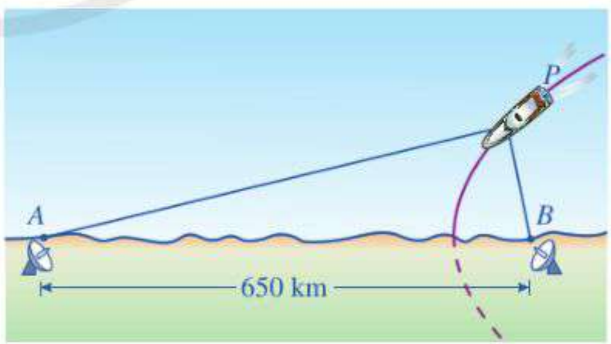
b) Xác định phương trình các đường tiệm cận của hypebol và vẽ hypebol trên.

3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hypebol có phương trình chính tắc là $x^2 - y^2 = 4$. Chứng minh rằng hai đường tiệm cận của hypebol vuông góc với nhau.

4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hypebol $(H): \dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$. Lập phương trình chính tắc của elip (E), biết rằng (E) có các tiêu điểm là các tiêu điểm của (H) và các đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của (H) đều nằm trên (E).

5. Dọc theo bờ biển, người ta thiết lập hệ thống định vị vô tuyến dẫn đường tầm xa để truyền tín hiệu cho máy bay hoặc tàu thuỷ hoạt động trên biển. Trong hệ thống đó có hai đài vô tuyến đặt lần lượt tại địa điểm A và địa điểm B, khoảng cách $AB = 650$ km. Giả sử có một con tàu chuyển động trên biển với quỹ đạo nằm trên một nhánh hypebol nhận A và B là hai tiêu điểm như *Hình 18*.

Khi đang ở vị trí P, máy thu tín hiệu trên con tàu chuyển đổi chênh lệch thời gian nhận các tín hiệu từ A và B thành hiệu khoảng cách $|PA - PB|$. Giả sử thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A là 0,0012 s. Vận tốc di chuyển của tín hiệu là $3 \cdot 10^8$ m/s.



Hình 18

a) Lập phương trình hypebol mô tả quỹ đạo chuyển động của con tàu.

b) Chứng tỏ rằng tại mọi thời điểm trên quỹ đạo chuyển động thì thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A luôn là 0,0012 s.

§3 PARABOL

Các đĩa vệ tinh thường được làm ở dạng paraboloid, tức là hình dạng được tạo ra bằng cách quay parabol xung quanh trục của nó để sử dụng tính chất phản xạ của parabol. Tính chất đó là: Tín hiệu đi trực tiếp đến đĩa vệ tinh theo những tia song song với trục đối xứng của parabol, sau khi phản xạ tại parabol, sẽ đi qua tiêu điểm của parabol. Người ta đặt máy thu tín hiệu tại tiêu điểm của parabol và dẫn tín hiệu thu được từ máy thu về trung tâm giải mã.

Hình ảnh đài quan sát thiên văn vô tuyến

(Nguồn: https://pixabay.com)

Làm thế nào để thiết kế được đĩa vệ tinh sao cho tín hiệu thu được là tốt nhất?

Ở sách giáo khoa Toán 10 chương VII, chúng ta đã học về ba đường conic, trong đó có đường parabol. Trong bài học này, chúng ta sẽ tìm hiểu thêm những yếu tố đặc trưng của parabol.

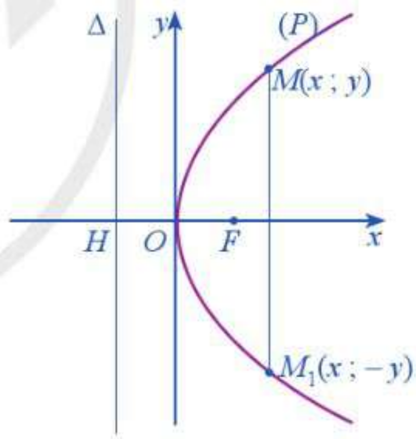
I. TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA PARABOL

1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta xét parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ (*Hình 19*).

a) Tìm toạ độ tiêu điểm F của parabol (P).

b) Tìm toạ độ điểm H và viết phương trình đường chuẩn Δ của parabol (P).

c) Cho điểm $M(x\,;\,y)$ nằm trên parabol (P). Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua trục Ox. Điểm M_1 có nằm trên parabol (P) hay không? Tại sao?



Hình 19

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình chính tắc là $y^2 = 2px$ $(p > 0)$. Khi đó, ta có:

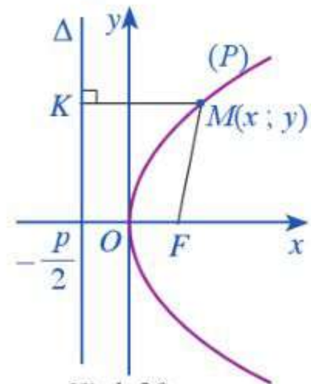
- Parabol (P) nằm về bên phải của trục tung;
- Trục Ox là trục đối xứng của parabol (P);
- Parabol (P) cắt trục Ox tại điểm O và đó cũng là điểm duy nhất của trục Oy thuộc (P). Gốc toạ độ O được gọi là đỉnh của parabol (P);
- Khoảng cách $FH = p$ được gọi là *tham số tiêu* của parabol (P).

II. TÂM SAI CỦA PARABOL. BÁN KÍNH QUA TIÊU CỦA MỘT ĐIỂM

2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta xét parabol (P) có phương trình chính tắc là $y^2 = 2px\ (p > 0)$ và điểm $M(x\,;y)$ nằm trên parabol (P) (*Hình 20*).

a) So sánh khoảng cách MF từ điểm M đến tiêu điểm F và khoảng cách MK từ điểm M đến đường chuẩn Δ.

b) Tính độ dài đoạn thẳng MK. Từ đó, tính độ dài đoạn thẳng MF.



Hình 20

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình chính tắc là $y^2 = 2px\ (p > 0)$. Khi đó:

- Với parabol (P), ta luôn có $e = 1$, ở đó e là tâm sai của parabol (tức là tỉ số của khoảng cách từ điểm M thuộc parabol (P) đến tiêu điểm F và khoảng cách từ điểm M đến đường chuẩn Δ);
- Với mỗi điểm M thuộc parabol (P), đoạn thẳng MF được gọi là *bán kính qua tiêu* của điểm M. Ta có độ dài đoạn thẳng $MF = \left|x + \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2}$.

Ví dụ Cho parabol $y^2 = 6x$.

a) Tìm toạ độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của parabol.

b) Giả sử M là điểm thuộc parabol có hoành độ là 4. Tính bán kính qua tiêu của điểm M.

Giải

a) Ta có: $2p = 6$, suy ra $p = 3$.

Tiêu điểm của parabol là $F\left(\frac{3}{2}\,; 0\right)$.

Đường chuẩn của parabol có phương trình là $x = -\frac{3}{2}$.

b) Bán kính qua tiêu của điểm M là $MF = 4 + \frac{3}{2} = 5,5$.

1 a) Lập phương trình chính tắc của parabol (P), biết phương trình đường chuẩn là $x = -2$.

b) Tìm toạ độ tiêu điểm của parabol (P).

c) Tìm toạ độ điểm M thuộc parabol (P), biết khoảng cách từ M đến tiêu điểm bằng 6.

III. CÁCH VẼ ĐƯỜNG PARABOL

3 Vẽ parabol (P): $y^2 = 4x$.

Để vẽ parabol $y^2 = 4x$, ta có thể làm như sau:

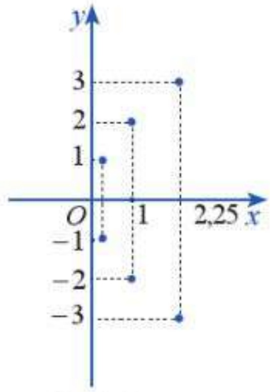
Bước 1. Lập bảng giá trị

x	0	0,25	0,25	1	1	2,25	2,25
y	0	-1	1	2	-2	-3	3

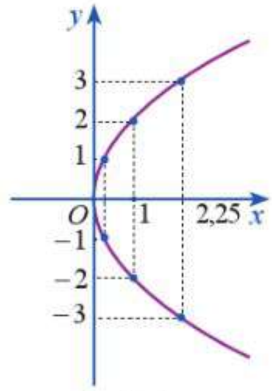
Chú ý rằng ứng với mỗi giá trị dương của x có hai giá trị của y đối nhau.

Bước 2. Vẽ các điểm cụ thể mà hoành độ và tung độ được xác định như trong bảng giá trị.

Bước 3. Vẽ parabol bên phải trục Oy, đỉnh O, trục đối xứng là Ox, parabol đi qua các điểm được vẽ ở *Bước 2*.



Bước 2



Bước 3

Nhận xét: Để vẽ parabol $y^2 = 2px$ $(p > 0)$, ta có thể làm như sau:

• Xác định đỉnh và một số điểm cụ thể.

• Vẽ parabol đi qua những điểm cụ thể đã chọn, tiếp xúc với trục tung tại đỉnh $O(0 ; 0)$ và nhận trục hoành làm trục đối xứng.

2 Vẽ parabol $y^2 = 2px$, biết tiêu điểm của parabol là $F\left(\frac{1}{4} ; 0\right)$.

BÀI TẬP

1. Viết phương trình chính tắc của parabol trong mỗi trường hợp sau:

a) Tiêu điểm là $F_2(5 ; 0)$;

b) Phương trình đường chuẩn là $x = -4$;

c) Parabol đi qua điểm $A(4 ; 9)$.

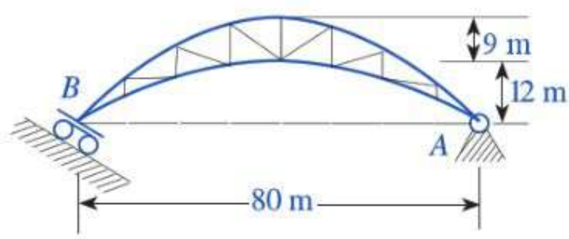
2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol có phương trình chính tắc $y^2 = 8x$.

a) Xác định toạ độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của parabol.

b) Vẽ parabol.

3. Các vật liệu xây dựng đều có hệ số dãn nở. Vì thế, khi đặt dầm cầu, người ta thường đặt cố định một đầu dầm, đầu còn lại đặt trên một con lăn có thể di động được nhằm giải quyết sự dãn nở của vật liệu. *Hình 21* minh hoạ một dầm cầu được đặt ở hai bờ kênh, giới hạn bởi hai cung parabol có cùng trục đối xứng. Người ta thiết kế các thanh giằng nối hai cung parabol đó sao cho các thanh giằng theo phương thẳng đứng cách đều nhau và cách đều hai đầu dầm.

Tính tổng độ dài của các thanh giằng theo phương thẳng đứng.

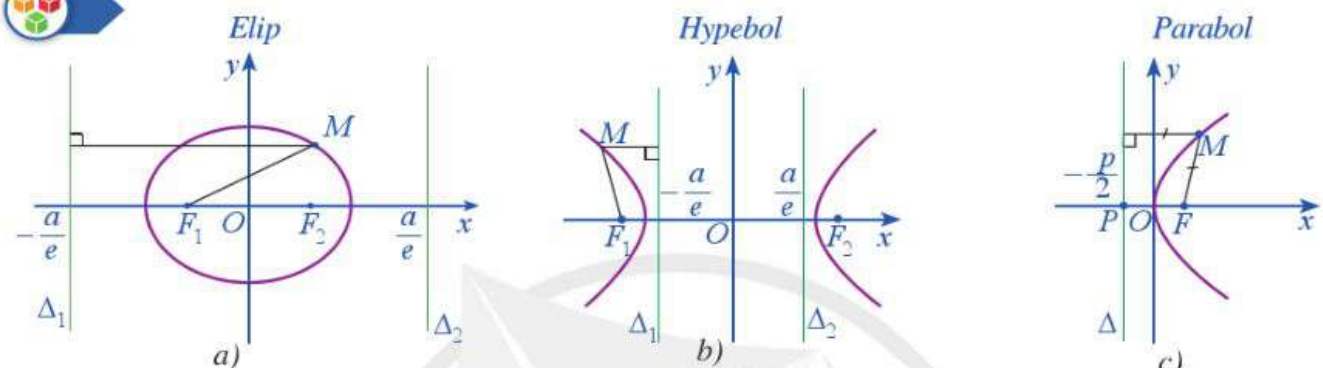


Hình 21

§4 BA ĐƯỜNG CONIC

Ở các bài trước, chúng ta đã học về elip, hypebol và parabol. Trong bài học này, chúng ta sẽ tìm hiểu những tính chất chung của cả ba đường conic đó và những ứng dụng của chúng trong thực tiễn.

I. MÔ TẢ BA ĐƯỜNG CONIC DỰA TRÊN TIÊU ĐIỂM VÀ ĐƯỜNG CHUẨN



Hình 22

Quan sát *Hình 22a, Hình 22b, Hình 22c*, nêu tỉ số khoảng cách từ một điểm M nằm trên mỗi đường conic đến tiêu điểm của nó và khoảng cách từ điểm M đến đường chuẩn tương ứng với tiêu điểm đó.

Nhận xét

- Với mọi điểm M thuộc elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, ta luôn có $\frac{MF}{d(M,\Delta)}=e$ $(0<e<1)$, trong đó F là một trong hai tiêu điểm F_1, F_2 và Δ là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F.
- Với mọi điểm M thuộc hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$, ta luôn có $\frac{MF}{d(M,\Delta)}=e$ $(e>1)$, trong đó F là một trong hai tiêu điểm F_1, F_2 và Δ là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F.
- Với mọi điểm M thuộc parabol (P): $y^2=2px$ $(p>0)$, ta luôn có $\frac{MF}{d(M,\Delta)}=1$, trong đó F là tiêu điểm và Δ là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F.

Để mô tả chung ba đường conic (elip, hypebol, parabol) dựa trên tiêu điểm và đường chuẩn, ta đưa vào định nghĩa sau:

> Trong mặt phẳng cho điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số $\frac{MF}{d(M,\Delta)}$ bằng một số dương e cho trước được gọi là đường conic.
>
> Điểm F gọi là tiêu điểm, đường thẳng Δ gọi là đường chuẩn tương ứng với F và e gọi là tâm sai của đường conic.

Ta có thể chứng minh được rằng:

- Nếu tâm sai $e < 1$ thì đường conic nhận được là đường elip.
- Nếu tâm sai $e = 1$ thì đường conic nhận được là đường parabol.
- Nếu tâm sai $e > 1$ thì đường conic nhận được là đường hypebol.

Ví dụ 1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : x = 4$ và điểm $F(3 ; 0)$. Lấy ba điểm $A(2 ; 0)$, $B(1 ; 4)$, $C(-1 ; 3)$.

a) Tính các tỉ số sau: $\dfrac{AF}{d(A , \Delta)}, \dfrac{BF}{d(B , \Delta)}, \dfrac{CF}{d(C , \Delta)}$.

b) Hỏi mỗi điểm A, B, C lần lượt nằm trên loại đường conic nào nhận F là tiêu điểm và Δ là đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó?

Giải

a) Ta có:

$AF = \sqrt{(3-2)^2 + (0-0)^2} = 1$, $d(A , \Delta) = |2 - 4| = 2$, suy ra $\dfrac{AF}{d(A , \Delta)} = \dfrac{1}{2}$.

$BF = \sqrt{(3-1)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{5}$, $d(B , \Delta) = |1 - 4| = 3$, suy ra $\dfrac{BF}{d(B , \Delta)} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

$CF = \sqrt{(3+1)^2 + (0-3)^2} = 5$, $d(C , \Delta) = |-1 - 4| = 5$, suy ra $\dfrac{CF}{d(C , \Delta)} = \dfrac{5}{5} = 1$.

b) Vì $\dfrac{AF}{d(A , \Delta)} = \dfrac{1}{2} < 1$ nên điểm A nằm trên elip.

Do $\dfrac{BF}{d(B , \Delta)} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3} > 1$ nên điểm B nằm trên hypebol.

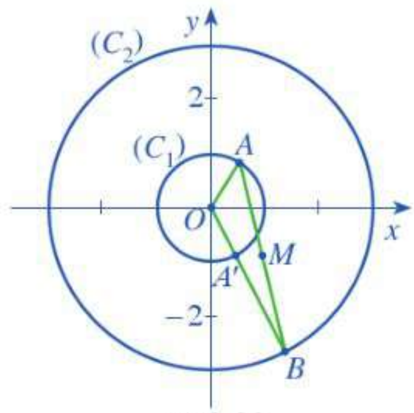
Vì $\dfrac{CF}{d(C , \Delta)} = 1$ nên điểm C nằm trên parabol.

Ví dụ 2 Cho tia Ox và hai đường tròn (C_1), (C_2) đồng tâm O lần lượt có bán kính là 1 cm, 3 cm. Hai điểm A và B lần lượt di động trên (C_1), (C_2) thoả mãn tia Ox là tia phân giác của góc AOB.

a) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Ox. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{OB}$ theo vectơ $\overrightarrow{OA'}$.

b) Chọn hệ trục toạ độ Oxy có trục hoành chứa tia Ox đã cho (*Hình 23*). Giả sử $A(x_0 ; y_0)$. Xác định toạ độ của A', B, M theo x_0; y_0 với M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

c) Tính $x_0^2 + y_0^2$. Chứng minh rằng tập hợp trung điểm M của đoạn AB là một elip.



Hình 23

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OA'}$.

b) Vì A và A' đối xứng nhau qua Ox nên $A'(x_0\,;-y_0) \Rightarrow B(3x_0\,;-3y_0)$

$$\Rightarrow x_M = \frac{x_0+3x_0}{2} = 2x_0,\ y_M = \frac{y_0-3y_0}{2} = -\,y_0 \Rightarrow M(2x_0\,;-y_0).$$

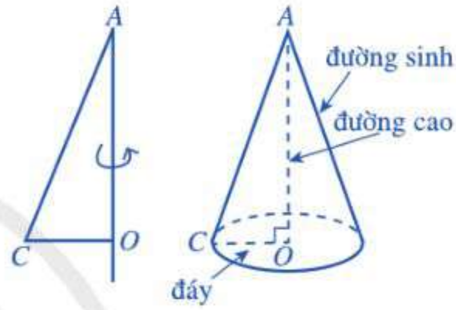
c) $x_0^2 + y_0^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{x_M^2}{2^2} + \dfrac{y_M^2}{1^2} = 1$. Vậy tập hợp các điểm M là một elip.

II. MÔ TẢ BA ĐƯỜNG CONIC DỰA TRÊN GIAO CỦA MẶT PHẲNG VỚI MẶT NÓN

1. Khái niệm mặt nón tròn xoay

Ở lớp 9, ta đã làm quen với hình nón.

Cho tam giác OAC vuông tại O. Khi quay tam giác OAC một vòng xung quanh cạnh OA cố định, ta được một hình nón (*Hình 24*).

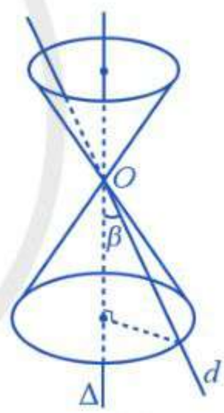


Hình 24

Tương tự khái niệm hình nón, ta có khái niệm mặt nón.

Trong mặt phẳng (P), cho hai đường thẳng d và Δ cắt nhau tại O và góc giữa hai đường thẳng là $\beta\left(0° < \beta < 90°\right)$. Khi quay mặt phẳng ($P$) xung quanh đường thẳng Δ thì đường thẳng d sinh ra một mặt tròn xoay gọi là mặt nón đỉnh O (*Hình 25*).

Các đường thẳng Δ , d lần lượt gọi là trục, đường sinh của mặt nón.



Hình 25

2. Giao của mặt phẳng với mặt nón

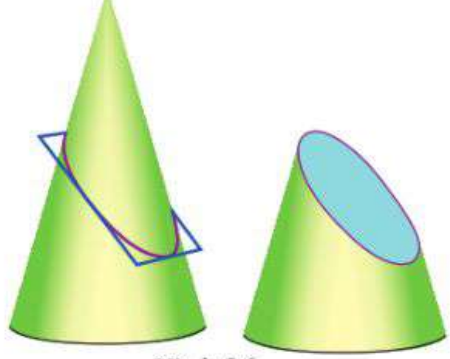
Chúng ta đã biết rằng:

– Giao của mặt nón với mặt phẳng (không đi qua đỉnh và vuông góc với trục của mặt nón) là đường tròn.

– Giao của mặt nón với mặt phẳng (không đi qua đỉnh và không vuông góc với trục của mặt nón) là đường conic (*Hình 26*). Từ "conic" xuất phát từ gốc tiếng Hy Lạp *konos*, nghĩa là mặt nón.

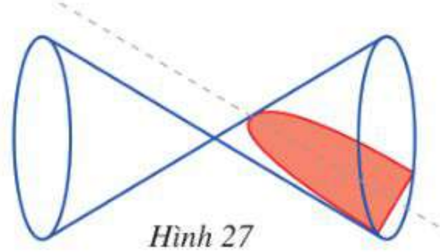
a. Elip

Xét mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón, không vuông góc với trục của mặt nón và không song song với đường sinh nào của mặt nón. Khi đó, giao của mặt phẳng và mặt nón là đường elip (*Hình 26*).


Hình 26

b. Parabol

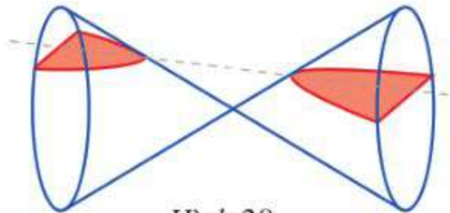
Xét mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón và song song với duy nhất một đường sinh của mặt nón. Khi đó, giao của mặt phẳng và mặt nón là đường parabol (*Hình 27*).



Hình 27

c. Hypebol

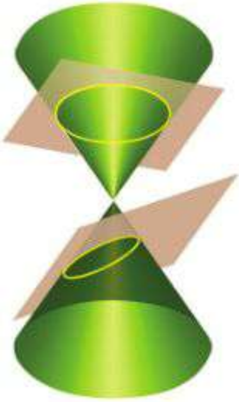
Xét mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón và song song với hai đường sinh của mặt nón. Khi đó, giao của mặt phẳng và mặt nón là đường hypebol (*Hình 28*).



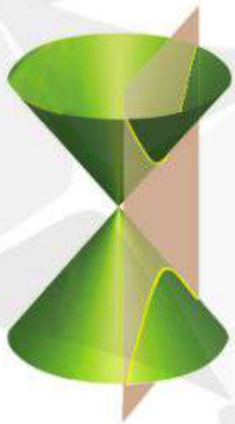
Hình 28

Ví dụ 3 Quan sát các hình sau và cho biết:

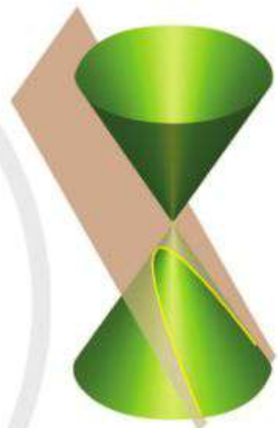
Giao của mặt phẳng với mặt nón ở hình nào cho hình ảnh đường tròn, elip, hypebol, parabol.



Hình 29



Hình 30



Hình 31

Giải

Hình 29 (nửa phía trên) cho hình ảnh đường tròn.

Hình 29 (nửa phía dưới) cho hình ảnh elip.

Hình 30 cho hình ảnh hypebol.

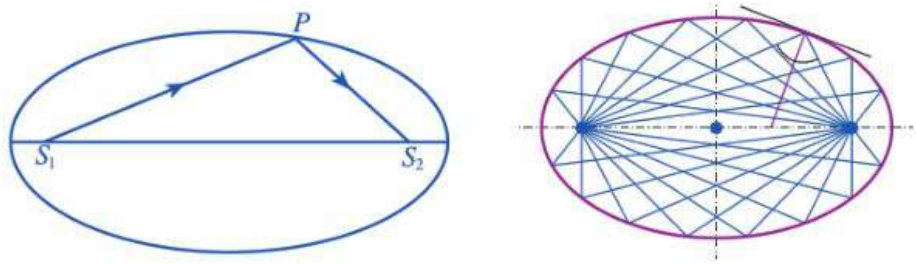
Hình 31 cho hình ảnh parabol.

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA BA ĐƯỜNG CONIC TRONG THỰC TIỄN

1. Ứng dụng trong quang học của các đường conic

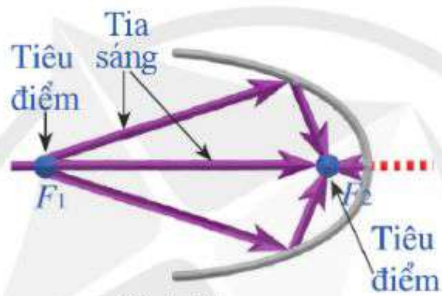
a. Ứng dụng quang học của elip

Như chúng ta đã biết elip có tính chất sau: Một tia xuất phát từ một tiêu điểm của elip, sau khi phản xạ tại elip, thì sẽ đi qua tiêu điểm còn lại của elip (*Hình 32*).



Hình 32

Elip có nhiều ứng dụng trong quang học dựa trên tính chất đó. Chẳng hạn, trong chế tạo gương có dạng hình elip. Gương elip được làm từ một dải kim loại sáng bóng, các tia sáng xuất phát từ tiêu điểm này đều hội tụ đến tiêu điểm kia (*Hình 33*). Một vật đặt tại F_2 sẽ được rọi sáng nhờ nguồn sáng đặt tại F_1 cho dù F_1 và F_2 ở khá xa nhau.

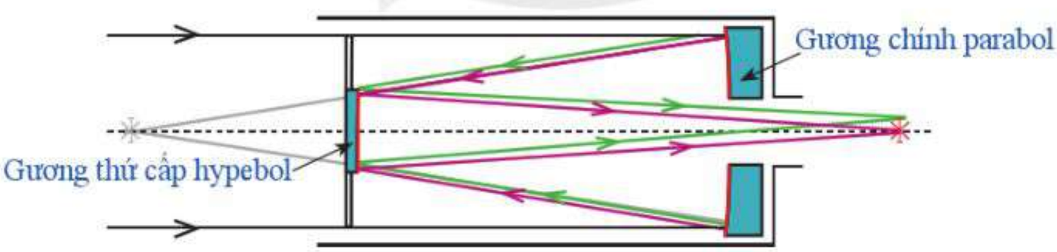


Hình 33

b. Ứng dụng quang học của hypebol

Kính thiên văn Cassegrain (đôi khi được gọi là "Cassegrain cổ điển") được Laurent Cassegrain công bố vào năm 1672. Nó có một gương chính hình parabol và một gương thứ cấp hình hypebol phản xạ ánh sáng trở lại qua một lỗ trên gương chính.

Đường dẫn ánh sáng trong kính thiên văn Cassegrain được mô tả như sau (*Hình 34*):

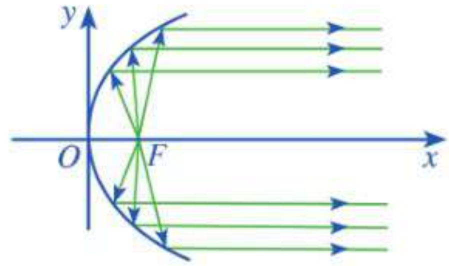


Hình 34

Kính thiên văn Ritchey – Chrétien được phát minh bởi George Willis Ritchey và Henri Chrétien vào đầu những năm 1910, là một gương phản xạ Cassegrain chuyên dụng có hai gương hypebol (thay vì một gương chính hình parabol).

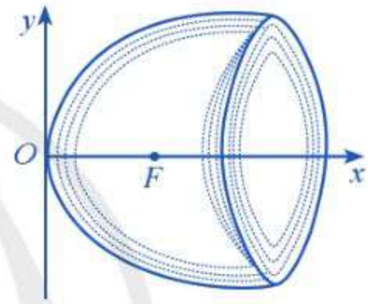
c. Ứng dụng quang học và âm học của parabol

Parabol có một tính chất quan trọng như sau: Nếu đặt một nguồn sáng tại tiêu điểm F của nó thì toàn bộ các tia sáng đi ra từ F, sau khi phản xạ tại parabol, sẽ truyền đi theo đường thẳng song song với trục đối xứng của nó. Tính chất này được gọi là tính phản xạ của parabol (*Hình 35*).



Parabol
Hình 35

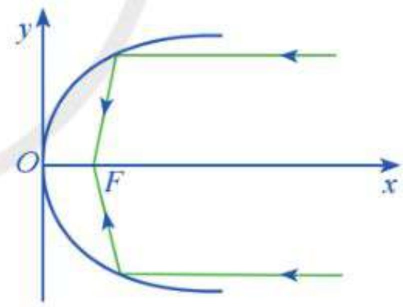
Parabol có nhiều ứng dụng trong quang học dựa trên tính chất đó. Chẳng hạn, các gương lắp phía sau đèn trước xe hơi được chế tạo ở dạng paraboloid, tức là hình dạng được tạo ra bằng cách quay parabol xung quanh trục của nó. Gương parabol giúp người lái xe nhìn thấy xa hơn về phía trước (*Hình 36*).



Paraboloid
Hình 36

Ngược lại với tính chất trên, parabol cũng có một tính chất sau: Một tia song song với trục đối xứng của parabol, sau khi phản xạ tại parabol, sẽ đi qua tiêu điểm của parabol (*Hình 37*).

Cũng có nhiều ứng dụng của parabol trong quang học dựa trên tính chất đó. Chẳng hạn, gương parabol có thể hội tụ một chùm sáng song song vào một nguồn điểm. Gương parabol khổng lồ dùng trong kính thiên văn thu thập ánh sáng từ những nơi xa xôi của vũ trụ, nơi còn có những nguồn phát ánh sáng vào trong không gian dưới dạng đèn pha.



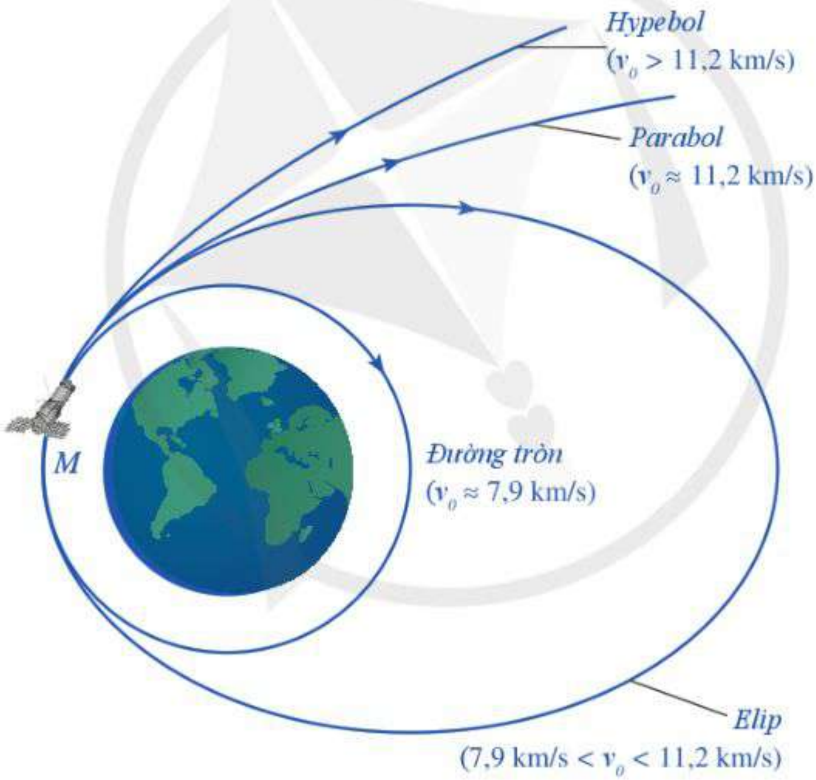
Hình 37

Vì sóng âm thanh có cơ chế hoạt động tương tự như ánh sáng nên tính chất âm thanh hội tụ tại tiêu điểm được gọi là tính chất âm học của parabol. Đây là nguyên do ở trong một số phòng trưng bày nghệ thuật, những tiếng thì thầm của ai đó lại được nghe rõ khi bạn đứng ở một chỗ nhất định, còn ở những chỗ khác thì không nghe được. Chỗ nhất định đó thật ra là tiêu điểm của cấu trúc parabol. Gương parabol khổng lồ dùng trong kính thiên văn thu thập tín hiệu từ những nơi xa xôi của vũ trụ, nơi còn có những nguồn phát tín hiệu vào trong không gian dưới dạng sóng âm.

2. Mô tả quỹ đạo của tàu vũ trụ

Khi thiết lập quỹ đạo bay cho các con tàu vũ trụ phóng đi từ Trái Đất, các nhà khoa học luôn chọn quỹ đạo là đường conic. Hình dạng của quỹ đạo phụ thuộc vào tốc độ của tàu vũ trụ (*Hình 38*). Ta có bảng tương ứng giữa tốc độ và quỹ đạo như sau:

Tốc độ v_0 của tàu vũ trụ	**Hình dạng quỹ đạo của tàu vũ trụ**
7,9 km/s	Đường tròn
7,9 km/s < v_0 < 11,2 km/s	Elip
11,2 km/s	Một phần của parabol
v_0 > 11,2 km/s	Một phần của hypebol



Hình 38

BÀI TẬP

1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với bốn đỉnh $A(-4\,;3)$, $B(4\,;3)$, $C(4\,;-3)$, $D(-4\,;-3)$.

a) Viết phương trình chính tắc của elip nhận $ABCD$ là hình chữ nhật cơ sở. Vẽ elip đó.

b) Viết phương trình chính tắc của hypebol nhận $ABCD$ là hình chữ nhật cơ sở. Vẽ hypebol đó.

2. Các đường conic có phương trình như sau là đường elip hay hypebol? Tìm độ dài các trục, toạ độ tiêu điểm, tiêu cự, tâm sai của các đường conic đó.

a) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$; b) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$.

3. Cho parabol có phương trình chính tắc $y^2 = 2x$. Tìm tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của parabol và vẽ parabol đó.

4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : x = -5$ và điểm $F(-4 ; 0)$. Cho ba điểm $A(-3 ; 1)$, $B(2 ; 8)$, $C(0 ; 3)$.

a) Tính các tỉ số sau: $\dfrac{AF}{d(A , \Delta)}$, $\dfrac{BF}{d(B , \Delta)}$, $\dfrac{CF}{d(C , \Delta)}$.

b) Hỏi mỗi điểm A, B, C lần lượt nằm trên loại đường conic nào nhận F là tiêu điểm và Δ là đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó?

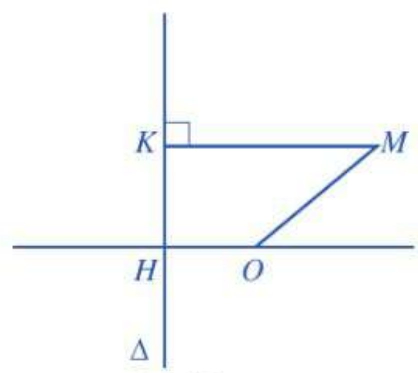
5. Vệ tinh nhân tạo đầu tiên được Liên Xô (cũ) phóng từ Trái Đất năm 1957. Quỹ đạo của vệ tinh đó là một đường elip nhận tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Người ta đo được vệ tinh cách bề mặt Trái Đất gần nhất là 583 dặm và xa nhất là 1 342 dặm (1 dặm xấp xỉ 1,609 km). Tìm tâm sai của quỹ đạo đó, biết bán kính của Trái Đất xấp xỉ 4 000 dặm.

(Nguồn: Sách giáo khoa Hình học 10, Ban Nâng cao, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2018)

6. Sao Diêm Vương chuyển động xung quanh Mặt Trời theo quỹ đạo là một đường elip có một trong hai tiêu điểm là tâm của Mặt Trời. Biết elip này có bán trục lớn $a \approx 5,906 . 10^6$ km và tâm sai $e \approx 0,249$. (*Nguồn: https://vi.wikipedia.org*)

Tìm khoảng cách nhỏ nhất (gần đúng) giữa Sao Diêm Vương và Mặt Trời.

7. Cho đường thẳng Δ và điểm O sao cho khoảng cách từ O đến Δ là $OH = 1$ (*Hình 39*). Với mỗi điểm M di động trong mặt phẳng, gọi K là hình chiếu vuông góc của M lên Δ. Chứng minh tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MK^2 - MO^2 = 1$ là một đường parabol.



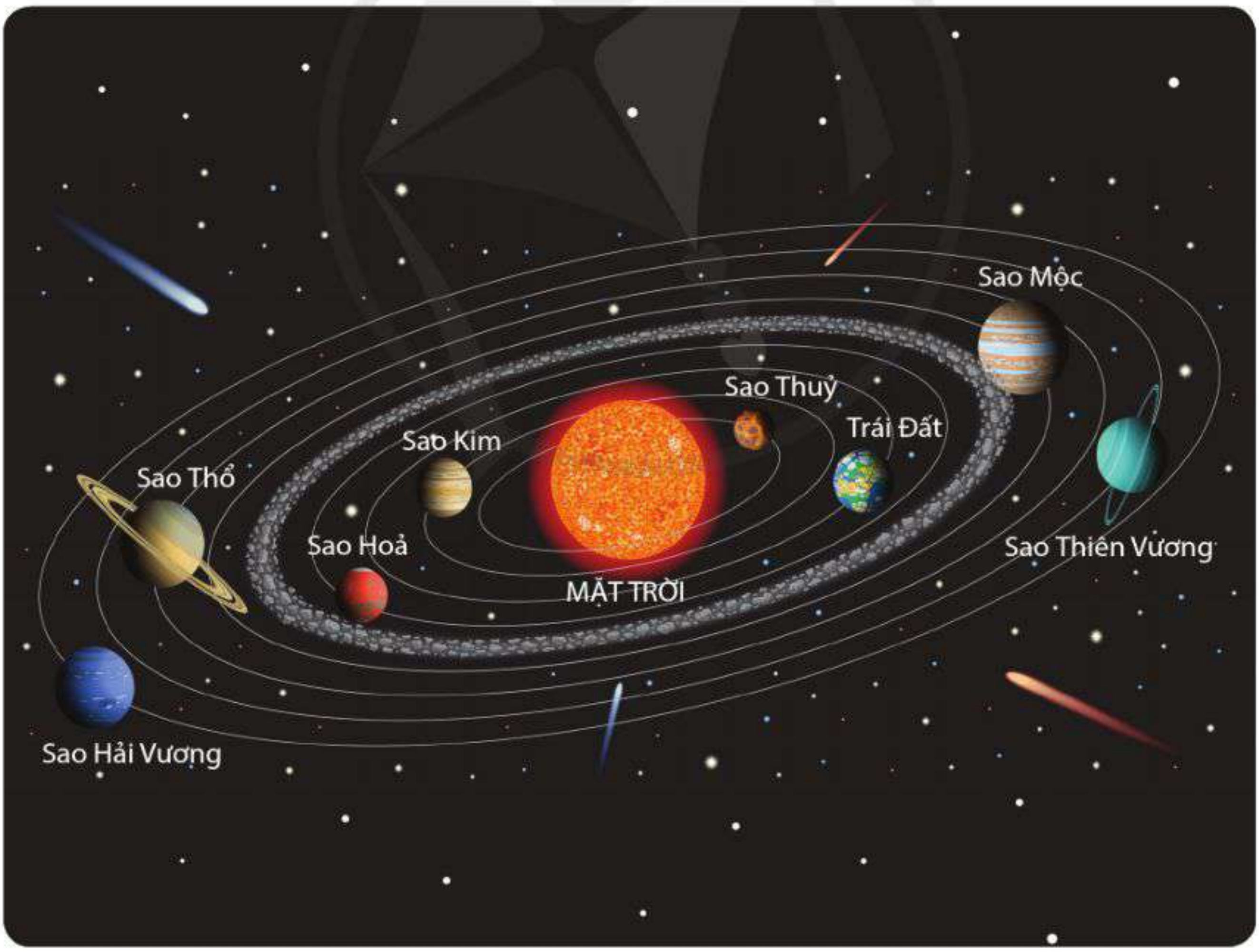
Hình 39

Ba định luật Kepler

Johannes Kepler (Giô-han Kê-ple) là một nhà toán học, thiên văn học người Đức. Ông là một trong những người đặt nền móng cho cuộc cách mạng khoa học thế kỉ XVII. Kepler được biết đến nhiều nhất bởi các định luật về chuyển động của các hành tinh trong Hệ Mặt Trời.

Johannes Kepler
(27/12/1571 – 15/11/1630)

Tám hành tinh trong Hệ Mặt Trời bao gồm: bốn hành tinh nhỏ ở vòng trong là Sao Thuỷ, Sao Kim, Trái Đất và Sao Hoả; bốn hành tinh lớn ở vòng ngoài là Sao Mộc, Sao Thổ, Sao Thiên Vương và Sao Hải Vương. Các thiên thể này đều chuyển động xung quanh Mặt Trời với các quỹ đạo khác nhau, tuy nhiên tất cả chúng đều tuân theo những quy luật nhất định.

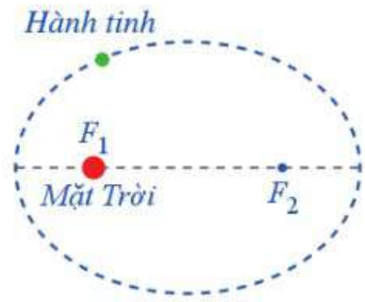


Hệ Mặt Trời
(Nguồn: Sách giáo khoa Khoa học Tự nhiên 6, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, 2021)

1. Chuyển động của mỗi thiên thể xung quanh Mặt Trời là quỹ đạo được xác định như sau:

Định luật thứ nhất của Kepler:

Các hành tinh chuyển động quanh Mặt Trời theo các quỹ đạo là các đường elip mà Mặt Trời là một tiêu điểm (*Hình 40*).



Hình 40

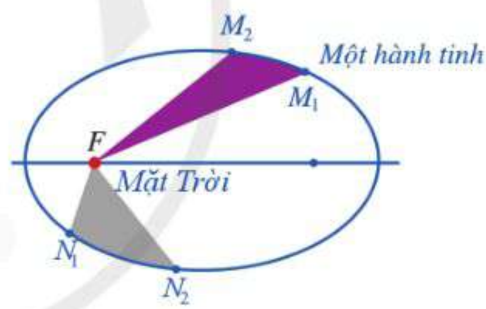
- Tâm sai của các quỹ đạo của tám hành tinh nói trên như sau:

Sao Kim $e \approx 0{,}0068$.
Sao Mộc $e \approx 0{,}0484$.
Sao Thuỷ $e \approx 0{,}2056$.
Sao Thổ $e \approx 0{,}0543$.
Trái Đất $e \approx 0{,}0167$.
Sao Hải Vương $e \approx 0{,}0082$.
Sao Thiên Vương $e \approx 0{,}046$.
Sao Hoả $e \approx 0{,}0934$.

2. Giả sử một hành tinh quay quanh Mặt Trời với quỹ đạo là elip (E). Xem Mặt Trời là tiêu điểm F của (E). Giả sử trong cùng một khoảng thời gian t thì hành tinh di chuyển được từ M_1 đến M_2 hoặc từ N_1 đến N_2 (*Hình 41*). Khi đó, diện tích hai "tam giác cong" FM_1M_2 và FN_1N_2 bằng nhau.

Định luật thứ hai của Kepler:

Đoạn thẳng nối từ Mặt Trời đến hành tinh quét được những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau (*Hình 41*).

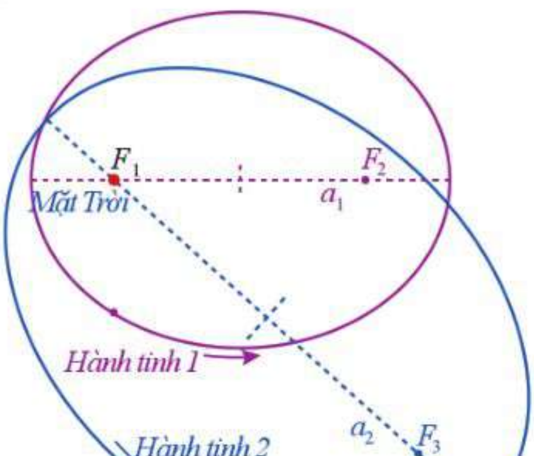


Hình 41

3. Gọi T_1, T_2 lần lượt là thời gian để hai hành tinh bất kì quay hết một vòng quanh Mặt Trời và a_1, a_2 lần lượt là bán trục lớn của các quỹ đạo elip chuyển động của hai hành tinh trên. Ta có: $\dfrac{T_1^2}{a_1^3} = \dfrac{T_2^2}{a_2^3}$.

Định luật thứ ba của Kepler:

Bình phương chu kì quỹ đạo của một hành tinh tỉ lệ với lập phương bán trục lớn của quỹ đạo elip của hành tinh đó (*Hình 42*).



Hình 42

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
chi tiêu cố định của chính phủ	bao gồm các khoản chi tiêu của chính phủ cho các cấp chính quyền từ trung ương đến địa phương như chi cho quốc phòng, luật pháp, đường sá, cầu cống, giáo dục, y tế, ...	20
giả thiết quy nạp	giả thiết ở bước quy nạp (*Bước 2*) rằng mệnh đề đúng với số *k* nguyên dương	24
hệ thống GPS	Global Positioning System – Hệ thống định vị toàn cầu là hệ thống xác định vị trí dựa trên vị trí của các vệ tinh nhân tạo, do Bộ Quốc phòng Hoa Kỳ thiết kế, xây dựng, vận hành và quản lí	14
lãi suất	tỉ lệ mà theo đó tiền lãi được bên vay trả cho việc sử dụng tiền mà họ vay từ một bên cho vay	12
lượng cầu	mô tả tổng số lượng hàng hoá hoặc dịch vụ mà người tiêu dùng có nhu cầu trong một khoảng thời gian nhất định	19
lượng cung	mô tả số lượng hàng hoá hoặc dịch vụ được cung cấp tại một mức giá thị trường nhất định	19
quy nạp toán học	một phương pháp chứng minh toán học dùng để chứng minh một mệnh đề về bất kì tập hợp nào được xếp theo thứ tự. Thông thường nó được dùng để chứng minh mệnh đề áp dụng cho tập hợp tất cả các số tự nhiên	23
sóng âm thanh	những sóng cơ học, được truyền đi trong môi trường rắn, lỏng, khí. Khi đến tai người, sóng âm thanh sẽ làm cho màng nhĩ dao động, gây ra cảm giác cảm thụ âm	65
tiền tín dụng	tiền nằm trong các tài khoản mở ở ngân hàng và được hình thành trên cơ sở các khoản tiền gửi vào ngân hàng	22
tốc độ vũ trụ	tốc độ một vật cần có để nó chuyển động theo quỹ đạo tròn gần bề mặt của một vật thể khác hoặc thoát ra khỏi trường hấp dẫn của vật thể khác	49
tổng thu nhập quốc dân	chỉ số kinh tế xác định tổng thu nhập của một quốc gia trong một thời gian, thường là một năm	20
trái phiếu	một chứng nhận nghĩa vụ nợ của người phát hành phải trả cho người sở hữu trái phiếu đối với một khoản tiền cụ thể (mệnh giá của trái phiếu), trong một thời gian xác định và với một khoản lợi tức quy định	22
trạng thái cân bằng thị trường	trạng thái mà ở đó lượng hàng hoá và dịch vụ mà người mua sẵn sàng và có khả năng mua đúng bằng lượng hàng hoá mà người bán sẵn sàng bán và có khả năng bán	19
viễn thông	việc truyền dẫn thông tin giao tiếp qua một khoảng cách đáng kể về địa lí	13

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
Địa chỉ: Tầng 6, Toà nhà số 128 đường Xuân Thuỷ, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.37547735
Email: nxb@hnue.edu.vn | **Website:** www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc – Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập viên:
TẠ THỊ ÁNH – NGUYỄN THỊ NGÂN – ĐÀO ANH TIẾN

Thiết kế sách:
ĐINH THỊ BÌNH – PHAN THỊ LƯƠNG

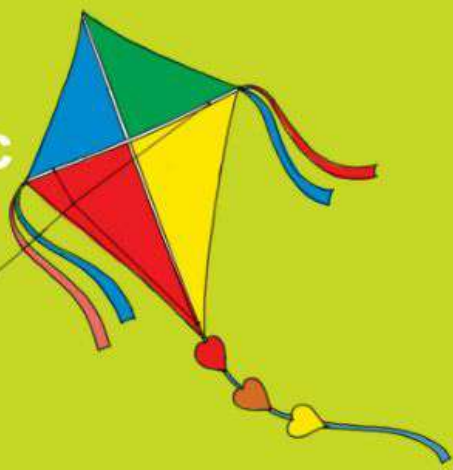
Trình bày bìa:
TRẦN TIỂU LÂM – ĐINH THỊ BÌNH

Sửa bản in:
LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP TOÁN 10

Mã số: ....
ISBN .....
In .... cuốn, khổ 19 x 26,5cm, tại ....
Địa chỉ: ....
Số xác nhận đăng kí xuất bản: ....
Quyết định xuất bản số: ....
In xong và nộp lưu chiểu tháng .... năm 20..........

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống



Sách Toán 10 là cuốn sách giáo khoa dành cho học sinh lớp 10, thuộc bộ sách giáo khoa "Cánh Diều", thực hiện theo "Chương trình Giáo dục phổ thông 2018"

Sách gồm hai tập và chuyên đề học tập được biên soạn đáp ứng yêu cầu phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh. Các hoạt động học tập được tổ chức theo tiến trình từ dễ đến khó, hướng đến việc khám phá, phát hiện, thực hành, vận dụng giải quyết vấn đề trong thực tiễn, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh. Sách được trình bày hấp dẫn, khơi gợi sự tò mò, kích thích hứng thú, tạo dựng niềm tin trong học tập môn Toán ở học sinh.

Sách là sản phẩm tâm huyết của tập thể tác giả – những nhà giáo, nhà khoa học giàu kinh nghiệm trong giáo dục phổ thông.

SỬ DỤNG TEM CHỐNG GIẢ

1. Quét mã QR hoặc dùng trình duyệt web để truy cập website bộ sách Cánh Diều: www.hoc10.com
2. Vào mục Hướng dẫn (www.hoc10.com/huong-dan) để kiểm tra sách giả và xem hướng dẫn kích hoạt sử dụng học liệu điện tử.

ISBN: 978-604-54-9441-7

9 786045 494417

Giá: đồng