

50 ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 7

(CÓ ĐÁP ÁN VÀ GIẢI CHI TIẾT)



50 ĐỀ THI
HỌC SINH GIỎI LỚP 7 CÓ GIẢI CHI TIẾT

50 ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 7

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh luyện thi học sinh giỏi môn toán lớp 7, sachhoc.com giới thiệu đến thầy cô và các em bộ đề thi học sinh giỏi toán lớp 7 của các huyện trên cả nước có hướng dẫn giải cụ thể. Đây là bộ đề thi mang tính chất thực tiễn cao, giúp các thầy cô và các em học sinh luyện thi học sinh giỏi lớp 7 có một tài liệu bám sát đề thi để đạt được thành tích cao, mang lại vinh dự cho bản thân, gia đình và nhà trường. Bộ đề gồm nhiều Câu toán hay được các thầy cô trên cả nước sưu tầm và sáng tác, ôn luyện qua sẽ giúp các em phát triển tư duy môn toán từ đó thêm yêu thích và học giỏi môn học này, tạo được nền tảng để có những kiến thức nền tốt đáp ứng cho việc tiếp nhận kiến thức ở các lớp, cấp học trên được nhẹ nhàng và hiệu quả hơn.

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng có thể dùng tuyển tập đề toán này để giúp con em mình học tập. Hy vọng Tuyển tập 50 đề thi học sinh giỏi lớp 7 này sẽ có thể giúp ích nhiều cho học sinh phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Bộ đề này được viết theo hình thức Bộ đề ôn thi, gồm: đề thi và hướng dẫn giải đề ngay dưới đề thi đó dựa trên các đề thi chính thức đã từng được sử dụng trong các kì thi học sinh giỏi toán lớp 7 ở các quận, huyện trên cả nước.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ bộ đề này!

MỤC LỤC

	Trang	
	Đề thi	Đáp án
1. Đề thi HSG lớp 7 huyện Chương Mỹ năm học 2014-2015	4	55
2. Đề thi HSG lớp 7 huyện Tiền Hải năm học 2016-2017	5	57
3. Đề thi HSG lớp 7 huyện Quốc Oai năm học 2015 -2016	6	60
4. Đề thi HSG lớp 7 huyện Thanh Uyên năm học 2017 -2018	7	62
5. Đề thi HSG lớp 7 huyện Quế Sơn năm học 2009 -2010	8	66
6. Đề thi HSG lớp 7 huyện Anh Sơn năm học 2013 -2014	9	68
7. Đề thi HSG lớp 7 huyện Việt Yên năm học 2012 -2013	10	70
8. Đề thi HSG lớp 7 huyện Hoài Nhơn năm học 2012 -2013	11	74
9. Đề thi HSG lớp 7 Trường Trần Hưng Đạo 2017 -2018	12	76
10. Đề thi HSG lớp 7 Trường Trần Mai Ninh 2017 -2018	13	79
11. Đề thi HSG lớp 7 huyện Hoằng Hóa năm học 2013 -2014	14	82
12. Đề thi HSG lớp 7 huyện Sông Lô năm học 2013 -2014	15	85
13. Đề thi HSG lớp 7 huyện Quốc Oai năm học 2016 -2017	16	87
14. Đề thi HSG lớp 7 huyện Hậu Lộc năm học 2013 -2014	17	89
15. Đề thi HSG lớp 7 Trường Bảo Sơn 2013 -2014	18	92
16. Đề thi HSG lớp 7 huyện Hậu Lộc năm học 2017 -2018	19	96
17. Đề thi HSG lớp 7 Trường Võ Thị Sáu 2010 -2011	20	99
18. Đề thi HSG lớp 7 huyện Triệu Sơn năm học 2016 -2017	21	102
19. Đề thi HSG lớp 7 huyện Vĩnh Lộc năm học 2016 -2017	22	105
20. Đề thi HSG lớp 7 huyện Vĩnh Bảo năm học 2017 -2018	23	109
21. Đề thi HSG lớp 7 huyện Nguyễn Chíך năm học 2017 -2018	24	112
22. Đề thi HSG lớp 7 huyện Ứng Hòa năm học 2015 -2016	25	115
23. Đề thi HSG lớp 7 huyện Ngọc Lặc năm học 2015 -2016	26	118
24. Đề thi HSG lớp 7 huyện Thiệu Hóa năm học 2016 -2017	27	121
25. Đề thi HSG lớp 7 huyện Thạch Đồng năm học 2017 -2018	28	124
26. Đề thi HSG lớp 7 huyện Yên Mô năm học 2016 -2017	29	127
27. Đề thi HSG lớp 7 huyện Như Xuân năm học 2015 -2016	30	130
28. Đề thi HSG lớp 7 huyện Vũ Thư năm học 2015 -2016	31	133

29. Đề thi HSG lớp 7 huyện Hương Khê năm học 2011 -2012	32	139
30. Đề thi HSG lớp 7 huyện Sơn Động năm học 2014 -2015	33	140
31. Đề thi HSG lớp 7 huyện Thanh Sơn năm học 2013 -2014	34	142
32. Đề thi HSG lớp 7 huyện Nga Thắng năm học 2017 -2018	35	145
33. Đề thi HSG lớp 7 huyện Tam Dương năm học 2014 -2015	36	148
34. Đề thi HSG lớp 7 huyện Thanh Chương năm học 2013 -2014	37	150
35. Đề thi HSG lớp 7 huyện Ý Yên năm học 2015 -2016	38	152
36. Đề thi HSG lớp 7 huyện Thanh Oai năm học 2013 -2014	39	156
37. Đề thi HSG lớp 7 huyện Đức Phổ năm học 2015 -2016	40	160
38. Đề thi HSG lớp 7 huyện Yên Định năm học 2010 -2011	41	163
39. Đề thi HSG lớp 7 huyện Sơn Dương năm học 2012 -2013	42	165
40. Đề thi HSG lớp 7 huyện Hoài Nhơn năm học 2015 -2016	43	168
41. Đề thi HSG lớp 7 huyện Hồng Hà năm học 2015 -2016	44	172
42. Đề thi HSG lớp 7 huyện Tiền Hải năm học 2016 -2017	45	174
43. Đề thi HSG lớp 7 Thị xã Phú Thọ năm học 2010 -2011	46	177
44. Đề thi HSG lớp 7 huyện Dân Hòa năm học 2015 -2016	47	178
45. Đề thi HSG lớp 7 huyện Triệu Sơn năm học 2014 -2015	48	181
46. Đề thi HSG lớp 7 huyện Triệu Sơn năm học 2015 -2016	49	183
47. Đề thi HSG lớp 7 trường Hoằng Phú năm học 2016 -2017	50	186
48. Đề thi HSG lớp 7 huyện Lâm Thao năm học 2016 -2017	51	188
49. Đề thi HSG lớp 7 huyện Nghĩa Đàn năm học 2011 -2012	53	191
50. Đề thi HSG lớp 7 tỉnh Bắc Giang năm học 2011 -2012	54	193

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN CHƯƠNG MỸ**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2014-2015
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 1

(Đề thi có một trang)

Câu 1.

a. Thực hiện phép tính:
$$\frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,265 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25}$$

b. So sánh: $\sqrt{50} + \sqrt{26} + 1$ và $\sqrt{168}$.

Câu 2.

a. Tìm x biết: $|x - 2| + |3 - 2x| = 2x + 1$

b. Tìm $x; y \in \mathbb{Z}$ biết: $xy + 2x - y = 5$

c. Tìm $x; y; z$ biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $4x - 3y + 5z = 7$

Câu 3.

a. Tìm đa thức bậc hai biết $f(x) - f(x - 1) = x$.

Từ đó áp dụng tính tổng $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

b. Cho $\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$ Chứng minh: $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$.

Câu 4.

Cho tam giác ABC ($\angle BAC < 90^\circ$), đường cao AH. Gọi E; F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB; AC, đường thẳng EF cắt AB; AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

a. $AE = AF$;

b. HA là phân giác của $\angle MHN$;

c. $CM \parallel EH$; $BN \parallel FH$.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TIỀN HẢI**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 2

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (5 điểm)

a) Thực hiện phép tính: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{2^2 \cdot 3^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{125 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

b) Tính giá trị biểu thức: $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + \dots + 17.18.19$

c) Tìm một số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu tăng chữ số hàng trăm thêm n đơn vị đồng thời giảm chữ số hàng chục và giảm chữ số hàng đơn vị đi n đơn vị thì được một số có 3 chữ số gấp n lần số có 3 chữ số ban đầu.

Câu 2. (3 điểm)

a) Tìm các số x, y, z biết rằng: $3x = 4y$, $5y = 6z$ và $xyz = 30$.

b) Tìm x biết: $\left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = \left| -1,6 + \frac{3}{5} \right|$

Câu 3. (3 điểm)

1) Cho hàm số $y = f(x) = (m - 1)x$

a) Tìm m biết: $f(2) - f(-1) = 7$

b) Cho $m = 5$. Tìm x biết $f(3 - 2x) = 20$

2) Cho các đơn thức $A = -\frac{1}{2}x^2yz^2$, $B = -\frac{3}{4}xy^2z^2$, $C = x^3y$

Chứng minh rằng các đơn thức A, B, C không thể cùng nhận giá trị âm.

Câu 4. (7 điểm)

Cho $\triangle ABC$ nhọn có góc A bằng 60° . Phân giác ABC cắt AC tại D, phân giác ACB cắt AB tại E. BD cắt CE tại I.

a) Tính số đo góc BIC.

b) Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = BE$. Chứng minh $\triangle CID = \triangle CIF$.

c) Trên tia IF lấy điểm M sao cho $IM = IB + IC$. Chứng minh $\triangle BCM$ là tam giác đều.

Câu 5 (2 điểm)

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+11}$

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN QUỐC OAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 3

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (3.0 điểm)

Cho x, y, z là các số khác 0 và $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$.

Chứng minh rằng: $x = y = z$

Câu 2. (4 điểm)

a) Tìm x biết: $5^x + 5^{x+2} = 650$

b) Tìm số hữu tỷ x, y biết: $(3x - 33)^{2008} + |y - 7|^{2009} \leq 0$

Câu 3. (4 điểm)

Cho hàm số : $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

Biết $f(1) \vdots 3; f(0) \vdots 3; f(-1) \vdots 3$. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3

Câu 4. (7 điểm)

Cho tam giác ABC, AD là tia phân giác của góc A và $B > C$.

a) Chứng minh rằng $ADC - ADB = B - C$.

b) Vẽ đường thẳng AH vuông góc BC tại H. Tính ADB và HAD khi biết $B - C = 40^\circ$

c) Vẽ đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc đỉnh A, nó cắt đường thẳng BC tại E. Chứng minh rằng $AEB = HAD = \frac{B - C}{2}$

Câu 5. (2 điểm)

a) Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$ và $P = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$.

Tính $(S - P)^{2013}$.

b) Cho $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$ Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị là một số nguyên

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THANH UYÊN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 4

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Thực hiện phép tính: $A = \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} \right) \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} \right]$.

b) Rút gọn : $B = (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Tìm a, b, c biết $\frac{12a-15b}{7} = \frac{20c-12a}{9} = \frac{15b-20c}{11}$ và $a+b+c=48$.

b) Một công trường dự định phân chia số đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ với 7; 6; 5. Nhưng sau đó vì số người của các đội thay đổi nên đã chia lại tỉ lệ với 6; 5; 4. Như vậy có một đội làm nhiều hơn so với dự định là $6m^3$ đất. Tính tổng số đất đã phân chia cho các đội.

Câu 3. (4,5 điểm)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \frac{|x-2017|+2018}{|x-2017|+2019}$.

b) Chứng tỏ rằng $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$ không là số tự nhiên với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

c) Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho: $x - 2xy + y = 0$.

Câu 4. (5,5 điểm)

Cho tam giác cân ABC, $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh rằng:

a) $DM = EN$.

b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN.

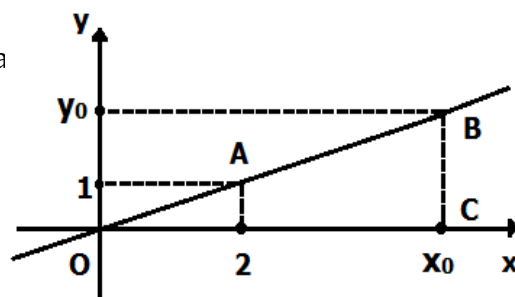
c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC.

Câu 5. (2,5 điểm)

Trong hình bên, đường thẳng OA là đồ thị của hàm số $y = f(x) = ax$.

a) Tính tỉ số $\frac{y_0 - 2}{x_0 - 4}$.

b) Giả sử $x_0 = 5$. Tính diện tích tam giác OBC



Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm – SBD:

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN QUẾ SƠN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2009-2010
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 5

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

a. Tìm x, y biết: $\frac{4+x}{7+y} = \frac{4}{7}$ và $x + y = 22$

b. Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$

Câu 2. (2,0 điểm)

Thực hiện tính:

a. $S = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} \dots - 2 - 1$

b. $P = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{16}(1+2+3+\dots+16)$

Câu 3. (2,0 điểm)

Tìm x biết:

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \dots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 2^x$

b) $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^x$

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC có $B < 90^\circ$ và $B = 2C$. Kẻ đường cao AH. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D.

a. Chứng minh $\angle BEH = \angle ACB$

b. Chứng minh $DH = DC = DA$.

c. Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB' . Chứng minh tam giác $AB'C$ cân.

d. Chứng minh $AE = HC$.

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm – SBD:

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN ANH SƠN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 6

(Đề thi có một trang)

Câu 1 (2,0 điểm).

Tính hợp lý các biểu thức sau:

a) $27\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} - 13\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8}$

b) $2\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| + \sqrt{\frac{4}{9}}$

c) $\frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4}$

Câu 2 (2,5 điểm). Tìm x biết:

a) $3(x - 2) + \frac{2}{5} = 4$

b) $\left|x + \frac{1}{3}\right| - 5 = 7$

c) $(2x - 1)^7 = (2x - 1)^5$

Câu 3 (1,5 điểm).

Ba đội cùng chuyển một khối lượng gạch như nhau. Thời gian để đội thứ nhất, đội thứ hai và đội thứ ba làm xong công việc lần lượt là 2 giờ, 3 giờ, 4 giờ. Tính số người tham gia làm việc của mỗi đội, biết rằng số người của đội thứ ba ít hơn số người của đội thứ hai là 5 người.

Câu 4 (3,5 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A với $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và BC = 15cm. Tia phân giác góc C cắt AB tại D. Kẻ DE $\perp$ BC (E $\in$ BC).

a) Chứng minh AC = CE.

b) Tính độ dài AB; AC.

c) Trên tia AB lấy điểm F sao cho AF = AC. Kẻ tia Fx $\perp$ FA cắt tia DE tại M. Tính DCM.

Bài 5 (0,5 điểm): Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = |x| - |x - 2|$

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm – SBD:

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN VIỆT YÊN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 7

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Tính $M = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2012}{2013}$

2) Tìm x, biết: $|x^2 + |x - 1|| = x^2 + 2$.

Câu 2. (5,0 điểm)

1) Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}.$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

2) Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5:6:7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4:5:6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x - 2| + |2x - 2013|$ với x là số nguyên.

2) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x + y + z = xyz$.

Câu 4. (6,0 điểm) Cho $\angle xAy = 60^\circ$ có tia phân giác Az. Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H, kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay, Bt cắt Az tại C. Từ C kẻ CM

vuông góc với Ay tại M. Chứng minh:

- a) K là trung điểm của AC.
- b) $\triangle KMC$ là tam giác đều.
- c) Cho $BK = 2\text{cm}$. Tính các cạnh $\triangle AKM$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

-----Hết-----

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOÀI NHƠN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 8

(Đề thi có một trang)

Bài 1 (4 điểm):

- a) So sánh hai số: $(-5)^{39}$ và $(-2)^{91}$
b) Chứng minh rằng: Số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

Bài 2 (4 điểm):

- a) Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn: $(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$
b) Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$

Bài 3 (4 điểm): Ba lớp 7 ở trường K có tất cả 147 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp

$7A_1$, $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp $7A_2$ và $\frac{1}{5}$ số học sinh của lớp $7A_3$ đi thi học sinh giỏi cấp huyện thì số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau. Tính tổng số học sinh của mỗi lớp 7 ở trường K.

Bài 4 (4 điểm): Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 3\hat{B} = 6\hat{C}$.

- a) Tính số đo các góc của tam giác ABC.
b) Kẻ AD vuông góc với BC (D thuộc BC). Chứng minh: $AD < BD < CD$.

Bài 5 (4 điểm): Cho tam giác ABC cân ở A. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $AM + AN = 2AB$.

- a) Chứng minh rằng: $BM = CN$
b) Chứng minh rằng: BC đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN.
c) Đường trung trực của MN và tia phân giác của góc BAC cắt nhau tại K. Chứng minh rằng: $KC \perp AC$.

-----Hết-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm – SBD:

Đề số 9

(Đề thi có một trang)

Câu 1: (4,5 điểm).

1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) : \frac{7}{11}$

b) $B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$

2. Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$. Tính giá trị biểu thức: $C = \frac{5x^2 + 3y^2}{10x^2 - 3y^2}$

Câu 2: (4,5 điểm)1. Tìm các số x, y, z , biết:

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $x + y + z = 92$

b) $(x-1)^{2018} + (2y-1)^{2018} + |x+2y-z|^{2019} = 0$

2. Tìm x, y nguyên biết: $xy + 3x - y = 6$ **Câu 3:** (3,0 điểm)1. Tìm đa thức A biết: $A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$ 2. Cho hàm số $y = f(x) = ax + 2$ có đồ thị đi qua điểm $A(a-1; a^2 + a)$.a) Tìm a b) Với a vừa tìm được, tìm giá trị của x thỏa mãn: $f(2x-1) = f(1-2x)$ **Câu 4:** (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao điểm BE và CD. Chứng minh rằng:

a) $BE = CD$ b) $\triangle BDE$ là tam giác cânc) $\angle EIC = 60^\circ$ và IA là tia phân giác của $\angle DIE$ **Câu 5:** (2,0 điểm)1. Tìm số hữu tỉ x , sao cho tổng của số đó với nghịch đảo của nó có giá trị là một số nguyên.2. Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn: $a + 3c = 2016$; $a + 2b = 2017$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a + b + c$.

-----Hết-----

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG TRẦN MAI NINH**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 10

(Đề thi có một trang)

Bài 1: (4 điểm) Tính giá trị của biểu thức

a) $A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20};$

b) $B = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015} - \frac{3^{2016}}{2}$

Bài 2: (4 điểm)

a) Tìm x biết: $\frac{15}{28} - \left| x - \frac{3}{14} \right| = -\frac{5}{12}$

b) Tìm x, y nguyên biết: $25 - y^2 = 4(x - 2016)^2$

Bài 3: (4 điểm)

a) Cho đa thức: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Biết $13a + b + 2c = 0$. Chứng minh $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$

b) Cho các số thực x, y, z $\neq 0$ thỏa mãn: $\frac{xy}{x+y} = \frac{yz}{y+z} = \frac{xz}{x+z}$

Tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + xz}.$

Bài 4: (8 điểm) Cho tam giác ABC vuông ở A, có phân giác BD, CE cắt nhau ở I. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của D, E trên BC

a) Chứng minh tam giác ABM cân.

b) Chứng minh $MN = AB + AC - BC$

c) Tính góc MAN.

d) Gọi G, K lần lượt là giao điểm của BD và AN; CE và AM. Tia AI cắt GK ở H. Tính góc AHG.

-----Hết-----

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOÀNG HÓA**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 11

(Đề thi có một trang)

Câu 1: (4,5 điểm)

- 1) Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{4}{9} : \left(\frac{1}{15} - \frac{2}{3} \right) + \frac{4}{9} : \left(\frac{1}{11} - \frac{5}{22} \right)$
- 2) Tìm x, biết: $\left(-1\frac{3}{5} + x \right) : \frac{12}{13} = 2\frac{1}{6}$
- 3) Tính giá trị của biểu thức $M = 21x^2y + 4xy^2$ với x, y thỏa mãn:
 $(x - 2)^4 + (2y - 1)^{2014} \leq 0$

Câu 2: (4,5 điểm)

- 1) Tìm các số x, y, z biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$; $\frac{y}{6} = \frac{z}{8}$ và $2x + y - z = -14$.
- 2) Tìm x, biết: $(x - 2)(x + \frac{2}{3}) > 0$.
- 3) Tìm số nguyên x, biết rằng: $\frac{3}{7} \cdot 15\frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot 5\frac{2}{5} \leq x \leq \left(3\frac{1}{2} : 7 - 6\frac{1}{2} \right) \cdot \left(-2\frac{1}{3} \right)$

Câu 3: (5,0 điểm)

- 1) Tính giá trị của biểu thức $M = 4x + 4y + 21xy(x + y) + 7(x^3y^2 + x^2y^3) + 2014$, biết $x + y = 0$.
- 2) Cho đa thức $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Biết rằng, $p(x) : 5$ với mọi x nguyên. Chứng minh rằng a, b, c, d đều chia hết cho 5.
- 3) Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4026}$, $B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4025}$. So sánh $\frac{A}{B}$ với $1\frac{2013}{2014}$.

Câu 4: (4,5 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D (D khác B, C). Trên tia đối của tia CB, lấy điểm E sao cho CE = BD. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt BA tại M. Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt tia AC tại N. MN cắt BC tại I.

- 1) Chứng minh rằng: DM = EN.
- 2) Chứng minh rằng IM = IN; BC < MN.
- 3) Gọi O là giao của đường phân giác góc A và đường thẳng vuông góc với MN tại I. Chứng minh rằng: $\triangle BMO = \triangle CNO$. Từ đó suy ra điểm O cố định.

Câu 5: (1,5 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A. Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho $DAE = ABD$ (E nằm giữa B và D). Chứng minh rằng $DAE = ECB$.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN SÔNG LÔ**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 12

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2,5 điểm)

a. Tìm x biết: $\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015}$.

b. Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $M = \frac{3n-1}{n-1}$ có giá trị là số nguyên.

c. Tính giá trị của biểu thức: $N = xy^2z^3 + x^2y^3z^4 + x^3y^4z^5 + \dots + x^{2014}y^{2015}z^{2016}$ tại: $x = -1; y = -1; z = -1$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a. Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c}$. Chứng minh: $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$.

b. Tìm tất cả các số tự nhiên m, n sao cho: $2^m + 2015 = |n - 2016| + n - 2016$.

Câu 3. (1,5 điểm)

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x-2015| + |x-2016| + |x-2017|$.

b. Cho bốn số nguyên dương khác nhau thỏa mãn tổng của hai số bất kì chia hết cho 2 và tổng của ba số bất kì chia hết cho 3. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng bốn số này?

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A, BH vuông góc AC tại H. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH.

a) Chứng minh $\triangle DBM = \triangle FMB$.

b) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng MD + ME có giá trị không đổi.

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho CK = EH. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK.

Câu 5. (1,0 điểm) Có sáu túi lần lượt chứa 18, 19, 21, 23, 25 và 34 bóng. Một túi chỉ chứa bóng đỏ trong khi năm túi kia chỉ chứa bóng xanh. Bạn Toán lấy ba túi, bạn Học lấy hai túi. Túi còn lại chứa bóng đỏ. Biết lúc này bạn Toán có số bóng xanh gấp đôi số bóng xanh của bạn Học. Tìm số bóng đỏ trong túi còn lại.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN QUỐC OAI**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 13

(Đề thi có một trang)

Câu 1 (4 điểm) Tìm x:

a/ $\left|x + \frac{1}{5}\right| - 4 = -2$

b/ $2x - \frac{1}{5} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$

c/ $(x-3)^{x+2} - (x-3)^{x+8} = 0$

Câu 2 (3 điểm) Tìm x, y, z biết $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 116$.

Câu 3 (1 điểm) Trong vòng bán kết giải bóng đá của trường THCS Phù Đồng có 4 đội thi đấu, gọi A là tập hợp các cầu thủ; B là tập hợp các số áo thi đấu. Quy tắc mỗi cầu thủ ứng với số áo của họ có phải là một hàm số không? Vì sao?

Câu 4 (1.5 điểm) Tính giá trị của đa thức $P = x^3 + x^2y - 2x^2 - xy - y^2 + 3y + x + 2017$ với $x + y = 2$

Câu 5 (2 điểm) Cho : $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$. Chứng minh: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Câu 6 (1.5 điểm) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn: $2x^2 + 3y^2 = 77$

Câu 7 (2.5 điểm) Cho $\triangle ABC$, tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Biết $\angle ADB = 85^\circ$

a/ Tính: $B - C$

b/ Tính các góc của $\triangle ABC$ nếu $4.B = 5.C$

Câu 8 (4.5 điểm) Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, trung tuyến AM. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, vẽ đoạn thẳng AE vuông góc và bằng AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B, vẽ đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AC.

a/ Chứng minh: $BD = CE$

b/ Trên tia đối của tia MA lấy N sao cho $MN = MA$. Chứng minh: $\triangle ADE = \triangle CAN$.

c/ Gọi I là giao điểm của DE và AM. Chứng minh: $\frac{AD^2 + IE^2}{DI^2 + AE^2} = 1$

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HẬU LỘC**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 14

(Đề thi có một trang)

Câu 1(5 điểm):

a) Cho biểu thức: $P = x - 4xy + y$. Tính giá trị của P với $|x| = 1,5$; $y = -0,75$

b) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$

Câu 2 (4điểm):

a) Tìm x, y, z, biết:

$$2x = 3y; 4y = 5z \text{ và } x + y + z = 11$$

b) Tìm x, biết: $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$

Câu 3(3 điểm). Cho hàm số: $y = f(x) = -4x^3 + x$

a) Tính $f(0)$, $f(-0,5)$

b) Chứng minh: $f(-a) = -f(a)$.

Câu 4: (1,0 điểm): Tìm cặp số nguyên (x;y) biết: $x + y = x.y$

Câu 5(6 điểm): Cho ΔABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là ΔABM và ΔACN .

a) Chứng minh rằng: $\Delta AMC = \Delta ABN$;

b) Chứng minh: $BN \perp CM$;

c) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN.

Câu 6 (1 điểm): Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG BẢO SƠN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 15

(Đề thi có một trang)

Câu 1 (6 điểm)

1) Thực hiện phép tính :

$$A = \frac{9 \cdot 6^9 \cdot 120 - 4^6 \cdot 9^6}{8^4 \cdot 3^{13} - 6^{12}}; \quad B = \frac{10}{7 \cdot 12} + \frac{10}{12 \cdot 17} + \frac{10}{17 \cdot 22} + \dots + \frac{10}{2012 \cdot 2017} + \frac{10}{2017 \cdot 2022}$$

2) Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn : $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{a+c-b}{b}$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{a}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

3) Tính giá trị của đa thức $f(x) = x^5 - 2018x^4 + 2016x^3 + 2018x^2 - 2016x - 2017$ tại $x = 2017$

Câu 2 (3 điểm)

1) Cho $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$. Chứng minh rằng : $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

2) Tìm x, y, z biết: $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$

Câu 3 (5 điểm) 1) Tìm các cặp số tự nhiên $(x; y)$ sao cho: $49 - y^2 = 12(x - 2001)^2$

2) Cho $|2019x_1 - 2018y_1| + |2019x_2 - 2018y_2| + \dots + |2019x_{2018} - 2018y_{2018}| \leq 0$. Chứng minh $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2018}}{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{2018}} = \frac{2018}{2019}$.

3) Một cửa hàng có ba cuộn vải, tổng chiều dài ba cuộn vải đó là 186m, giá tiền mỗi mét vải của ba cuộn là như nhau. Sau khi bán được một ngày cửa hàng còn lại $\frac{2}{3}$ cuộn thứ nhất, $\frac{1}{3}$ cuộn thứ hai, $\frac{3}{5}$ cuộn thứ ba. Số tiền bán được của ba cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tỉ lệ với 2; 3; 2. Tính xem trong ngày đó cửa hàng đã bán được bao nhiêu mét vải mỗi cuộn.

Câu 4 (5 điểm) Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của của tia MA lấy điểm E sao cho ME = MA. Chứng minh rằng:

a) AC = EB và AC // BE

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho AI = EK . Chứng minh ba điểm I , M , K thẳng hàng

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $HBE = 50^\circ$; $MEB = 25^\circ$. Tính HEM và BME

Câu 5 (1 điểm). Tìm các số tự nhiên $x, y, z \neq 0$ thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = xyz$

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HẬU LỘC**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 16

(Đề thi có một trang)

Bài 1. (4,0 điểm).

a) Tính: $A = 1\frac{13}{15} \cdot (0,5)^2 \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - 1\frac{19}{60}\right) : 1\frac{23}{24}$

b) So sánh: 16^{20} và 2^{100}

Bài 2. (3,0 điểm).

a) Tìm x biết: $|2x - 7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

b) Tìm số tự nhiên n biết: $3^{-1} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^5$

Bài 3. (4,5 điểm).

a) Cho dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$

Tính giá trị biểu thức Q , biết $Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

b) Cho biểu thức $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ với x, y, z, t là các số

tự nhiên khác 0. Chứng minh $M^{10} < 1025$.

Bài 4. (6,5 điểm).

1) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, D là điểm thuộc đoạn BM (D khác B và M). Kẻ các đường thẳng BH, CI lần lượt vuông góc với đường thẳng AD tại H và I. Chứng minh rằng:

a) $BAM = ACM$ và $BH = AI$.

b) Tam giác MHI vuông cân.

2) Cho tam giác ABC có góc $\hat{A} = 90^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Tia phân giác của góc HAC cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của góc HAB cắt cạnh BC ở E. Chứng minh rằng $AB + AC = BC + DE$.

Bài 5. (2,0 điểm).

Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$. Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn

2. Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG VÕ THỊ SÁU**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 17

(Đề thi có một trang)

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2010-2011
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Bài 1: Tính giá trị biểu

thức:

$$\frac{(a+b)(-x-y)-(a-y)(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+by)} \quad \text{Với } a=\frac{1}{3}; b=-2; x=\frac{3}{2}; y=1$$

Bài 2: Chứng minh rằng: Nếu $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ thì: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Bài 3: Có 3 mảnh đất hình chữ nhật: A; B và C. Các diện tích của A và B tỉ lệ với 4 và 5, các diện tích của B và C tỉ lệ với 7 và 8; A và B có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27m. B và C có cùng chiều rộng. Chiều dài của mảnh đất C là 24m. Hãy tính diện tích của mỗi mảnh đất đó.

Bài 4: Cho 2 biểu thức:

$$A = \frac{4x-7}{x-2}; \quad B = \frac{3x^2-9x+2}{x-3}$$

- Tìm giá trị nguyên của x để mỗi biểu thức có giá trị nguyên
- Tìm giá trị nguyên của x để cả hai biểu thức cùng có giá trị nguyên.

Bài 5: Cho tam giác cân ABC, AB = AC. Trên tia đối của các tia BC và CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho BD = CE

- Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân.
- Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh AM là tia phân giác của góc DAE
- Từ B và C vẽ BH và CK theo thứ tự vuông góc với AD và AE. Chứng minh BH = CK
- Chứng minh 3 đường thẳng AM; BH; CK gặp nhau tại 1 điểm.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TRIỆU SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 18

(Đề thi có một trang)

Bài 1: (4,0 điểm)

a) So sánh: $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1$ và $\sqrt{99}$.

b) Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$.

c) Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$ và

$$P = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}.$$

Tính $(S - P)^{2016}$.

Bài 2: (4,0 điểm)

a) Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm hợp số r.

b) Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}^2 = (a + b)^3$

Bài 3: (6,0 điểm)

a) Cho x; y; z $\neq 0$ và $x - y - z = 0$. Tính giá trị biểu thức $B = \left(1 - \frac{z}{x}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right)$

b) Cho $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

c) Cho biểu thức $M = \frac{5-x}{x-2}$. Tìm x nguyên để M có giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: (3,0 điểm) Cho $\angle xAy = 60^\circ$ vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên tia Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C. Kẻ $BH \perp Ay$ tại H, $CM \perp Ay$ tại M, $BK \perp AC$ tại K. Chứng minh:

a) $KC = KA$

b) $BH = \frac{AC}{2}$

c) $\triangle KMC$ đều.

Bài 5: (3,0 điểm) Cho $\triangle ABC$ có $B = 2C < 90^\circ$. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Trên tia AB lấy điểm D sao cho $AD = HC$. Chứng minh rằng đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN VĨNH LỘC

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 19

(Đề thi có một trang)

Bài 1: (4,0 điểm).

a) Tính giá trị biểu thức $A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5 \right) : \left(-4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{7} \right) + 7,5$

b) Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2.8^4.27^2 + 4.6^9}{2^7.6^7 + 2^7.40.9^4}$

c) Tìm đa thức M biết rằng : $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$.

Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn $(2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \leq 0$.

Bài 2: (4,0 điểm).

a) Tìm x : $\frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3}$

b) Tìm x, y, z biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $x + y + z = 11$

c) Tìm x, biết : $(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$ (Với n là số tự nhiên)

Bài 3: (4,0 điểm).

a) Tìm độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 13cm. Biết độ dài 3 đường cao tương ứng lần lượt là 2cm, 3cm, 4cm.

b) Tìm x, y nguyên biết : $2xy - x - y = 2$

Bài 4: (6,0 điểm).

Cho tam giác ABC ($AB < AC$, góc B = 60°). Hai phân giác AD và CE của ΔABC cắt nhau ở I, từ trung điểm M của BC kẻ đường vuông góc với đường phân giác AI tại H, cắt AB ở P, cắt AC ở K.

a) Tính AIC

b) Tính độ dài cạnh AK biết $PK = 6cm, AH = 4cm$.

c) Chứng minh ΔIDE cân.

Bài 5: (2.0 điểm) Chứng minh rằng $\sqrt{10}$ là số vô tỉ.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN VĨNH BẢO**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 20

(Đề thi có một trang)

Câu 1 (2,0 điểm)

a) Tính $M = \left(0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - \frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2017}{2018}$.

b) Tìm x, biết: $|2017 - x| + |2018 - x| + |2019 - x| = 2$.

Câu 2 (3,0 điểm)

a) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

b) Cho hai đa thức: $f(x) = (x-1)(x+3)$ và $g(x) = x^3 - ax^2 + bx - 3$

Xác định hệ số a; b của đa thức g(x) biết nghiệm của đa thức f(x) cũng là nghiệm của đa thức g(x).

c) Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = xyz$.

Câu 3 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A, BH vuông góc AC tại H. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH.

a) Chứng minh: $\triangle DBM = \triangle FMB$.

b) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng MD + ME có giá trị không đổi.

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho CK = EH.

Chứng minh BC đi qua trung điểm của đoạn thẳng DK.

Câu 4 (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$, $B = 60^\circ$). Hai tia phân giác AD ($D \in BC$) và CE ($E \in AB$) của $\triangle ABC$ cắt nhau ở I. Chứng minh $\triangle IDE$ cân.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho $S_n = \frac{1^2 - 1}{1} + \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$)

Chứng minh rằng S_n không là số nguyên.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN NGUYỄN CHÍCH**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 21

(Đề thi có một trang)

Câu 1: (4,0 điểm).

a) Tính giá trị biểu thức $A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5$

b) Rút gọn biểu thức $B = \frac{2.8^4.27^2 + 4.6^9}{2^7.6^7 + 2^7.40.9^4}$

c) Tính đa thức M biết rằng : $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$. Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn $(2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \leq 0$.

Câu 2(4,0 điểm): Tìm x biết

a) $-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$

c) Tìm x, y nguyên biết $2xy - x - y = 2$

Câu 3(6,0 điểm):

a) Tìm hai số nguyên dương x và y biết rằng tổng, hiệu và tích của chúng lần lượt tỉ lệ nghịch với 35; 210; 12.

b) Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

chứng minh biểu thức $P = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$ có giá trị nguyên.

c) Cho a, b, c, d $\in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh a + b + c + d chia hết cho 3

Câu 4(5,0 điểm): Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của của tia MA lấy điểm E sao cho ME = MA. Chứng minh rằng:

a) AC = EB và AC // BE

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho AI = EK . Chứng minh ba điểm I , M , K thẳng hàng

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $HBE = 50^\circ$; $MEB = 25^\circ$.

Tính HEM và BME

Câu 5 (1,0 điểm):

Cho $B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$. Chứng tỏ B không phải là số nguyên.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN ỨNG HÒA**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 22

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

Thực hiện phép tính:

$$A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2015}$$

$$B = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$$

Câu 2. (5,0 điểm)

a) Tìm x để biểu thức $P = 1 + \frac{9}{3 + |x - 5|}$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Tìm giá trị của x biết: $|2x - 1| = 2$.

c) Cho 4 số a, b, c, d trong đó b là trung bình cộng của a và c đồng thời $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} \right)$

. Chứng minh bốn số đó lập thành tỉ lệ thức.

Câu 3. (4,0 điểm)

Nhà trường thành lập 3 nhóm học sinh khối 7 tham gia chăm sóc di tích lịch sử. Trong đó $\frac{2}{3}$ số học sinh của nhóm I bằng $\frac{8}{11}$ số học sinh của nhóm II và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh của nhóm III. Biết rằng số học sinh của nhóm I ít hơn tổng số học sinh của nhóm II và nhóm III là 18 học sinh. Tính số học sinh của mỗi nhóm.

Câu 4. (6,0 điểm).

Cho ΔABC có $\hat{A} < 90^\circ$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB; AE vuông góc và bằng AC.

a) Chứng minh: $DC = BE$ và $DC \perp BE$

b) Gọi N là trung điểm của DE. Trên tia đối của tia NA lấy M sao cho $NA = NM$. Chứng minh: $AB = ME$ và $\Delta ABC = \Delta EMA$.

c) Chứng minh: $MA \perp BC$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Một số chính phương có dạng $\overline{abcd}$. Biết $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. Hãy tìm số $\overline{abcd}$.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN NGỌC LẠC**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 23

(Đề thi có một trang)

Bài 1 (4 điểm) : Thực hiện phép tính

$$a/ A = \frac{155 - \frac{10}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{23}}{403 - \frac{26}{7} - \frac{13}{11} + \frac{13}{23}} + \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{13} - 0,9}{\frac{7}{91} + 0,2 - \frac{3}{10}}$$

$$b/ B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} + \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

Bài 2 (5 điểm) :

a/ Chứng minh rằng: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n.

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x|$

c/ Tìm x, y thuộc Z biết : $25 - y^2 = 8(x - 2015)^2$

Bài 3 (4 điểm) :

a/ Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3 - 3 = 29$. Tính: $x - 2y + 3z$

b/ Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$ trong đó a, b,

c là hằng số. Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$.

Bài 4 (5 điểm) : Cho tam giác ABC có ($AB < AC$). Gọi M là trung điểm của BC. Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của góc BAC tại N, cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F. Chứng minh rằng :

a/ $BE = CF$

b/ $AE = \frac{AB + AC}{2}$

Bài 5 (2 điểm) : Cho tam giác ABC có góc B bằng 45° , góc C bằng 120° . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính góc ADB.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THIỆU HÓA**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 24

(Đề thi có một trang)

Câu 1: (4,0 điểm) Tính hợp lí

a) $\frac{7}{-25} + \frac{-18}{25} + \frac{4}{23} + \frac{5}{7} + \frac{19}{23}$

b) $\frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} + \frac{12}{19}$

c) $(-25) \cdot 125 \cdot 4 \cdot (-8) \cdot (-17)$

d) $\frac{7}{35} \cdot \frac{10}{19} + \frac{7}{35} \cdot \frac{9}{19} - \frac{2}{35}$

Câu 2: (3,0 điểm)

Tính giá trị các biểu thức sau:

a. $A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1.3} \right) \left(1 + \frac{1}{2.4} \right) \left(1 + \frac{1}{3.5} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{2015.2017} \right)$

b. $B = 2x^2 - 3x + 5$ với $|x| = \frac{1}{2}$.

c. $C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016} \right)^0$, biết $x - y = 0$.

Câu 3: (4,0 điểm)

1. Tìm x, y biết: $\left(2x - \frac{1}{6} \right)^2 + |3y + 12| \leq 0$.

2. Tìm x, y, z biết: $\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$ và $x + y + z = 18$.

Câu 4: (3,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên x, y biết: $x - 2xy + y - 3 = 0$.

2. Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$.

Tính $f(100)$.

Câu 5: (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao của CD và BE, K là giao của AB và DC.

a) Chứng minh rằng: $\widehat{ADC} = \widehat{ABE}$.

b) Chứng minh rằng: $\widehat{DIB} = 60^\circ$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

d) Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE.

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A, $A = 80^\circ$. Ở miền trong tam giác lấy điểm I sao cho $\angle IBC = 10^\circ, \angle ICB = 30^\circ$. Tính $\angle AIB$

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THẠCH ĐỒNG**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 25

(Đề thi có một trang)

Bài 1. (4,0 điểm).

a) Tính: $A = 1\frac{13}{15} \cdot (0,5)^2 \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - 1\frac{19}{60}\right) : 1\frac{23}{24}$

b) So sánh: 16^{20} và 2^{100}

Bài 2. (3,0 điểm).

a) Tìm x biết: $|2x - 7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

b) Tìm số tự nhiên n biết: $3^{-1} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^5$

Bài 3. (4,5 điểm).

a) Cho dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$

Tính giá trị biểu thức Q , biết $Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

b) Cho biểu thức $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ với x, y, z, t là các số

tự nhiên khác 0. Chứng minh $M^{10} < 1025$.

Bài 4. (6,5 điểm).

1) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, D là điểm thuộc đoạn BM (D khác B và M). Kẻ các đường thẳng BH, CI lần lượt vuông góc với đường thẳng AD tại H và I. Chứng minh rằng:

a) $BAM = ACM$ và $BH = AI$.

b) Tam giác MHI vuông cân.

2) Cho tam giác ABC có góc $\hat{A} = 90^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Tia phân giác của góc HAC cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của góc HAB cắt cạnh BC ở E. Chứng minh rằng $AB + AC = BC + DE$.

Bài 5. (2,0 điểm). Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$. Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn 2.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN YÊN MÔ**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 26

(Đề thi có một trang)

Câu 1: (6,0 điểm)

1. Thực hiện phép tính

a) $A = \frac{5}{15} + \frac{14}{25} - \frac{12}{9} + \frac{2}{7} + \frac{11}{25}$

b) $B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

2. Tìm x, y, z biết

a) $\left(3 - \frac{9}{10} - |x+2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$

b) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$

Câu 2: (3,0 điểm)

a) Tìm x, y nguyên thỏa mãn $3xy - 5 = x^2 + 2y$

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10

Câu 3: (3,0 điểm)

1. Cho đa thức $A(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$.

a) Chứng minh rằng $x = -1$ là nghiệm của $A(x)$ b) Tính giá trị biểu thức $A(x)$ khi $x = \frac{1}{2}$

Câu 4: (6,0 điểm) Cho ΔABC ($AB > AC$), M là trung điểm của BC. Đường thẳng đi qua M vuông góc với tia phân giác của góc BAC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại E và F (giao điểm của đường thẳng đó với tia phân giác g BAC là H). Chứng minh rằng:

a) $EH = HF$

b) $2BME = ACB - B$.

c) $\frac{FE^2}{4} + AH^2 = AE^2$.

d) $BE = CF$

Câu 5: (2,0 điểm) Giải bằng máy tính cầm tay

a) Tính giá trị của đa thức $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10}$ tại $x = 2,13$ (kết quả ghi dưới dạng số thập phân lấy trên màn hình).

b) Tìm 2 chữ số cuối của: $A = 2^{2010} + 2^{2011} + 2^{2012} + 2^{2013} + 2^{2014} + 2^{2015} + 2^{2016}$

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN NHƯ XUÂN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 27

(Đề thi có một trang)

Câu 1 (4,0 điểm):

1) Thực hiện phép tính: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$

2) Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

Cho biết $f(0) = 2014$; $f(1) = 2015$; $f(-1) = 2017$. Tính $f(-2)$.

Câu 2 (5,0 điểm): Tìm x, y biết:

1) $\left|x + \frac{1}{5}\right| - 4 = -2$

2) $2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}$

3) $|x + 5| + (3y - 4)^{2016} = 0$

4) $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và $xy = 40$

Câu 3 (4,0 điểm).

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho: $2xy + x - 2y = 4$

2) Số M được chia thành ba số tỉ lệ với $0,5$; $1\frac{2}{3}$; $2\frac{1}{4}$. Tìm số M biết rằng tổng bình

phương của ba số đó bằng 4660.

Câu 4 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M. Đường vuông góc với BE tại E cắt AC tại N.

1) Chứng minh: $\triangle MBD = \triangle NCE$.

2) Cạnh BC cắt MN tại I. Chứng minh I trung điểm của MN.

3) Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên đoạn BC.

Câu 5 (2,0 điểm):

1) Tìm số tự nhiên có ba chữ số. Biết rằng số đó chia hết cho 7 và tổng các chữ số đó bằng 14.

2) Cho tam giác ABC có $\angle BAC = \angle BCA = 80^\circ$. Ở miền trong của tam giác vẽ hai tia Ax và Cy cắt BC và BA lần lượt tại D và E. Cho biết $\angle CAD = 60^\circ$; $\angle ECA = 50^\circ$.

Tính số đo góc ADE

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN VŨ THU**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 28

(Đề thi có một trang)

Bài 1. 1. Thực hiện phép tính: $B = \frac{1}{-77^2} \cdot 7^4 \cdot (-11)^2 \cdot 77^5 \cdot \left(\frac{1}{7^2}\right)^2 : (7^3 \cdot 11^6)$

2. Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\frac{a-b+c}{2b} = \frac{c-a+b}{2a} = \frac{a-c+b}{2c}$

Tính giá trị biểu thức: $P = \left(1 + \frac{c}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{a}{c}\right)$

Bài 2 (5 điểm)

a) Tìm x biết: $\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}$

b) Tìm hình chữ nhật có kích thước các cạnh là số nguyên sao cho số đo diện tích bằng số đo chu vi.

c) Tìm các số nguyên dương $x; y; z$ thỏa mãn:

$$(x-y)^3 + (y-z)^2 + 2015 \cdot |x-z| = 2017$$

Bài 3 (3 điểm) Cho hàm số: $y = f(x) = x + \frac{3}{2}|x|$ (1)

a) Vẽ đồ thị hàm số (1).

b) Gọi E và F là hai điểm thuộc đồ thị hàm số (1) có hoành độ lần lượt là (-4) và $\frac{4}{5}$,

xác định tọa độ hai điểm E, F. Tìm trên trục tung điểm M để $EM+MF$ nhỏ nhất.

Bài 4 (6 điểm)

1. Cho tam giác ABC nhọn; vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là tam giác ABD và tam giác ACE.

a) Chứng minh $DC = BE$ và $DC \perp BE$.

b) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến ED và M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh A, M, H thẳng hàng.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$. Điểm I nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác ABC. Gọi M là chân đường vuông góc kẻ từ điểm I đến BC. Tính MB.

Bài 5 (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì tổng:

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$$
 không thể là một số nguyên.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HƯƠNG KHÊ**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2011-2012
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 29

(Đề thi có một trang)

Bài 1:

1) Tìm x , biết $|x-1| = \frac{2}{3}$;

2) Tính giá trị của biểu thức sau: $A = \frac{2x^2 + 3x - 1}{3x - 2}$ với $|x-1| = \frac{2}{3}$

Bài 2:

1) Tìm chữ số tận cùng của A biết $A = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$

2) Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{x+3}{x-2}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 3:

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thỏa mãn: $x.f(x+2) = (x^2-9).f(x)$.

1) Tính $f(5)$.

2) Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm.

Bài 4:

Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB dựng đoạn AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC dựng đoạn AF vuông góc với AC và $AF = AC$. Chứng minh rằng:

a) $FB = EC$

b) $EF = 2AM$

c) $AM \perp EF$.

Bài 5:

Cho a, b, c, d là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|$$

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN SƠN ĐỘNG**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 30

(Đề thi có một trang)

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2014-2015
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (4,0 điểm):Thực hiện phép tính:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right); \quad B = (0,25)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$

Câu 2. (6 điểm):

a. Tìm x biết: $|2x - 6| - 4x = 12$

b. Tìm x biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015}\right) \cdot x = \frac{2014}{1} + \frac{2013}{2} + \dots + \frac{2}{2013} + \frac{1}{2014}$

c. Chứng minh rằng: Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $\frac{4a+5b}{4a-5b} = \frac{4c+5d}{4c-5d}$

(Với a, b, c, d $\neq 0$; $4a \neq \pm 5b$; $4c \neq \pm 5d$)

Câu 3. (3,5 điểm):

Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc 5 cm/s, trên cạnh thứ ba với vận tốc 4 cm/s, trên cạnh thứ tư với vận tốc 3 cm/s. Hỏi độ dài cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 59 giây.

Câu 4. (5,5 điểm):

Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho BD = CE. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N.

a. Chứng minh rằng: DM = EN.

b. MN cắt BC tại I. Chứng minh I là trung điểm của MN.

c. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC.

Câu 5. (1 điểm):

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Chứng tỏ rằng: $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$.
Biết rằng $13a + b + 2c = 0$

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THANH SƠN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 31

(Đề thi có một trang)

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Tìm tập hợp các số nguyên x thỏa mãn $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) < x < \frac{1}{24} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3}\right)$.

b) Tìm các số a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}; \frac{b}{5} = \frac{c}{4}$ và $a - b + c = -49$.

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Tìm giá trị của m để đa thức $g(x) = x^4 + m^2x^3 + mx^2 + mx - 1$ có nghiệm là -1 .

b) Tìm tổng các hệ số của đa thức sau khi phá ngoặc và sắp xếp, biết:
 $f(x) = (3x^2 - 12x + 8)^{2013} \cdot (x^3 - 2x^2 + 3x - 3)^{2014}$.

c) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

Câu 3 (3,0 điểm).

Một xe tải chạy từ thành phố A đến hải cảng B gồm ba chặng đường dài bằng nhau, nhưng chất lượng mặt đường xấu tốt khác nhau nên vận tốc trên mỗi chặng lần lượt bằng 40; 24 và 60 (km/h). Biết tổng thời gian đi từ A đến B là 5 giờ, tính độ dài quãng đường AB?

Câu 4 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A, có $C = 30^\circ$, kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$. Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ $CE \perp AD$. Chứng minh rằng:

a) $\angle BAD = 60^\circ$;

b) EH song song với AC.

Câu 5 (4,0 điểm).

a) Tính giá trị của biểu thức $A = 1.3 + 2.4 + 3.5 + 4.6 + \dots + 48.50$.

b) Cho $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$. Chứng minh rằng: $B < \frac{3}{4}$.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG NGÀ THẮNG**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 32

(Đề thi có một trang)

Câu 1: (4,5 điểm).

a) Tính giá trị của biểu thức $A = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3}$

b) Tính giá trị của biểu thức $B = 2x^2 - 3x + 1$ với $|x| = \frac{1}{2}$.

c) Tìm 3 số x, y, z biết rằng: $\frac{x}{3} = \frac{y}{7}; \frac{y}{2} = \frac{z}{5}$ và $x + y + z = -110$.

Câu 2: (4,5 điểm).

a) Tìm tập hợp các số nguyên x , biết rằng:

$$4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 < x < \left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot \frac{31}{45} \right) : \left(-21\frac{1}{2} \right)$$

b) Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$

c) Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2015$ tại x, y thỏa mãn:
 $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$

Câu 3: (3,5 điểm). a) Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 18 và các chữ số của nó tỉ lệ theo 1: 2: 3.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho: $2^a + 37 = |b - 45| + b - 45$.

Câu 4: (6,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao của CD và BE, K là giao của AB và DC.

a) Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$.

b) Chứng minh rằng: góc $DIB = 60^\circ$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

d) Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE.

Câu 5: (1,5 điểm) Cho 20 số nguyên khác 0: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ có các tính chất sau:

* a_1 là số dương.

* Tổng của ba số viết liền nhau bất kì là một số dương.

* Tổng của 20 số đó là số âm.

Chứng minh rằng: $a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12}$.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TAM DƯƠNG**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2014-2015
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 33

(Đề thi có một trang)

Bài 1. (2,5 điểm)

a) Tính giá trị $A = 1000 - \{(-5)^3 \cdot (-2)^3 - 11 \cdot [7^2 - 5 \cdot 2^3 + 8(11^2 - 121)]\}$

b) Tìm x biết $\left(3 - \frac{9}{10} - |x + 2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$

c) Tìm x thỏa mãn $|x - 10|^{10} + |x - 11|^{11} = 1$

Bài 2. (3 điểm)

a) Tìm hai số dương khác nhau x, y biết rằng: Tổng, hiệu và tích của chúng lần lượt tỉ lệ nghịch với 35; 210 và 12.

b) Cho a, b, c là các số thực khác 0. Tìm các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn:

$$\frac{xy}{ay + bx} = \frac{yz}{bz + cy} = \frac{zx}{cx + az} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Bài 3. (2,5 điểm)

a) Tìm x, y nguyên thỏa mãn $3xy - 5 = x^2 + 2y$

b) Tìm số có bốn chữ số $\overline{abcd}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $\overline{ab}, \overline{ad}$ là hai số nguyên tố;

ii) $\overline{db} + c = b^2 + d$.

Bài 4. (2 điểm)

Cho tam giác ABC có $\hat{B} < 90^\circ$ và $\hat{B} = 2\hat{C}$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$ (với H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC), đường thẳng EH cắt AC ở D.

a) Chứng minh rằng: $DA = DC$.

b) Chứng minh rằng: $AE = HC$.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THANH CHƯƠNG**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 34

(Đề thi có một trang)

Câu 1.

- Chứng minh: $5^{2014} - 5^{2013} + 5^{2012}$ chia hết cho 105.
- Tìm số nguyên tố p sao cho $p + 2$ và $p + 4$ đều là số nguyên tố.

Câu 2. Tìm x biết :

- $|3 - 2x| = x + 1$
- $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$

Câu 3.

- Tìm $x; y; z$ biết $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$; $5x = 7z$ và $x - 2y + z = 32$.
- Cho $\frac{7x+5y}{3x-7y} = \frac{7z+5t}{3z-7t}$. Chứng minh: $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |x - 2013| + |2014 - x| + |x - 2015|$.

Câu 4.

Cho tam giác ABC cân ($AB = AC$). Trên cạnh BC lấy điểm D trên tia đối tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Gọi I là giao điểm của MN và BE.

- Biết $AB < BC$. Chứng minh: $\hat{A} > 60^\circ$.
- Chứng minh $IM = IN$
- Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua 1 điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN Ý YÊN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 35

(Đề thi có một trang)

Bài 1. (6 điểm)

1) Tính giá trị của biểu thức

$$A = (-1)^3 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \cdot (-7) \cdot \left(-\frac{1}{14}\right)$$

$$B = 2016 : \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} \cdot \frac{-1\frac{1}{6} + 0,875 - 0,7}{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}} \right)$$

2) Cho đa thức $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết $Q(x)$ chia hết cho 3 với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Chứng tỏ các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 3.

Bài 2. (4 điểm)

1) Biết $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$ (với $a, b, c \neq 0$).

Chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

2) Số M được chia thành ba phần tỉ lệ nghịch với 3; 5; 6. Biết rằng tổng các lập phương của ba phần đó là 10728. Hãy tìm số M.

Bài 3. (6 điểm) Cho tam giác ABC đều. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = \frac{1}{3}AB$. Tại D kẻ đường vuông góc với AB cắt cạnh BC tại E. Tại E kẻ đường vuông góc với BC cắt AC tại F.

- 1) Chứng minh $DF \perp AC$. Biết trong tam giác vuông cạnh đối diện với góc 30° thì bằng nửa cạnh huyền.
- 2) Chứng minh tam giác DEF đều.
- 3) Gọi G là trọng tâm của tam giác DEF. Chứng minh $GA = GB = GC$.

Bài 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC, trung tuyến AM và BE cắt nhau tại G. Chứng minh rằng nếu $\angle AGB \leq 90^\circ$ thì $AC + BC > 3AB$.

Bài 5. (2 điểm) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $C = \frac{22 - 3x}{4 - x}$ có giá trị lớn nhất.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THANH OAI**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 36

(Đề thi có một trang)

Câu 1: (5 điểm)

a) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$.

Hãy tính giá trị của biểu thức: $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

b) Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, a \neq \pm b, c \neq \pm d$.

Chứng minh: $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}}$

Câu 2: (6 điểm)

a) Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

Chứng minh rằng: Biểu thức sau có giá trị nguyên

$$A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$$

b) Tìm x biết: $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) Số A được chia thành ba phần số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A .

Câu 3: (2 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x-2013| + |x-3014| + |x-2015|$

Câu 4: (2 điểm) Tìm hai số dương biết tổng, hiệu, tích của chúng tỉ lệ nghịch với ba số 20; 120; 16.

Câu 5: (5 điểm) Cho tam giác ABC vuông ở A, có góc $C = 30^\circ$, đường cao AH. Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ CE vuông góc với AD. Chứng minh:

- a) Tam giác ABD là tam giác đều.
- b) $AH = CE$.
- c) HE song song với AC.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN ĐỨC PHỐ**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 37

(Đề thi có một trang)

Câu 1: (5 điểm)

a) Tính giá trị biểu thức $P = \left| a - \frac{1}{2014} \right| + \left| a - \frac{1}{2016} \right|$, với $a = \frac{1}{2015}$.

b) Tìm số nguyên x để tích hai phân số $\frac{6}{x+1}$ và $\frac{x-1}{3}$ là một số nguyên.

Câu 2: (5 điểm)

a) Cho $a > 2, b > 2$. Chứng minh $ab > a + b$

b) Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích của hình thứ nhất và diện tích của hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5, diện tích hình thứ hai và diện tích hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8, hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27 cm, hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là 24 cm. Tính diện tích của mỗi hình chữ nhật đó.

Câu 3: (3 điểm)

Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho ME=MA. Chứng minh rằng:

a/ $AC=EB$ và $AC \parallel BE$

b/ Gọi I là một điểm trên AC, K là một điểm trên EB sao cho: AI=EK. Chứng minh: I, M, K thẳng hàng.

c/ Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết góc HBE bằng 50° ; góc MEB bằng 25° , tính các góc HEM và BME ?

Câu 4: (2 điểm)

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Câu 5: (5 điểm)

Cho $\triangle ABC$ nhọn với $\angle BAC = 60^\circ$. Chứng minh rằng:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB.AC$$

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN YÊN ĐỊNH**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2010-2011
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 38

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2 điểm) Tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = \frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{0,6 - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{4 - \frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{0,16 - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}{5}$$

$$B = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{49}} + \frac{1}{49} - \frac{1}{(7\sqrt{7})^2}}{\frac{\sqrt{64}}{2} - \frac{4}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 - \frac{4}{343}}$$

Câu 2: (2 điểm) Tìm các số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ biết

$$\frac{a_1 - 1}{9} = \frac{a_2 - 2}{8} = \frac{a_3 - 3}{7} = \dots = \frac{a_9 - 9}{1} \quad \text{và} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 = 90$$

Câu 3: (4 điểm) a) Tìm x, y thoả mãn: $|x^2 + 2x| + |y^2 - 9| = 0$

b) Tìm x, y, z thoả mãn: $\sqrt{(x - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(y + \sqrt{2})^2} + |x + y + z| = 0$

Câu 4. (2 điểm) Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ chứng minh rằng: $\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$

Câu 5. (3 điểm)

a. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{với } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{với } x < -1 \end{cases}$

- Viết $f(x)$ dưới dạng 1 biểu thức.

- Tìm x khi $f(x) = 2$.

b. Cho hai đa thức $P(x) = x^2 + 2mx + m^2$ và $Q(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2$

Tìm m biết $P(1) = Q(-1)$

Câu 6. (2 điểm) Tìm x, y để $C = -18 - |2x - 6| - |3y + 9|$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 7. (2 điểm) Một ô tô chạy từ A đến B với vận tốc 65km/h, cùng lúc đó một xe máy chạy từ B đến A với vận tốc 40km/h. Biết khoảng cách AB là 540km và M là trung điểm của AB. Hỏi sau khi khởi hành bao lâu thì ô tô cách M một khoảng bằng $\frac{1}{2}$ khoảng cách từ xe máy đến M.

Câu 8. (3 điểm) Cho ΔABC vuông cân ở A, M là trung điểm của BC, điểm E nằm giữa M và C. Kẻ BH, CK vuông góc với AE (H và K thuộc đường thẳng AE). Chứng minh rằng:

a) $BH = AK$.

b) $\Delta MBH = \Delta MAK$.

c) ΔMHK là tam giác vuông cân.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN SƠN DƯƠNG**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 39

(Đề thi có một trang)

Câu 1. Tìm x biết:

a) $3^{x-1} + 5.3^{x-1} = 162$

b) $3x + x^2 = 0$

c) $(x-1)(x-3) < 0$

Câu 2. a) Tìm ba số x, y, z thỏa mãn: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -100$

b) Cho $\frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2d} = \frac{d}{2a}$ (a, b, c, d > 0)

Tính $A = \frac{2011a - 2010b}{c + d} + \frac{2011b - 2010c}{a + d} + \frac{2011c - 2010d}{a + b} + \frac{2011d - 2010a}{b + c}$

Câu 3. a) Tìm cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x + y + xy = 2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x}$ (với x nguyên)

Câu 4. a) Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu f(x) nhận 1 và -1 là nghiệm thì a và c là 2 số đối nhau.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (|x-3|+2)^2 + |y+3| + 2007$

Câu 5. Cho ΔABC vuông tại A. M là trung điểm BC, trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $AM = MD$. Gọi I và K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống AD, N là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AC.

a) Chứng minh rằng $BK = CI$ và $BK \parallel CI$.

b) Chứng minh $KN < MC$.

c) ΔABC thỏa mãn thêm điều kiện gì để $AI = IM = MK = KD$.

d) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống BC. Chứng minh rằng các đường thẳng BI, DH, MN đồng quy.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOÀI NHƠN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 40

(Đề thi có một trang)

Bài 1: (4,0 điểm)

a) So sánh: $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1$ và $\sqrt{99}$.

b) Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$.

c) Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$ và

$$P = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}.$$

Tính $(S - P)^{2016}$.

Bài 2: (4,0 điểm)

a) Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm hợp số r.

b) Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$

Bài 3: (6,0 điểm)

a) Cho x; y; z $\neq 0$ và $x - y - z = 0$. Tính giá trị biểu thức $B = \left(1 - \frac{z}{x}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right)$

b) Cho $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

c) Cho biểu thức $M = \frac{5-x}{x-2}$. Tìm x nguyên để M có giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: (3,0 điểm) Cho $\angle xAy = 60^\circ$ vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên tia Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C. Kẻ $BH \perp Ay$ tại H, $CM \perp Ay$ tại M, $BK \perp AC$ tại K. Chứng minh:

a) $KC = KA$

b) $BH = \frac{AC}{2}$

c) $\triangle KMC$ đều.

Bài 5: (3,0 điểm) Cho $\triangle ABC$ có $B = 2.C < 90^\circ$. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Trên tia AB lấy điểm D sao cho $AD = HC$. Chứng minh rằng đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG HỒNG HÀ**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 41

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (3 điểm)

a. Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{2^{12} \cdot 13 + 2^{12} \cdot 65}{2^{10} \cdot 104} + \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4}$

b. Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015}$. Tìm số tự nhiên n biết rằng $2A + 3 = 3^n$

Câu 2. (5 điểm)

a. Tìm các số $x; y; z$ biết rằng: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{y+x-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

b. Tìm x : $\frac{x+4}{2012} + \frac{x+3}{2013} = \frac{x+2}{2014} + \frac{x+1}{2015}$

c. Tìm x để biểu thức sau nhận giá trị dương: $x^2 + 2016x$

Câu 3. (5 điểm)

a. Cho $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$. Tìm số nguyên x để A là số nguyên

b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3}$

c. Tìm số nguyên x, y sao cho $x - 2xy + y = 0$

Câu 4. (5 điểm)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

a. $AC = EB$ và $AC \parallel BE$

b. Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng

c. Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $HBE = 50^\circ$; $MEB = 25^\circ$.

Tính HEM và BME

Câu 5. (2 điểm)

Từ điểm I tùy ý trong tam giác ABC , kẻ IM, IN, IP lần lượt vuông góc với BC, CA, AB . Chứng minh rằng: $AN^2 + BP^2 + CM^2 = AP^2 + BM^2 + CN^2$

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG TIỀN HẢI**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 42

(Đề thi có một trang)

Bài 1 (5 điểm)

a) Thực hiện phép tính:

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

b) Tính giá trị biểu thức:

$$B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + \dots + 17.18.19$$

c) Tìm một số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu tăng chữ số hàng trăm thêm n đơn vị đồng thời giảm chữ số hàng chục và giảm chữ số hàng đơn vị đi n đơn vị thì được một số có 3 chữ số gấp n lần số có 3 chữ số ban đầu.

Bài 2 (3 điểm)

a) Tìm các số x, y, z biết rằng: $3x = 4y$, $5y = 6z$ và $xyz = 30$.

b) Tìm x biết: $\left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = \left| -1,6 + \frac{3}{5} \right|$

Bài 3 (3 điểm)

1) Cho hàm số $y = f(x) = (m - 1)x$

a) Tìm m biết: $f(2) - f(-1) = 7$

b) Cho $m = 5$. Tìm x biết $f(3 - 2x) = 20$

2) Cho các đơn thức $A = -\frac{1}{2}x^2yz^2$, $B = -\frac{3}{4}xy^2z^2$, $C = x^3y$

Chứng minh rằng các đơn thức A, B, C không thể cùng nhận giá trị âm.

Bài 4 (7 điểm) Cho $\triangle ABC$ nhọn có góc A bằng 60° . Phân giác ABC cắt AC tại D, phân giác ACB cắt AB tại E. BD cắt CE tại I.

a) Tính số đo góc BIC.

b) Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = BE$. Chứng minh $\triangle CID = \triangle CIF$.

c) Trên tia IF lấy điểm M sao cho $IM = IB + IC$. Chứng minh $\triangle BCM$ là tam giác đều.

Bài 5 (2 điểm) Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n = 2^n$

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THỊ XÃ PHÚ THỌ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2010-2011
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 43

(Đề thi có một trang)

Bài 1: (2.0 điểm)

Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ chứng minh rằng:

a) $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$

b) $\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$

Bài 2: (2,0 điểm)

Xét tổng gồm n số hạng $S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng $S_n < 2$

Bài 3: (2.0 điểm)

Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc 5m/s, trên cạnh thứ ba với vận tốc 4m/s, trên cạnh thứ tư với vận tốc 3m/s. Hỏi độ dài cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 59 giây

Bài 4: (2.0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của góc ABD cắt AC tại M. Chứng minh:

- a) Tia AD là phân giác của góc BAC
- b) $AM = BC$

Bài 5: (2.0 điểm):

Cho tam giác ABC cân tại A, $A = 80^\circ$. Ở miền trong tam giác lấy điểm I sao cho $IBC = 10^\circ$, $ICB = 30^\circ$. Tính AIB

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG DÂN HÒA**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 44

(Đề thi có một trang)

Câu 1: (6 điểm) Tìm x , biết:

a, $\frac{64}{(-2)^x} = (-16)^2 : 4^3$

b, $\frac{6}{x^2 + 2} + \frac{12}{x^2 + 8} = 3 - \frac{7}{x^2 + 3}$

c, $|x - 2| + |3 - x| = 11$

Câu 2: (4 điểm)

1, Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng ta có các tỉ lệ thức sau (giả thiết các tỉ lệ thức đều có nghĩa).

a, $\frac{4a - 3b}{a} = \frac{4c - 3d}{c}$

b, $\frac{(a - b)^2}{(c - d)^2} = \frac{3a^2 + 2b^2}{3c^2 + 2d^2}$

2, Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: $x + y + 2xy = 83$

Câu 3: (4 điểm)

a, Hai xe máy cùng khởi hành 1 lúc từ A và B cách nhau 11 km để đi đến C (3 địa điểm A,B,C cùng ở trên một đường thẳng) vận tốc của người đi từ A là 20 km/h, của người đi từ B là 24 km/h. Tính quãng đường mỗi người đã đi biết họ đến C cùng 1 lúc.

b, Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Chứng tỏ rằng: $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$ biết $13a + b + 2c = 0$

Câu 4: (5 điểm) Cho $\triangle ABC$ có góc B và góc C là hai góc nhọn. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$, trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AC$.

a) Chứng minh rằng: $BE = CD$

b) Lấy M là trung điểm của BE, N là trung điểm của CD. Chứng minh M, A, N thẳng hàng.

c) Ax là tia bất kì nằm giữa 2 tia AB và AC. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B và C trên tia Ax. Chứng minh $BH + CK \leq BC$

d) Xác định vị trí của tia Ax để tổng $BH + CK$ có giá trị lớn nhất.

Câu 5: (1 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{3|x| + 2}{4|x| - 5}$

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để A đạt GTLN, tìm GTLN đó.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THỊ XÃ TRIỆU SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2014-2015
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 45

(Đề thi có một trang)

Câu 1: (4,0 điểm)

1. Thực hiện phép tính: $A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$.

2. Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$ và $2x^3 - 1 = 15$. Tính $B = x + y + z$.

Câu 2: (4,0 điểm)

1. Tìm x, y biết: $x(x-y) = \frac{3}{10}$ và $y(x-y) = -\frac{3}{50}$.

2. Tìm x biết: $(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$.

Câu 3: (5,0 điểm)

1. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{7n-8}{2n-3}$ có giá trị lớn nhất.

2. Cho đa thức $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Biết rằng, $p(x) : 5$ với mọi x nguyên. Chứng minh rằng a, b, c, d đều chia hết cho 5.

3. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Câu 4: (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D (D khác B, C). Trên tia đối của tia CB , lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt đường thẳng AC tại N , MN cắt BC tại I .

1. Chứng minh $DM = EN$.

2. Chứng minh $IM = IN, BC < MN$.

3. Gọi O là giao của đường phân giác góc A và đường thẳng vuông góc với MN tại I .

Chứng minh rằng $\triangle BMO = \triangle CNO$. Từ đó suy ra điểm O cố định.

Câu 5: (2,0 điểm)

Cho các số thực dương a và b thỏa mãn: $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = a^{2014} + b^{2015}$.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THỊ XÃ TRIỆU SƠN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 46

(Đề thi có một trang)

Câu 1. Tìm x biết:

a) $3^{x-1} + 5.3^{x-1} = 162$

b) $3x + x^2 = 0$

c) $(x - 1)(x - 3) < 0$

Câu 2. a) Tìm ba số x, y, z thỏa mãn: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -100$

b) Cho $\frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2d} = \frac{d}{2a}$ (a, b, c, d > 0)

Tính $A = \frac{2011a - 2010b}{c + d} + \frac{2011b - 2010c}{a + d} + \frac{2011c - 2010d}{a + b} + \frac{2011d - 2010a}{b + c}$

Câu 3. a) Tìm cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x + y + xy = 2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x}$ (với x nguyên)

Câu 4.

a) Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu f(x) nhận 1 và -1 là nghiệm thì a và c là 2 số đối nhau.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (|x - 3| + 2)^2 + |y + 3| + 2007$

Câu 5. Cho ΔABC vuông tại A. M là trung điểm BC, trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $AM = MD$. Gọi I và K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống AD, N là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AC.

a) Chứng minh rằng $BK = CI$ và $BK \parallel CI$.

b) Chứng minh $KN < MC$.

c) ΔABC thỏa mãn thêm điều kiện gì để $AI = IM = MK = KD$.

d) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống BC. Chứng minh rằng các đường thẳng BI, DH, MN đồng quy.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG HOÀNG PHÚ**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 47

(Đề thi có một trang)

Câu 1 (4 điểm):

a) Thực hiện phép tính: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^2 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

b) Chứng minh rằng : $\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$

c) Tính: $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 98^2$

d) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 chứng minh rằng: $p^2 - 1$ chia hết cho 24

Câu 2 (3 điểm): a) Tìm x biết $\left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| (-3, 2) + \frac{2}{5} \right|$

b) Cho $C = \frac{m^3 + 3m^2 + 2m + 5}{m(m+1)(m+2) + 6}$ với $m \in \mathbb{N}$ Chứng minh C là số hữu tỉ

c) Cho $M = (x - 1)(x + 2)(3 - x)$. Tìm x để $M < 0$

Câu 3 (4 điểm): a) Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ chứng minh rằng: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$

b) Tìm các giá trị nguyên của x và y biết: $x^2 - y^2 = 5$

Câu 4 (6 điểm):

Cho tam giác ABC cả $BAC = 75^\circ$, $ABC = 35^\circ$. Phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại D . Đường thẳng qua A và vuông góc với AD cắt tia BC tại E . Gọi M là trung điểm của DE . Chứng minh rằng:

a) Tam giác ACM là tam giác cân.

b) $AB < \frac{AD + AE}{2}$.

c) Chu vi tam giác ABC bằng độ dài đoạn thẳng BE .

Câu 5 (2 điểm):

a). Tìm một số có 3 chữ số, biết rằng số đó chia hết cho 18 và các chữ số của nó tỉ lệ với 1, 2 và 3.

b). Cho $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ Tìm x để $f(x) = 0$

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN LÂM THAO**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 48

(Đề thi có 02 trang)

I. Phần trắc nghiệm khách quan: (6 điểm)

Câu 1: Giá trị của x trong biểu thức $(\sqrt{x} - 1)^2 = 0,25$ là:

- A. $\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}; -\frac{9}{4}$ C. $\frac{9}{4}; -\frac{1}{4}$ D. $-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$

Câu 2: Cho góc $xOy = 50^\circ$, điểm A nằm trên Oy . Qua A vẽ tia Am . Để Am song song với Ox thì số đo của góc OAm là:

- A. 50° B. 130° C. 50° và 130° D. 80°

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi $x > 1$. Biết $f(n) = (n - 1) \cdot f(n - 1)$ và $f(1) = 1$. Giá trị của $f(4)$ là:

- A. 3 B. 5 C. 6 D. 1

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại B , $AB = 6$, $\hat{A} = 30^\circ$. Phân giác góc C cắt AB tại D . Khi đó độ dài đoạn thẳng BD và AD lần lượt là:

- A. 2; 4 B. 3; 3 C. 4; 2 D. 1; 5

Câu 5: Cho $a^{2m} = -4$. Kết quả của $2a^{6m} - 5$ là:

- A. -123 B. -133 C. 123 D. -128

Câu 6: Cho tam giác DEF có $\angle E = \angle F$. Tia phân giác của góc D cắt EF tại I . Ta có:

- A. $\triangle DIE = \triangle DIF$ B. $DE = DF$, $\angle IDE = \angle IDF$
C. $IE = IF$; $DI = EF$ D. Cả A, B, C đều đúng

Câu 7: Biết $a + b = 9$. Kết quả của phép tính $\overline{0,a(b)} + \overline{0,b(a)}$ là:

- A. 2 B. 1 C. 0,5 D. 1,5

Câu 8: Cho $(a - b)^2 + 6a \cdot b = 36$. Giá trị lớn nhất của $x = a \cdot b$ là:

- A. 6 B. -6 C. 7 D. 5

Câu 9: Cho tam giác ABC , hai đường trung tuyến BM , CN . Biết $AC > AB$. Khi đó độ dài hai đoạn thẳng BM và CN là:

- A. $BM \leq CN$ B. $BM > CN$ C. $BM < CN$ D. $BM = CN$

Câu 10: Điểm thuộc đồ thị hàm số $y = -2x$ là:

- A. $M(-1; -2)$ B. $N(1; 2)$ C. $P(0; -2)$ D. $Q(-1; 2)$

Câu 11: Biết rằng lãi suất hàng năm của tiền gửi tiết kiệm theo mức 5% năm là một hàm số theo số tiền gửi: $i = 0,005p$. Nếu tiền gửi là 175000 thì tiền lãi sẽ là:

- A. 8850 đ B. 8750 đ C. 7850 đ D. 7750 đ

Câu 12: Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Số đo của góc BDC là:

- A. 50° B. 70° C. 30° D. 80°

II. Phần tự luận (14 điểm)**Câu 1.(3 điểm)**

A, Chứng tỏ rằng: $M = 75.(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2

B, Cho tích $a.b$ là số chính phương và $(a,b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương.

Câu 2.(4 điểm)

2.1 Cho đa thức $A = 2x.(x - 3) - x(x - 7) - 5(x - 403)$

Tính giá trị của A khi $x = 4$. Tìm x để $A = 2015$

2.2 Học sinh khối 7 của một trường gồm 3 lớp tham gia trồng cây. Lớp 7A trồng toàn bộ 32,5% số cây. Biết số cây lớp 7B và 7C trồng được theo tỉ lệ 1,5 và 1,2. Hỏi số cây cả 3 lớp trồng được là bao nhiêu, biết số cây của lớp 7A trồng được ít hơn số cây của lớp 7B trồng được là 120 cây.

Câu 3.(5 điểm)

1. Cho đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax và By lần lượt vuông góc với AB tại A và B . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia Ax lấy điểm C và trên tia By lấy điểm D sao cho góc COD bằng 90° .

a) Chứng minh rằng: $AC + BD = CD$.

b) Chứng minh rằng: $AC.BD = \frac{AB^2}{4}$

2. Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H . Chứng minh rằng:

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Câu 4.(2 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của A , biết :

$$A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$$

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN NGHĨA ĐÀN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2011-2012
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 49

(Đề thi có một trang)

Bài 1. (4 điểm).

a) Thực hiện phép tính:

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} + \frac{16^3 \cdot 3^{10} + 120 \cdot 6^9}{4^6 \cdot 3^{12} + 6^{12}}$$

b) Cho đa thức $P(x) = x^{2012} - 2011x^{2011} - 2011x^{2010} - \dots - 2011x^2 - 2011x + 1$
Tính $P(2012)$

Bài 2. (5 điểm). Tìm x, y, z biết :

a) $2012 = |x - 2010| + |x - 2008|$

b) $(x - 3)^x - (x - 3)^{x+2} = 0$

c) $\frac{3x - 2y}{5} = \frac{2z - 5x}{3} = \frac{5y - 3z}{2}$ và $x + y + z = 50$

Bài 3. (3 điểm)

a) Cho dãy tỷ số bằng nhau:

$$\frac{2012a + b + c + d}{a} = \frac{a + 2012b + c + d}{b} = \frac{a + b + 2012c + d}{c} = \frac{a + b + c + 2012d}{d}$$

$$\text{Tỷ số } M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$

b) Cho a, b là các số nguyên thỏa mãn $(7a - 21b + 5)(a - 3b + 1) : 7$

Chứng minh rằng $43a + 11b + 15 : 7$

Bài 4. (2 điểm). Cho biểu thức : $A = |x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014|$.

Tìm x để biểu thức A có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó

. Bài 5. (6 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A . M là một điểm thuộc cạnh BC . Qua M dựng các đoạn thẳng MD, ME sao cho AB là đường trung trực của đoạn thẳng MD và AC là đường trung trực của đoạn thẳng ME .

a) Với điểm M không trùng với điểm B và C .

Chứng minh rằng : $AM = AD = AE$

b) Với M bất kỳ. Chứng minh rằng : Ba điểm A, D, E thẳng hàng

c) Cho tam giác ABC cố định. Tìm vị trí của điểm M trên cạnh BC sao cho DE có độ dài ngắn nhất.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BẮC GIANG**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 7 THCS NĂM HỌC 2011-2012
MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 50

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

3) Rút gọn: $A = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \right) : \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{12} \right)$.

4) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 2012| + |x - 2013|$ với x là số tự nhiên.

Câu 2. (5,0 điểm)

1) Tìm x biết $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$.

2) Ba bạn An, Bình và Cường có tổng số viên bi là 74. Biết rằng số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6; số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5. Tính số viên bi của mỗi bạn.

Câu 3. (4,0 điểm)

3) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 + 2012$ là hợp số.

4) Cho n là số tự nhiên có hai chữ số. Tìm n biết $n+4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

Câu 4. (6,0 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A và có cả ba góc đều là góc nhọn.

1) Về phía ngoài của tam giác vẽ tam giác ABE vuông cân ở B. Gọi H là trung điểm của BC, trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho $AI = BC$. Chứng minh hai tam giác ABI và BEC bằng nhau và $BI \perp CE$.

2) Phân giác của các góc ABC, BDC cắt AC, BC lần lượt tại D, M. Phân giác của góc BDA cắt BC tại N. Chứng minh rằng: $BD = \frac{1}{2}MN$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$ và $P = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$.
Tính $(S - P)^{2013}$.

Hết

Họ và tên:Số báo danh:.....

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đề số 1.

Câu 1. a) Ta có:
$$A = \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-\frac{53}{100} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}}$$

$$= \frac{3\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right)}{-\frac{53}{100} - 5\left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right)} + \frac{3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}{5\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)} = \frac{3\left(\frac{165 - 132 + 120 + 110}{1320}\right)}{-\frac{53}{100} - 5\left(\frac{-66 + 60 + 55}{660}\right)} + \frac{3}{5}$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{263}{1320}}{-\frac{53}{100} - 5 \cdot \frac{49}{660}} + \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot \frac{263}{1320}}{\frac{-1749 - 1225}{3300}} + \frac{3}{5} = \frac{3945}{-5948} + \frac{3}{5} = \frac{-1881}{29740}$$

b) Ta có: $\sqrt{50} > \sqrt{49} = 4$; $\sqrt{26} > \sqrt{25} = 5$

Vậy: $\sqrt{50} + \sqrt{26} + 1 > 7 + 5 + 1 = 13 = \sqrt{169} > \sqrt{168}$

Câu 2. a) Nếu $x > 2$ ta có: $x - 2 + 2x - 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 6$

Nếu $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ ta có: $2 - x + 2x - 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -2$ loại

Nếu $x < \frac{3}{2}$ ta có: $2 - x + 3 - 2x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$

Vậy: $x = 6$; $x = \frac{4}{5}$

b) Ta có: $xy + 2x - y = 5 \Leftrightarrow x(y+2) - (y+2) = 3$

$\Leftrightarrow (y+2)(x-1) = 3.1 = 1.3 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$

$y + 2$	3	1	-1	-3
$x - 1$	1	3	-3	-1
x	2	4	-2	0
y	1	-1	-3	-5

c) Từ: $2x = 3y$; $4y = 5z \Rightarrow 8x = 12y = 15z$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{8}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{15}} = \frac{4x}{\frac{1}{2}} = \frac{3y}{\frac{1}{4}} = \frac{5z}{\frac{1}{3}} = \frac{4x - 3y + 5z}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{7}{\frac{1}{12}} = 12$$

$$\Rightarrow x = 12 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}; y = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1; z = 12 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{5}$$

Câu 3. a) Đa thức bậc hai cần tìm có dạng: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Ta có : $f(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$.

$$f(x) - f(x-1) = 2ax - a + b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm là: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$ (c là hằng số tùy ý).

Áp dụng:

+ Với $x = 1$ ta có : $1 = f(1) - f(0)$.

+ Với $x = 2$ ta có : $1 = f(2) - f(1)$.

.....

+ Với $x = n$ ta có : $n = f(n) - f(n-1)$.

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = f(n) - f(0) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + c - c = \frac{n(n+1)}{2}.$$

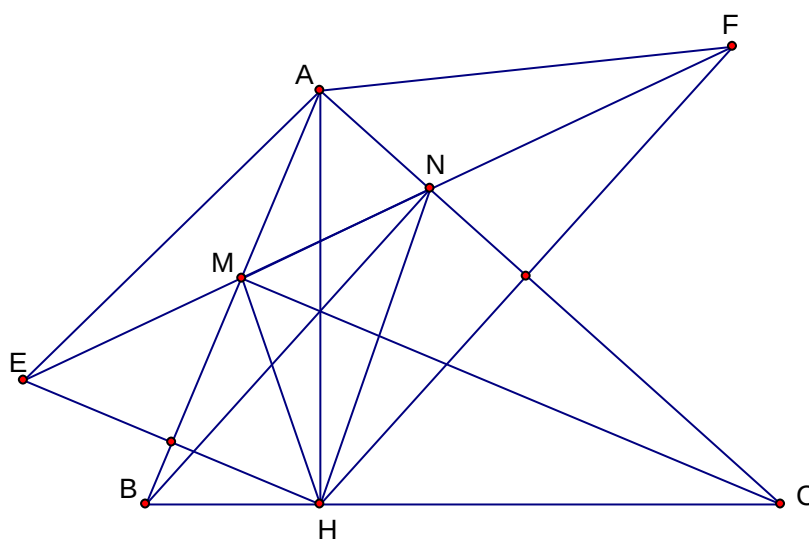
b) Ta có: $\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$

$$\Leftrightarrow \frac{2abz - 3acy}{a^2} = \frac{6bcx - 2abz}{4b^2} = \frac{3acy - 6bcx}{9c^2} = \frac{2abz - 3acy + 6bcx - 2abz + 3acy - 6bcx}{a^2 + 4b^2 + 9c^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2bz - 3cy = 0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2); \text{ Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$$

Câu 5.



a) Vì AB là trung trực của EH nên ta có: $AE = AH$ (1)

Vì AC là trung trực của HF nên ta có: $AH = AF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AE = AF$

b) Vì $M \in AB$ nên MB là phân giác $EMH \Rightarrow MB$ là phân giác ngoài góc M của tam giác MNH

Vì $N \in AC$ nên NC là phân giác $FNH \Rightarrow NC$ là phân giác ngoài góc N của tam giác MNH

Do MB; NC cắt nhau tại A nên HA là phân giác trong góc H của tam giác HMN hay HA là phân giác của MHN .

c) Ta có $AH \perp BC$ (gt) mà HM là phân giác $MHN \Rightarrow HB$ là phân giác ngoài góc H của tam giác HMN

MB là phân giác ngoài góc M của tam giác HMN (cmt) $\Rightarrow NB$ là phân giác trong góc N của tam giác HMN

$\Rightarrow BN \perp AC$ (Hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau). $\Rightarrow BN \parallel HF$ (cùng vuông góc với AC)

Chứng minh tương tự ta có: $EH \parallel CM$

Đề số 2

Câu 1.

a) Ta có:

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{2^2 \cdot 3^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{125 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 14^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3}$$

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^5} \cdot \frac{3-1}{3+1} - \frac{5^{10} \cdot 7^3}{5^9 \cdot 7^3} \cdot \frac{1-7}{1+2^3}$$

$$A = \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{5 \cdot (-6)}{9}$$

$$A = \frac{1}{6} - \frac{-10}{3} = \frac{7}{2}$$

$$\text{b) } 4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + \dots + 17.18.19.(20-16)$$

$$4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - 2.3.4.5 + 17.18.19.20 - 16.17.18.19$$

$$4B = 17.18.19.20$$

$$B = 17.18.19.5 = 29070$$

c) Gọi số có 3 chữ số cần tìm là $\overline{abc}$ (a, b, c là STN có 1 chữ số, $a \neq 0$)

Theo bài ra ta có: $\overline{(a+n)(b-n)(c-n)} = n \cdot \overline{abc}$

$$\Rightarrow 100(a+n) + 10(b-n) + (c-n) = n(100a + 10b + c)$$

$$\Rightarrow 100a + 100n + 10b - 10n + c - n = 100an + 10bn + cn$$

$$\Rightarrow 100(n-1)a + 10(n-1)b + (n-1)c = 89n$$

$$\Rightarrow 89n : n-1 \text{ mà } (89; n-1) = 1 \text{ nên } n : n-1$$

Tìm được $n = 2$

Số có 3 chữ số cần tìm là 178

Câu 2. Ta có:

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3}; \frac{y}{6} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 8k \\ y = 6k \\ z = 5k \end{cases}$$

$$xyz = 30 \Rightarrow 8k.6k.5k = 30 \Rightarrow 240k^3 = 30 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 4, y = 3, z = \frac{5}{2}$$

b) Ta có:

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = \left| -1,6 + \frac{3}{5} \right|$$

$$\Rightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = \left| -\frac{8}{5} + \frac{3}{5} \right|$$

$$\Rightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Câu 3.

1) a) Vì $f(2) - f(-1) = 7 \Rightarrow (m-2).2 - (m-1).(-1) = 7$

$$\Rightarrow 2m - 4 + m - 1 = 7$$

$$\Rightarrow 3m - 5 = 7 \Rightarrow m = 4$$

b) Với $m = 5$ ta có hàm số $y = f(x) = 4x$

$$\text{Vì } f(3-2x) = 20 \Rightarrow 4(3-2x) = 20$$

$$\Rightarrow 12 - 8x = 20 \Rightarrow x = -1$$

2) Giả sử cả 3 đơn thức A, B, C cùng có giá trị âm

$$\Rightarrow A.B.C \text{ có giá trị âm} \quad (1)$$

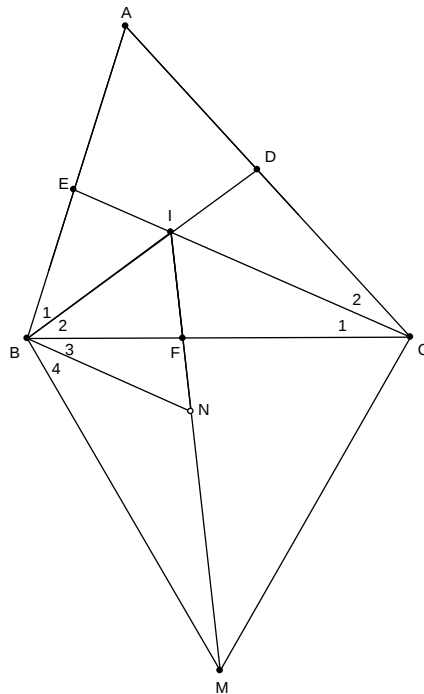
$$\text{Mặt khác: } A.B.C = \left(-\frac{1}{2} x^2 y z^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{4} x y^2 z^2\right) \cdot x^3 y = \frac{3}{8} x^6 y^4 z^4$$

$$\text{Vì } \frac{3}{8} x^6 y^4 z^4 \geq 0 \quad \forall x, y \Rightarrow A.B.C \geq 0 \quad \forall x, y \quad (2)$$

Ta thấy (1) mâu thuẫn với (2) $\Rightarrow$ điều giả sử sai.

Vậy ba đơn thức $A = -\frac{1}{2}x^2yz^2$, $B = -\frac{3}{4}xy^2z^2$, $C = x^3y$ không thể cùng có giá trị âm.

Câu 4.



a) BD là phân giác của góc ABC nên $B_1 = B_2 = \frac{1}{2} \angle ABC$

CE là phân giác của góc ACB nên $C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \angle ACB$

Mà tam giác ABC có $A+B+C = 180^\circ$ suy ra $60^\circ + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle ABC + \angle ACB = 120^\circ \Rightarrow B_2 + C_1 = 60^\circ \Rightarrow \angle BIC = 120^\circ$$

b) $\triangle BIE = \triangle BIF$ (c.g.c) $\Rightarrow BIE = BIF$

$$\angle BIC = 120^\circ \Rightarrow BIE = 60^\circ \Rightarrow BIE = BIF = 60^\circ$$

$$\text{Mà } BIE + BIF + CIF = 180^\circ \Rightarrow CIF = 60^\circ$$

$$\angle CID = BIE = 60^\circ \text{ (đ.đ)} \Rightarrow CIF = CID = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CID = \triangle CIF \text{ (g.c.g)}$$

c) Trên đoạn IM lấy điểm N sao cho $IB = IN \Rightarrow NM = IC$

$$\Rightarrow \triangle BIN \text{ đều} \Rightarrow BN = BI \text{ và } \angle BNM = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BNM = \triangle BIC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BM = BC \text{ và } B_2 = B_4 \Rightarrow \triangle BCM \text{ đều}$$

Câu 5.

$$\text{Đặt } S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n$$

$$S = 2S - S = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n)$$

$$S = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n)$$

$$\text{Đặt } T = 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n. \text{ Tính được } T = 2T - T = 2^{n-1} - 2^3$$

$$\Rightarrow S = n.2^{n+1} - 2^3 - 2^{n-1} + 2^3 = (n-1).2^{n+1}$$

$$\Rightarrow (n-1).2^{n+1} = 2^{n+11} \Rightarrow n-1 = 2^{10} \Rightarrow n = 2^{10} + 1 = 1025$$

Đề số 3

Câu 1.

Vì x, y, z là các số khác 0 và $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{z} = \frac{x}{y}; \frac{z}{x} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$ áp

dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau $\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x = y = z$

Câu 2.

a) $5^x + 5^{x+2} = 650$

$$\Leftrightarrow 5^x (1+5^2) = 650$$

$$\Leftrightarrow 5^x \cdot 26 = 650$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 25$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 5^2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

b) Ta có $(3x - 33)^{2008} \geq 0$

$$|y - 7|^{2009} \geq 0$$

$$\text{Suy ra } (3x - 33)^{2008} + |y - 7|^{2009} \geq 0$$

$$\text{Mà } (3x - 33)^{2008} + |y - 7|^{2009} \leq 0 \text{ (Theo đề bài)}$$

$$\text{Nên } (3x - 33)^{2008} + |y - 7|^{2009} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 33)^{2008} = 0 \text{ và } |y - 7|^{2009} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 11 \text{ và } y = 7$$

Câu 3.

Ta có: $f(0) = c; f(1) = a + b + c; f(-1) = a - b + c$

$$+) f(0) : 3 \Rightarrow c : 3$$

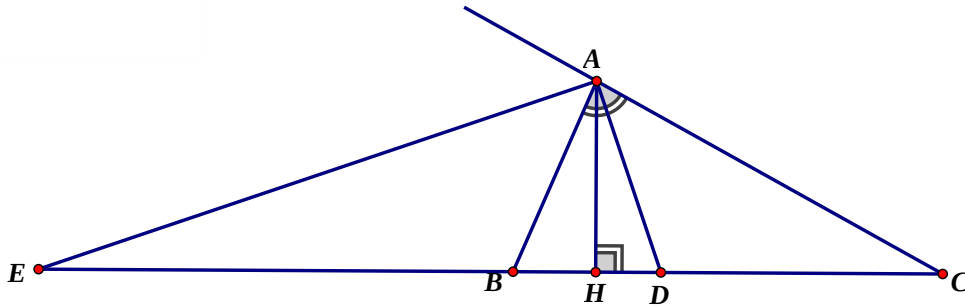
$$+) f(1) : 3 \Rightarrow a + b + c : 3 \Rightarrow a + b : 3(1)$$

$$+) f(-1) : 3 \Rightarrow a - b + c : 3 \Rightarrow a - b : 3(2)$$

Từ (1) và (2) Suy ra $(a + b) + (a - b) : 3 \Rightarrow 2a : 3 \Rightarrow a : 3$ vì $(2; 3) = 1 \Rightarrow b : 3$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 3

Câu 4.



a)

$$\angle ADC = \angle B + \angle BAD \quad (\text{góc ngoài } \triangle ABD) \quad (1)$$

$$\angle ADB = \angle C + \angle CAD \quad (\text{góc ngoài } \triangle ADC) \quad (2)$$

Mà AD là phân giác góc BAD nên $\angle BAD = \angle DAC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra đpcm

b)

Ta có:

$$\angle ADC - \angle ADB = \angle B - \angle C = 40^\circ$$

$$\angle ADC + \angle ADB = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ADC = \frac{180^\circ + 40^\circ}{2} = 110^\circ; \angle ADB = 70^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AHD = 20^\circ$$

c)

Ta có AD, AE là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh A nên $AD \perp AE$

$$\text{Xét } \triangle AED \quad \text{ta có: } \angle AEB + \angle ADE = 90^\circ \quad (4)$$

$$\text{Xét } \triangle AHD \quad \text{ta có: } \angle HAD + \angle ADE = 90^\circ \quad (5)$$

Mặt khác

$$\angle ADB = \angle C + \angle DAC = \angle C + \frac{\angle A}{2}$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\angle A}{2} = 90^\circ - \frac{\angle B + \angle C}{2}$$

$$\angle ADB = \angle C + 90^\circ - \frac{\angle B + \angle C}{2}$$

$$= \frac{\angle C - \angle B}{2} + 90^\circ$$

$$\frac{\angle B - \angle C}{2} + \angle ADB = 90^\circ \quad (6)$$

Từ (4), (5) và (6) suy ra đpcm

Câu 5.

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006}\right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} = S.
 \end{aligned}$$

Do đó $(S - P)^{2013} = 0$

b)

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$

$$A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 3} \quad (\text{đk } x \geq 0, x \neq 9)$$

A nguyên khi $\frac{4}{\sqrt{x} - 3}$ nguyên $\Rightarrow \sqrt{x} - 3$ là Ư(4)

$$\text{Ư}(4) = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$$

Các giá trị của x là : 1 ; 4; 16 ; 25 ; 49 .

Đề số 4

Câu 1.

a)

$$\begin{aligned}
 &\bullet \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] = \frac{2}{193} \cdot \frac{193}{17} - \frac{3}{386} \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} = \frac{2}{17} - \frac{3}{34} + \frac{33}{34} = 1 \\
 &\bullet \left[\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} \right) \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} \right] = \frac{7}{1931} \cdot \frac{1931}{25} + \frac{11}{3862} \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} = \frac{7}{25} + \frac{11}{50} + \frac{9}{2} = 5
 \end{aligned}$$

$$A = 1 : 5 = \frac{1}{5}$$

b)

$$(-5)B = (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017} + (-5)^{2018}.$$

$$B = (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017}.$$

$$\text{Do đó: } (-5)B - B = (-6)B = (-5)^{2018} - 1$$

$$\text{Vậy } B = \frac{(-5)^{2018} - 1}{-4} = \frac{1 - 5^{2018}}{4}$$

Câu 2.

a) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{12a-15b}{7} = \frac{20c-12a}{9} = \frac{15b-20c}{11} = \frac{12a-15b+20c-12a+15b-20c}{27} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{12a-15b}{7} &= 0 \Rightarrow 12a = 15b \\ \frac{20c-12a}{9} &= 0 \Rightarrow 20c = 12a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12a = 15b = 20c \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{12}} = \frac{b}{\frac{1}{15}} = \frac{c}{\frac{1}{20}}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau và $a + b + c = 48$, ta có:

$$\frac{a}{\frac{1}{12}} = \frac{b}{\frac{1}{15}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}} = \frac{48}{\frac{1}{5}} = 240$$

$$\frac{a}{\frac{1}{12}} = 240 \Rightarrow a = 20 \quad \frac{b}{\frac{1}{15}} = 240 \Rightarrow b = 16 \quad \frac{c}{\frac{1}{20}} = 240 \Rightarrow c = 12$$

Vậy $a = 20$; $b = 16$; $c = 12$.

b) Gọi tổng số đất đã phân chia cho các đội là x (m^3) ĐK: $x > 0$.

Số đất dự định chia cho ba đội I, II, III lần lượt là a, b, c (m^3) ĐK: $a, b, c > 0$.

$$\text{Ta có: } \frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{7x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{5x}{18} \quad (1)$$

Số đất sau đó chia cho ba đội I, II, III lần lượt là a', b', c' (m^3) ĐK: $a', b', c' > 0$.

$$\text{Ta có: } \frac{a'}{6} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{4} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{6x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{4x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a < a'$; $b = b'$; $c > c'$ nên đội I nhận nhiều hơn lúc đầu.

$$\text{Vì } a - a' = 6 \text{ hay } \frac{7x}{18} - \frac{6x}{15} = 6 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy tổng số đất đã phân chia cho các đội là $360m^3$ đất.

Câu 3.

$$\text{a) } C = \frac{|x-2017|+2018}{|x-2017|+2019} = \frac{(|x-2017|+2019)-1}{|x-2017|+2019} = 1 - \frac{1}{|x-2017|+2019}$$

Biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất khi $|x-2017|+2019$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $|x-2017| \geq 0$ nên $|x-2017|+2019 \geq 2019$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = 2017 \Rightarrow C = \frac{2018}{2019}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2018}{2019}$ khi $x = 2017$.

b) Ta có:

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$= (1 + 1 + 1 + \dots + 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= (n - 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\Rightarrow S < n - 1 \quad (1)$$

Nhận xét: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}; \dots; \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1).n}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) > -1 \Rightarrow (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) > (n-1) - 1 = n - 2.$$

$$\Rightarrow S > n - 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $n - 2 < S < n - 1$ hay S không là số nguyên.

c) Ta có:

$$x - 2xy + y = 0.$$

$$\Rightarrow x(1 - y) + y = 0$$

$$\Rightarrow (1 - y) + x(1 - y) = 1$$

$$\Rightarrow (1 + x)(1 - y) = 1$$

$$\text{Ta có: } 1 = 1.1 = (-1).(-1)$$

Ta có bảng:

$1 + x$	1	-1
$1 - y$	1	-1
x	0	-2
y	0	2

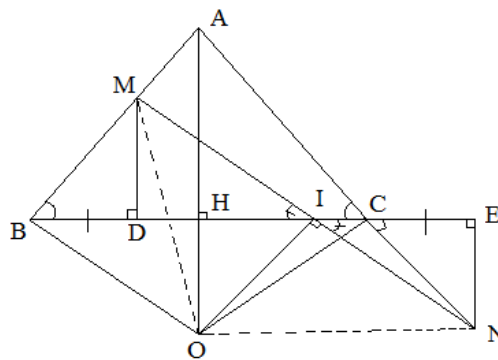
$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(0; 0); (-2; 2)\}$$

Câu 4.

GT

 $\triangle ABC$ $AB = AC$ $BD = CE$ $MD \perp BC; NE \perp BC$ $BC \cap MN = \{I\}$

KL

a) $DM = EN$ b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC a) $\triangle MDB = \triangle NEC$ (g.c.g) $\Rightarrow DM = EN$ (cặp cạnh tương ứng) $\Rightarrow MB = NC$ (cặp cạnh tương ứng)

b) Ta có:

 $\triangle MDI$ vuông tại D : $DMI + MID = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông) $\triangle NEI$ vuông tại E : $ENI + NIE = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)Mà $MID = NIE$ (đối đỉnh) nên $DMI = ENI$ $\triangle MDI = \triangle NEI$ (g.c.g) $\Rightarrow IM = IN$ (cặp cạnh tương ứng)Vậy BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN

c)

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC . $\triangle AHB = \triangle AHC$ (cạnh huyền.cạnh góc vuông) $\Rightarrow \angle HAB = \angle HAC$ (cặp góc tương ứng)Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I . $\triangle OAB = \triangle OAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle OBA = \angle OCA$ (cặp góc tương ứng) (1)

$\Rightarrow OC = OB$ (cặp cạnh tương ứng)

$\triangle OIM = \triangle OIN$ (c.g.c)

$\Rightarrow OM = ON$ (cặp cạnh tương ứng)

$\triangle OBM = \triangle OCN$ (c.c.c)

$\Rightarrow \angle OBM = \angle OCN$ (cặp góc tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle OCA = \angle OCN = 90^\circ$, do đó $OC \perp AC$.

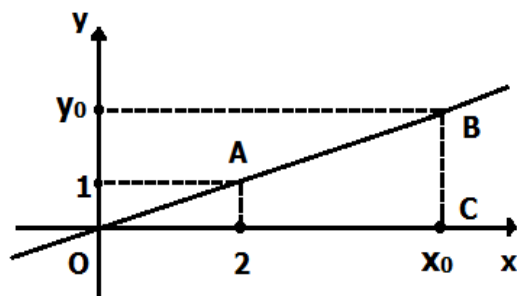
Vậy điểm O cố định.

Câu 4.

a) Điểm A thuộc đồ thị hàm số $y = ax$ nên tọa độ (2;1) của A phải thỏa mãn hàm số $y = ax$.

Do đó, $1 = a \cdot 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. Vậy hàm số được cho bởi

công thức $y = \frac{1}{2}x$.



Hai điểm A và B thuộc đồ thị hàm số nên hoành độ và tung độ của chúng tỉ lệ thuận với nhau.

Suy ra $\frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{y_0 - 2}{x_0 - 4}$ (theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau)

Vậy $\frac{y_0 - 2}{x_0 - 4} = \frac{1}{2}$.

b) Nếu $x_0 = 5$ thì $y_0 = \frac{1}{2}x_0 = \frac{5}{2} = 2,5$.

Diện tích tam giác OBC là:

Áp dụng công thức $S = \frac{1}{2}(a \cdot h)$ ta có:

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2,5 = 6,25.$$

***Lưu ý.** Học sinh có cách giải khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

Đề số 5

Câu 1.

a) Ta có:

$$\frac{4+x}{7+y} \Rightarrow 28+7x = 28+4y \Rightarrow 7x = 4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{4+7} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{22}{11} = 2 \Rightarrow x = 8; y = 14$$

b) Ta có:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{4z}{96} = \frac{2x+3y+4z}{30+60+96}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{3x}{45} = \frac{4y}{80} = \frac{5z}{120} = \frac{3x+4y+5z}{45+80+120}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} : \frac{3x+4y+5z}{45+80+120} = \frac{2x}{30} : \frac{3x}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{186} \cdot \frac{245}{3x+4y+5z} = 1 \Rightarrow M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z} = \frac{186}{245}$$

Câu 2.

a) Ta có: $2S = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2009} \dots - 2^2 - 2$

$$2S - S = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2010} - 2^{2009} + 2^{2009} \dots - 2^2 + 2^2 - 2 + 2 + 1$$

$$S = 2^{2011} - 2 \cdot 2^{2010} + 1$$

$$S = 2^{2011} - 2^{2011} + 1 = 1$$

b) Ta có:

$$P = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3.4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4.5}{2} + \dots + \frac{1}{16} \cdot \frac{16.17}{2}$$

$$= \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{17}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (1 + 2 + 3 + \dots + 17 - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{17 \cdot 18}{2} - 1 \right) = 76$$

Câu 3. a) Ta có:

$$\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{2 \cdot 6} \dots \frac{30}{2 \cdot 31} \cdot \frac{31}{2^6} = 2^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 30 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 30 \cdot 31 \cdot 2^{30} \cdot 2^6} = 2^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{36}} = 2^x$$

$$\Leftrightarrow x = -36$$

b) Ta có:

$$\frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = 2^x$$

$$\frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = 2^x$$

$$\left(\frac{6}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^x$$

$$2^{12} = 2^x \Rightarrow x = 12$$

Câu 4.

a) BEH cân tại B nên $\widehat{E} = \widehat{H_1}$

$$\widehat{ABC} = \widehat{E} + \widehat{H_1} = 2\widehat{E}$$

$$\widehat{ABC} = 2\widehat{C} \Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{ACB}$$

b) Chứng tỏ được $\triangle DHC$ cân tại D nên $DC = DH$.

$$\triangle DAH \text{ có: } \widehat{DAH} = 90^\circ - \widehat{C}$$

$$\widehat{DHA} = 90^\circ - \widehat{H_2} = 90^\circ - \widehat{C}$$

$\Rightarrow \triangle DAH$ cân tại D nên $DA = DH$.

c) $\triangle ABB'$ cân tại A nên $\widehat{B'} = \widehat{B} = 2\widehat{C}$

$$\widehat{B'} = \widehat{A_1} + \widehat{C} \text{ nên } 2\widehat{C} = \widehat{A_1} + \widehat{C}$$

$$\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A_1} \Rightarrow \triangle AB'C \text{ cân tại B'}$$

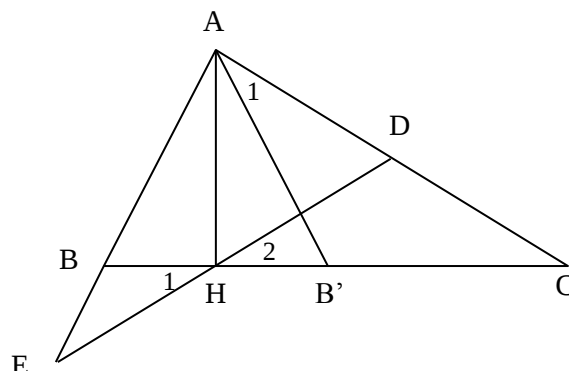
d) Ta có: $AB = AB' = CB'$

$$BE = BH = B'H$$

$$\text{Có: } AE = AB + BE$$

$$HC = CB' + B'H$$

$$\Rightarrow AE = HC$$



Đề số 6

Câu 1.

$$a) \quad 27\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} - 13\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8} (27\frac{1}{4} - 13\frac{1}{4}) = 14 \cdot \frac{5}{8} = \frac{35}{4}$$

$$b) \quad 2\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| + \sqrt{\frac{4}{9}} = 2\left|\frac{1}{4}\right| + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

$$c) \quad \frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4} = \frac{2^3 \cdot 5 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4} = \frac{2^3(5+6)}{2^2(15-2^2)} = \frac{2 \cdot 11}{11} = 2$$

Câu 2.

$$a) \quad 3(x-2) + \frac{2}{5} = 4 \Leftrightarrow 3(x-2) = 4 - \frac{2}{5} \Leftrightarrow 3(x-2) = \frac{18}{5} \Leftrightarrow x-2 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow x = \frac{16}{5}$$

$$b) \quad \left| x + \frac{1}{3} \right| - 5 = 7 \Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{3} \right| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3} = 12 \\ x + \frac{1}{3} = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{35}{3} \\ x = -\frac{37}{3} \end{cases}$$

$$c) \quad (2x-1)^7 = (2x-1)^5 \Leftrightarrow (2x-1)^5((2x-1)^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Câu 3.

Gọi số người tham gia làm việc của đội thứ nhất, đội thứ hai, đội thứ ba lần lượt là $x; y; z$ (giờ).

ĐK: $x; y; z > 0$

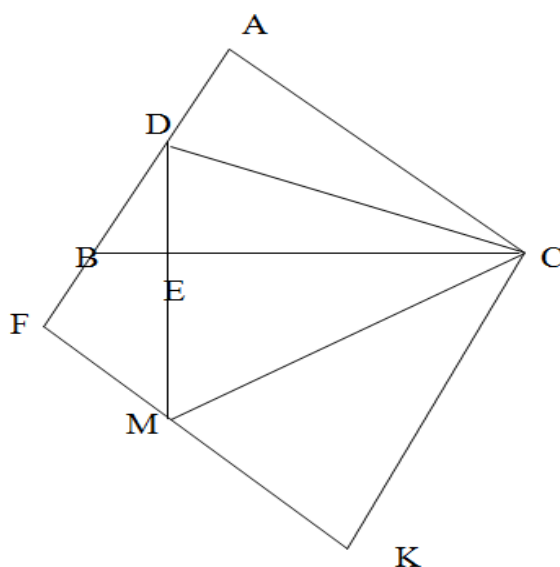
Cùng một khối lượng công việc, số người tham gia và thời gian làm việc tỷ lệ nghịch.

Theo bài ra ta có: $2x = 3y = 4z$ và $y - z = 5$

$$\frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = \frac{y-z}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{5}{\frac{1}{12}} = 60$$

$y = 20, z = 15, x = 30$ (thoả mãn điều kiện bài toán)

Vậy số người tham gia làm việc của đội thứ nhất, đội thứ hai, đội thứ ba lần lượt là 30 người, 20 người, 15 người.

Câu 4.

a) C/m được $\triangle ACD = \triangle ECD$ (cạnh huyền- góc nhọn)

$\Rightarrow AC = CE$ (hai cạnh tương ứng)

$$b) \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} (gt) \Leftrightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{AB^2 + AC^2}{9+16} = \frac{BC^2}{25} = \frac{15^2}{25} = 9$$

$$AB^2 = 9 \cdot 9 = 81 \Rightarrow AB = 9cm$$

$$AC^2 = 9 \cdot 16 = 144 \Rightarrow AC = 12cm$$

c) Kẻ $Cy \perp Fx$ cắt nhau tại K

Ta thấy $AC = AF = FK = CK = CE$ và $\angle ACK = 90^\circ$

C/M được $\triangle CEM = \triangle CKM$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \angle ECM = \angle KCM$ (hai góc tương ứng)

$$\angle DCM = \angle DCE + \angle ECM = \frac{1}{2} \angle ACK = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

Câu 5.

Xét các trường hợp:

$$+ \text{TH1 : } x \geq 2 \Rightarrow A = x - (x - 2) = 2$$

$$+ \text{TH2 : } 0 \leq x < 2 \Rightarrow A = x + x - 2 = 2x - 2 < 2$$

$$+ \text{TH3 : } x < 0 \Rightarrow A = -x + x - 2 = -2 < 2$$

$\Rightarrow$ Với mọi giá trị của x thì $A \leq 2$

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 2 khi $x \geq 2$

Đề số 7

Câu 1.

1) Ta có:

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2012}{2013} \\ &= \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2012}{2013} \\ &= \left(\frac{2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right)}{7 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right)} - \frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)}{\frac{7}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)} \right) : \frac{2012}{2013} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right) : \frac{2012}{2013} = 0$$

KL:.....

2) vì $x^2 + |x-1| > 0$ nên $(1) \Rightarrow x^2 + |x-1| = x^2 + 2$ hay $|x-1| = 2$

+) Nếu $x \geq 1$ thì $(*) \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$

+) Nếu $x < 1$ thì $(*) \Rightarrow x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$

KL:.....

Câu 2.

1) +Nếu $a + b + c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ,ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

mà $\frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

Vậy $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$

+Nếu $a + b + c = 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ,ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 0$$

mà $\frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 1$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 1$$

Vậy $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 1$

2) Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là: a, b, c

Ta có: $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18}$ (1)

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15}$$
 (2)

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

Vậy: $c' - c = 4$ hay $\frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$

Vậy số gói tằm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Câu 3.

$$1) \text{ Ta có: } A = |2x - 2| + |2x - 2013| = |2x - 2| + |2013 - 2x| \\ \geq |2x - 2 + 2013 - 2x| = 2011$$

Dấu "=" xảy ra khi $(2x - 2)(2013 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Do đó giá trị nhỏ nhất của A là 2011 khi $1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

2) Vì x, y, z nguyên dương nên ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

$$\text{Theo bài ra } 1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 3 \Leftrightarrow x = 1$$

Thay vào đầu bài ta có $1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$

$$\Rightarrow y(1 - z) - (1 - z) + 2 = 0$$

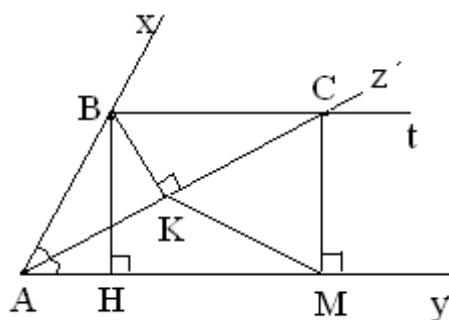
$$\Rightarrow (y - 1)(z - 1) = 2$$

TH1: $y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2$ và $z - 1 = 2 \Rightarrow z = 3$

TH2: $y - 1 = 2 \Rightarrow y = 3$ và $z - 1 = 1 \Rightarrow z = 2$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1, 2, 3); (1, 3, 2)$

Câu 4.



a, $\triangle ABC$ cân tại B do $\angle CAB = \angle ACB (= \angle MAC)$ và BK là đường cao $\Rightarrow$ BK là đường trung tuyến

$\Rightarrow$ K là trung điểm của AC

b, $\triangle ABH = \triangle BAK$ (cạnh huyền + góc nhọn)

$\Rightarrow BH = AK$ (hai cạnh t. u) mà $AK = \frac{1}{2} AC$

$$\Rightarrow BH = \frac{1}{2} AC$$

Ta có : $BH = CM$ (t/c cặp đoạn chắn) mà $CK = BH = \frac{1}{2} AC \Rightarrow CM = CK \Rightarrow \Delta MKC$ là tam giác cân (1)

Mặt khác : $MCB = 90^\circ$ và $ACB = 30^\circ$

$$\Rightarrow MCK = 60^\circ \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MKC$ là tam giác đều

c) Vì ΔABK vuông tại K mà góc $KAB = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4\text{cm}$

Vì ΔABK vuông tại K nên theo Pitago ta có:

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$\text{Mà } KC = \frac{1}{2} AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$$

$$\Delta KCM \text{ đều} \Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$$

Theo phần b) $AB = BC = 4$

$$AH = BK = 2$$

$$HM = BC \text{ (HBCM là hình chữ nhật)}$$

$$\Rightarrow AM = AH + HM = 6$$

Câu 5.

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2) ; \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

$$\text{Mà } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (\text{đpcm})$$

Lưu ý: - Học sinh làm bài các cách khác nhau mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa.

- Bài hình không có hình vẽ thì không chấm.

Đề số 8

Câu 1: a) Ta có: $(-5)^{39} = -5^{39} = -(5^3)^{13} = -125^{13}$

$$(-2)^{91} = -2^{91} = -(2^7)^{13} = -128^{13}$$

$$\text{Ta thấy: } 125^{13} < 128^{13} \Rightarrow -125^{13} > -128^{13} \Rightarrow (-5)^{39} > (-2)^{91}$$

b) Ta có: $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot (12^2)^n = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n$
 $= (133 - 12) \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n$
 $= 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$

Ta thấy: $133 \cdot 11^n : 133$

$$(144^n - 11^n) : (144 - 11) = 133 \Rightarrow 12 \cdot (144^n - 11^n) : 133$$

Do đó suy ra: $133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$ chia hết cho 133

Vậy số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

Câu 2:

a) Ta có: 2012 là số tự nhiên chẵn $\Rightarrow (2x - y + 7)^{2012} \geq 0$

$$\text{và } |x - 3| \geq 0 \Rightarrow |x - 3|^{2013} \geq 0$$

$$\text{Do đó, từ } (2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$$

$$\text{suy ra: } (2x - y + 7)^{2012} = 0 \text{ và } |x - 3|^{2013} = 0$$

$$\Rightarrow 2x - y + 7 = 0 \text{ (1) và } x - 3 = 0 \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (2) } \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Từ (1) } \Rightarrow y = 2x + 7 = 2 \cdot 3 + 7 = 13$$

Vậy cặp số $(x; y)$ cần tìm là $(3; 13)$

b)

$$\text{Ta có: } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ và } \overline{aaa} = a.111 = a.3.37$$

$$\text{Do đó, từ } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{\overline{aaa}}{3} \Rightarrow n(n+1) = 2.3.37.a$$

$\Rightarrow n(n+1)$ chia hết cho số nguyên tố 37

$\Rightarrow n$ hoặc $n+1$ chia hết cho 37 (1)

$$\text{Mặt khác: } \frac{n(n+1)}{2} = \overline{aaa} \leq 999 \Rightarrow n(n+1) \leq 1998 \Rightarrow n < 45 \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra hoặc $n = 37$, hoặc $n + 1 = 37$

$$\text{- Với } n = 37 \text{ thì } \overline{aaa} = \frac{37 \cdot 38}{2} = 703 \text{ (không thỏa)}$$

$$\text{- Với } n + 1 = 37 \text{ thì } \overline{aaa} = \frac{36 \cdot 37}{2} = 666 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $n = 36$ và $a = 6$.

Câu 3:

Gọi tổng số học sinh của $7A_1, 7A_2, 7A_3$ lần lượt là a, b, c ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Theo bài ra ta có: } a - \frac{1}{3}a = b - \frac{1}{4}b = c - \frac{1}{5}c \text{ (*) và } a + b + c = 147$$

$$\text{Từ (*)} \Rightarrow \frac{2a}{3} = \frac{3b}{4} = \frac{4c}{5} \Rightarrow \frac{12a}{18} = \frac{12b}{16} = \frac{12c}{15} \Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15}$$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{18+16+15} = \frac{147}{49} = 3.$$

Suy ra : $a = 54, b = 48, c = 45$

Vậy tổng số học sinh của $7A_1, 7A_2, 7A_3$ lần lượt là 54, 48 và 45.

Câu 4:

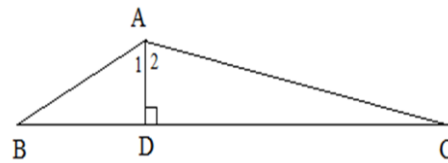
$$\text{a) Từ } \hat{A} = 3\hat{B} = 6\hat{C} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{6} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{1} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{6+2+1} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 6.20^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{B} = 2.20^\circ = 40^\circ$$

$$\hat{C} = 1.20^\circ = 20^\circ$$

Vậy: $\hat{A} = 120^\circ; \hat{B} = 40^\circ; \hat{C} = 20^\circ$



b) - Trong $\triangle ACD$ có

$$\hat{ADC} = 90^\circ; \hat{C} = 20^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 70^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = 50^\circ$$

- Xét $\triangle ADB$ có $\hat{B} = 40^\circ < \hat{A}_1 = 50^\circ \Rightarrow AD < BD$ (1)

- Xét $\triangle ABC$ có $\hat{B} = 40^\circ > \hat{C} = 20^\circ \Rightarrow AB < AC \Rightarrow AB^2 < AC^2$ (*)

- Áp dụng định lý Pytago cho hai tam giác vuông ADB và ADC có:

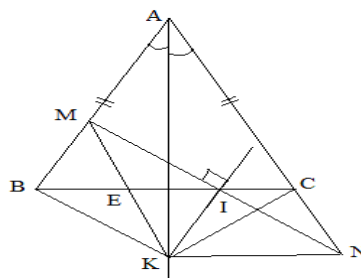
$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \text{ và } AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$\text{Do đó, từ (*)} \Rightarrow AD^2 + BD^2 < AD^2 + CD^2$$

$$\Rightarrow BD^2 < CD^2 \Rightarrow BD < CD \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AD < BD < CD$

Câu 5:



a) Theo giả thiết, ta có:

$$2AB = AB + AB = AB + AM + BM$$

$$AM + AN = AM + AC + CN$$

$$\triangle ABC \text{ cân ở } A \Rightarrow AB = AC$$

$$\text{Do đó, từ } AM + AN = 2AB$$

$$\Rightarrow BM = CN$$

b) Qua M kẻ $ME \parallel AC$ ($E \in BC$)

$$\triangle ABC \text{ cân ở } A \Rightarrow \triangle BME \text{ cân ở } M \Rightarrow EM = BM = CN$$

$$\Rightarrow \triangle MEI = \triangle NCI \text{ (g-c-g)} \Rightarrow IM = IN$$

Vậy: BC đi qua trung điểm của MN.

c) + K thuộc đường trung trực của MN $\Rightarrow KM = KN$ (1)

+ $\triangle ABK = \triangle ACK$ (c-g-c) $\Rightarrow KB = KC$ (2); $\hat{ABK} = \hat{ACK}$ (*)

+ Kết quả câu c/m câu a) $BM = CN$ (3)

+ Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \triangle BMK = \triangle CNK$ (c-c-c) $\Rightarrow \hat{ABK} = \hat{NCK}$ (**)

$$+ \text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow \hat{ACK} = \hat{NCK} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow KC \perp AN$$

Đề số 9

Câu 1: 1.

$$a) A = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) : \frac{7}{11} = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) \cdot \frac{11}{7} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) \cdot \frac{11}{7}$$

$$A = \frac{11}{7} \left[\left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) \right] = \frac{11}{7} \left[\left(\frac{-3}{7} + \frac{-4}{7} \right) + \left(\frac{4}{11} + \frac{7}{11} \right) \right] = \frac{11}{7} [(-1) + 1] = \frac{11}{7} \cdot 0 = 0$$

$$b) B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - (2^2)^6 \cdot (3^2)^2}{2^{12} \cdot 3^6 + (2^3)^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3 + 1)}$$

$$B = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 4} = \frac{1}{6}$$

$$2. \text{ Đặt } \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = k \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 5k \end{cases} \text{ . Khi đó:}$$

$$C = \frac{5x^2 + 3y^2}{10x^2 - 3y^2} = \frac{5(3k)^2 + 3(5k)^2}{10(3k)^2 - 3(5k)^2} = \frac{45k^2 + 75k^2}{90k^2 - 75k^2} = \frac{120k^2}{15k^2} = 8$$

Câu 2: 1.

$$a) \text{ Ta có: } \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{15} \\ \frac{y}{15} = \frac{z}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau và $x + y + z = 92$, ta được:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} = \frac{x+y+z}{10+15+21} = \frac{92}{46} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = 2 \\ \frac{y}{15} = 2 \\ \frac{z}{21} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \\ z = 42 \end{cases}$$

$$b) \text{ Ta có: } (x - 1)^{2016} \geq 0 \quad \forall x$$

$$(2y - 1)^{2016} \geq 0 \quad \forall y$$

$$|x + 2y - z|^{2017} \geq 0 \quad \forall x, y, z$$

$$\Rightarrow (x - 1)^{2016} + (2y - 1)^{2016} + |x + 2y - z|^{2017} \geq 0 \quad \forall x, y, z$$

$$\text{Mà } (x - 1)^{2016} + (2y - 1)^{2016} + |x + 2y - z|^{2017} = 0$$

$$\text{nên dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^{2016} = 0 \\ (2y - 1)^{2016} = 0 \\ |x + 2y - z|^{2017} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

$$2. \text{ Ta có: } xy + 3x - y = 6 \Leftrightarrow x(y + 3) - (y + 3) = 6 - 3$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(y + 3) = 3 = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = (-1)(-3) = (-3)(-1)$$

Ta có bảng sau:

$x - 1$	1	3	-1	-3
$y + 3$	3	1	-3	-1
x	2	4	0	-2
y	0	-2	-6	-4

$$\text{Vậy: } (x; y) = (2; 0) = (4; -2) = (0; 6) = (-2; -4)$$

Câu 3:

$$1. \text{ Ta có: } A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$$

$$A = x^2 - 7xy + 8y^2 + (3xy - 4y^2)$$

$$A = x^2 - 4xy + 4y^2$$

2.

a) Vì đồ thị hàm số $y = f(x) = ax + 2$ đi qua điểm $A(a - 1; a^2 + a)$ nên:

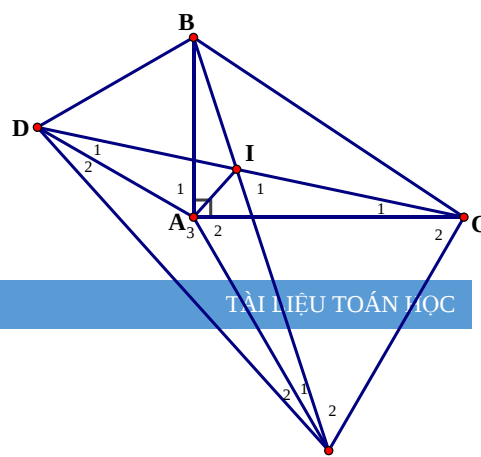
$$a^2 + a = a(a - 1) + 2 \Leftrightarrow a^2 + a = a^2 - a + 2 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$$

b) Với $a = 1$ thì $y = f(x) = x + 2$

$$\text{Ta có: } f(2x - 1) = f(1 - 2x) \Leftrightarrow (2x - 1) + 2 = (1 - 2x) + 2 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Câu 4:

GT	$\Delta ABC, A = 90^\circ, \Delta ABD$ và ΔACE đều $I = BE \cap CD$
KL	a) $BE = CD$ b) ΔBDE là tam giác cân c) $\angle EIC = 60^\circ$ và IA là tia phân giác của $\angle DIE$



$$\text{a) Ta có: } \begin{cases} \angle DAC = \angle A_1 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ \angle BAE = \angle A_2 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle DAC = \angle BAE$$

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có:

$$DA = BA \text{ (GT)}$$

$$\angle DAC = \angle BAE \text{ (CM trên)}$$

$$AC = AE \text{ (GT)}$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c - g - c)} \Rightarrow BE = CD \text{ (Hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{b) Ta có: } \angle A_3 + \angle A_1 + \angle BAC + \angle A_2 = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle A_3 + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle A_3 = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A_3 = \angle DAC = 150^\circ$$

Xét $\triangle DAE$ và $\triangle BAE$ có:

$$DA = BA \text{ (GT)}$$

$$\angle A_3 = \angle DAC \text{ (CM trên)}$$

AE : Cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE \text{ (c - g - c)} \Rightarrow DE = BE \text{ (Hai cạnh tương ứng)}$$

$\Rightarrow \triangle BDE$ là tam giác cân tại E

$$\text{c) Ta có: } \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (CM câu a)} \Rightarrow \angle E_1 = \angle C_1 \text{ (Hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Lại có: } \hat{I}_1 + \angle E_2 + \angle ICE = 180^\circ \text{ (Tổng 3 góc trong } \triangle ICE)$$

$$\Leftrightarrow \hat{I}_1 + (\angle AEC - \angle E_1) + (\angle C_1 + \angle C_2) = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{I}_1 + 60^\circ - \angle E_1 + \angle C_1 + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{I}_1 + 120^\circ = 180^\circ \text{ (Vì } \angle E_1 = \angle C_1)$$

$$\Leftrightarrow \hat{I}_1 = 60^\circ$$

Vì $\triangle DAE = \triangle BAE$ (Cm câu b) $\Rightarrow \angle E_1 = \angle E_2$ (Hai góc tương ứng) $\Rightarrow EA$ là tia phân giác của $\angle DEI$ (1)

$$\text{Vì } \begin{cases} \angle DAC = \angle BAE \\ \angle DAE = \angle BAE \end{cases} \Rightarrow \triangle DAC = \triangle DAE \Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2 \text{ (Hai góc tương ứng)} \Rightarrow DA \text{ là}$$

tia phân giác của $\angle EDC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A$ là giao điểm của 2 tia phân giác trong $\triangle DIE \Rightarrow IA$ là đường phân giác thứ ba trong $\triangle DIE$ hay IA là tia phân giác của $\angle DIE$

Câu 5:

$$1. \text{ Gọi } x = \frac{m}{n} \text{ (} m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, (m, n) = 1 \text{)}. \text{ Khi đó:}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{mn} \quad (1)$$

Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $m^2 + n^2 : mn$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 : m$$

$$\Rightarrow n^2 : m \text{ (Vì } m^2 : m)$$

$$\Rightarrow n : m$$

Mà $(m, n) = 1$ nên $m = 1$ hoặc $m = -1$

*) Với $m = 1$:

Từ (1), ta có: $x + \frac{1}{x} = \frac{1^2 + n^2}{1 \cdot n} = \frac{1 + n^2}{n}$. Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $1 + n^2 : n \Rightarrow 1 : n$ hay $n = \pm 1$

*) Với $m = -1$:

Từ (1), ta có: $x + \frac{1}{x} = \frac{(-1)^2 + n^2}{(-1) \cdot n} = \frac{1 + n^2}{-n}$. Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $1 + n^2 : (-n) \Rightarrow 1 : (-n)$ hay $n = \pm 1$

$$\text{Khi đó } x = \frac{m}{n} = \frac{1}{1} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{-1} \text{ hay } x = \pm 1$$

2. Ta có: $a + 3c = 2016$ (1) và $a + 2b = 2017$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow a = 2016 - 3c$

Lấy (2) - (1) ta được: $2b - 3c = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1+3c}{2}$. Khi đó:

$$P = a + b + c = (2016 - 3c) + \frac{1+3c}{2} + c = \left(2016 + \frac{1}{2}\right) + \frac{-6c + 3c + 2c}{2} = 2016\frac{1}{2} - \frac{c}{2}. \text{ Vì } a, b,$$

c không âm nên $P = 2016\frac{1}{2} - \frac{c}{2} \leq 2016\frac{1}{2}$, $\text{Max} P = 2016\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = 0$

Đề số 10

Câu 1.

$$a) A = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 (1 - 3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1 + 5)} = -\frac{1}{3}$$

$$b) \text{ Đặt } M = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2015}$$

Ta có $3M = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2016}$

$$3M - M = 3^{2016} - 1 \Rightarrow M = \frac{3^{2016}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó } B = \frac{3^{2016}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3^{2016}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Câu 2.

$$a) \left| x - \frac{3}{14} \right| = \frac{15}{28} + \frac{5}{12} \Leftrightarrow \left| x - \frac{3}{14} \right| = \frac{80}{84}$$

$$x - \frac{3}{14} = \frac{80}{84} \text{ hoặc } x - \frac{3}{14} = -\frac{80}{84}$$

$$x = \frac{3}{14} + \frac{80}{84} \quad x = \frac{3}{14} - \frac{80}{84}$$

$$x = \frac{7}{6} \quad x = \frac{31}{42}$$

Vậy $x = \frac{7}{6}; x = \frac{31}{42}$

b) Ta có $4(x - 2016)^2 \geq 0$ với mọi x nên $25 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 25$

Mà $4(x - 2016)^2$ là số chính phương chẵn $\Rightarrow 25 - y^2$ chẵn
 $\Rightarrow y$ lẻ.

y^2 là số chính phương lẻ, $y^2 \leq 25 \Rightarrow y^2 \in \{1; 9; 25\}$

+ Nếu $y^2 = 25 \Rightarrow 4(x - 2016)^2 = 0 \Rightarrow x = 2016$

+ Nếu $y^2 = 9 \Rightarrow 4(x - 2016)^2 = 16 \Rightarrow x = 2016$

$\Rightarrow (x - 2016)^2 = 4$

$x - 2016 = 2$ hoặc $x - 2016 = -2$

$x = 2018$ hoặc $x = 2014$

+ Nếu $y^2 = 1 \Rightarrow 4(x - 2016)^2 = 24$ không phải là số chính phương (loại)

Vậy với $y = \pm 3$ thì $x = 2018; x = 2014$

Với $y = \pm 5$ thì $x = 2016$.

Câu 3.

a) Ta có $f(3) = 9a + 3b + c$; $f(-2) = 4a - 2b + c$

$f(3) + f(-2) = 13a + b + 2c = 0 \Rightarrow f(3) = -f(-2)$

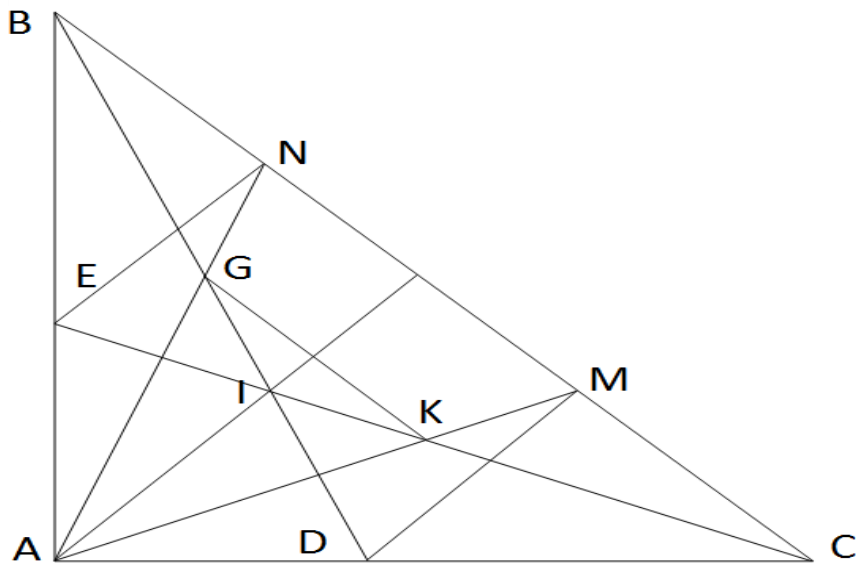
$$\Rightarrow f(3).f(-2) = -f(3)^2 \leq 0$$

b) Vì $x, y, z \neq 0$ nên theo bài ra ta có: $\frac{x+y}{x.y} = \frac{y+z}{y.z} = \frac{x+z}{x.z}$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \Rightarrow x = y = z.$$

Thay $x = y = z$ vào M ta được $M = 1$.

Câu 4.



a) $\triangle ABD = \triangle MBD$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow AB = AM \Rightarrow \triangle AMB$ cân ở B.

b) Ta có $\triangle AEC = \triangle NEC \Rightarrow CN = CA$

Khi đó $AB + AC = BM + CN = BM + MC + MN = BC + MN$

$$\Rightarrow MN = AB + AC - BC$$

c) Từ $\triangle AMB$ cân ở M $\Rightarrow \angle AMB = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2}$

Từ $\triangle ANC$ cân ở N $\Rightarrow \angle ANB = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = 90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}$

Trong $\triangle AMN$ có $\angle MAN = 180^\circ - \angle AMB - \angle ANC$

$$= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle ABC}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}\right)$$

$$= \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle ACB}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

(Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $\angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$)

Vậy $\angle MAN = 45^\circ$

d) Vì $\triangle AMB$ cân ở B nên đường phân giác BD đồng thời là đường cao $\Rightarrow BD \perp AM$ hay $GI \perp AK$

$\triangle ANC$ cân ở C $\Rightarrow$ đường phân giác CE đồng thời là đường cao $\Rightarrow CE \perp AN$ hay $KI \perp AG$

Trong $\triangle AKG$ có 2 đường cao xuất phát từ G, K cắt nhau ở I $\Rightarrow I$ là trực tâm của $\triangle AKG$.

$AI \perp GK$ ở H $\Rightarrow \angle AHG = 90^\circ$

Đề số 11

Câu 1.

$$1) (1,5đ) A = \frac{4}{9} : \frac{-3}{5} + \frac{4}{9} : \frac{-3}{22} = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{-5}{3} + \frac{-22}{3} \right) = -4$$

$$2) (1,5đ) \text{ Ta có: } \Leftrightarrow -1\frac{3}{5} + x = \frac{13}{6} \cdot \frac{12}{13} \Leftrightarrow x = 3\frac{3}{5}$$

$$3) (1,5đ) \text{ Vì } (x-2)^4 \geq 0; (2y-1)^{2014} \geq 0 \text{ với mọi } x, y \text{ nên}$$

$$(x-2)^4 + (2y-1)^{2014} \geq 0. \text{ Mà } (x-2)^4 + (2y-1)^{2014} \leq 0$$

$$\text{Suy ra } (x-2)^4 = 0 \text{ và } (2y-1)^{2014} = 0 \text{ suy ra } x = 2, y = \frac{1}{2}$$

Khi đó $M = 44$.

Câu 2.

$$1) (1,5đ) \text{ Từ } \frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{6} = \frac{z}{8} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{16}$$

$$\text{Vậy: } \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{16} = \frac{2x}{18} = \frac{y}{12} = \frac{z}{16} = \frac{2x+y-z}{18+12-16} = \frac{-14}{14} = -1$$

Suy ra $x = -9; y = -12; z = -16$.

$$2) (1,5đ) \text{ Từ } (x-2)(x + \frac{2}{3}) > 0 \text{ suy ra } x-2 \text{ và } x + \frac{2}{3} \text{ cùng dấu.}$$

Để thấy $x-2 < x + \frac{2}{3}$ nên ta có:

- $x-2 \text{ và } x + \frac{2}{3} \text{ cùng dương } \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$

- $x-2 \text{ và } x + \frac{2}{3} \text{ cùng âm } \Leftrightarrow x + \frac{2}{3} < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$

Vậy $x > 2$ hoặc $x < -\frac{2}{3}$.

$$3) (1,5đ) \text{ Ta có } \frac{3}{7} \cdot 15\frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot 5\frac{2}{5} = \frac{3}{7} \cdot \left(15\frac{1}{3} + 5\frac{2}{5} \right) = 8\frac{31}{35}$$

$$\left(3\frac{1}{2} : 7 - 6\frac{1}{2} \right) \cdot \left(-2\frac{1}{3} \right) = 14$$

$$\text{Do đó: } 8\frac{31}{35} \leq x \leq 14, \text{ vì } x \text{ nguyên nên } x \in \{9; 10; 11; 12; 13; 14\}$$

Câu 3.

$$1) (1,5đ) M = 4(x+y) + 21xy(x+y) + 7x^2y^2(x+y) + 2014 = 2014$$

(Vì $x+y=0$)

$$2) (2,0đ) \text{ Vì } p(x) : 5 \text{ với mọi } x \text{ nguyên nên } p(0) = d : 5.$$

$$p(1) = a + b + c + d \div 5 \quad (1)$$

$$p(-1) = -a + b - c + d \div 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $2(b + d) \div 5$ và $2(a + c) \div 5$.

Vì $2(b + d) \div 5$, mà $(2, 5) = 1$ nên $b + d \div 5$ suy ra $b \div 5$.

$$p(2) = 8a + 4b + 2c + d \div 5 \quad \text{mà } d \div 5; b \div 5. \text{ nên } 8a + 2c \div 5,$$

kết hợp với $2(a + c) \div 5$ suy ra $6a \div 5$ suy ra $a \div 5$ vì $(6, 5) = 1$. từ đó $c \div 5$.

Vậy a, b, c, d đều chia hết cho 5.

$$3)(1,5đ) \text{ Đặt } C = A - B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4026}$$

$$\text{Ta có } B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4025} > 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4026} = \frac{1}{2} + C \quad (1)$$

$$\frac{2013}{2} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{2013 \text{ số hạng}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4026} = C$$

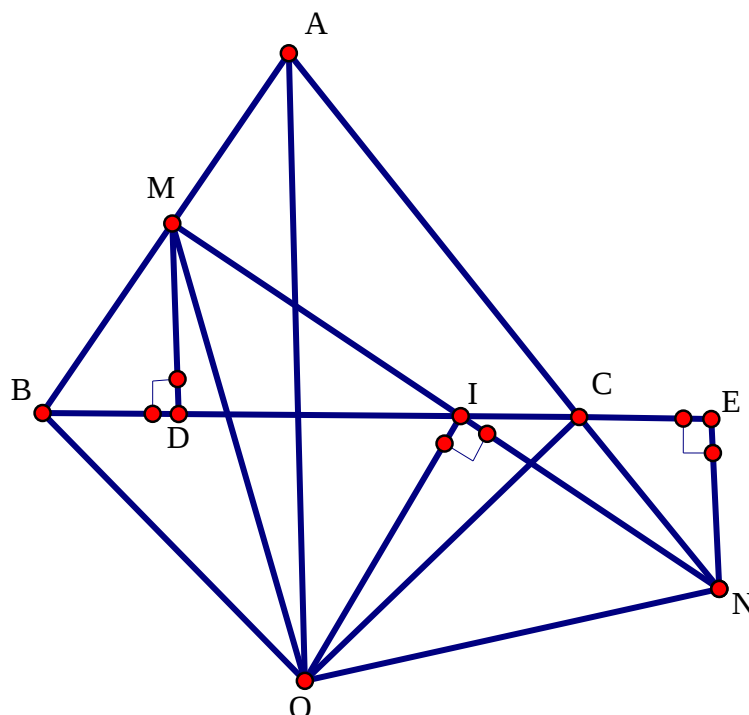
Lại có

$$\Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{C}{2013} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } B > \frac{C}{2013} + C \Rightarrow 2013B > 2014C$$

$$\text{Do đó: } \frac{C}{B} < \frac{2013}{2014} \Rightarrow \frac{C+B}{B} < 1 \frac{2013}{2014} \Rightarrow \frac{A}{B} < 1 \frac{2013}{2014}$$

Câu 4.



1) (1,5đ)

Tam giác ABC cân tại A nên $ABC = ACB$; $NCE = ACB$; (đối đỉnh)

Do đó: $\triangle MDB = \triangle NEC(g.c.g) \Rightarrow DM = EN$

2) (1,5đ) Ta có $\triangle MDI = \triangle NEI(g.c.g) \Rightarrow MI = NI$

Vì $BD = CE$ nên $BC = DE$.

Lại có $DI < MI$, $IE < IN$ nên $DE = DI + IE < MI + IN = MN$

Suy ra $BC < MN$.

3)(1,5đ) Ta chứng minh được:

$\triangle ABO = \triangle ACO(c.g.c) \Rightarrow OC = OB, ABO = ACO$.

$\triangle MIO = \triangle NIO(c.g.c) \Rightarrow OM = ON$.

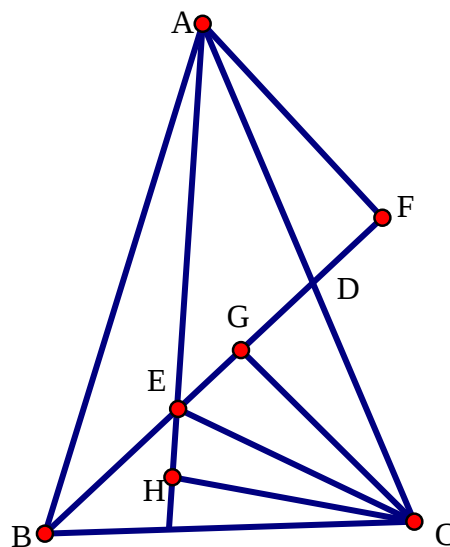
Lại có: $BM = CN$, do đó $\triangle BMO = \triangle CNO(c.c.c)$

$\Rightarrow MBO = NCO$, Mà: $MBO = ACO$ suy ra $NCO = ACO$,

mà đây là hai góc kề bù nên $CO \perp AN$.

Vì tam giác ABC cho trước, O là giao của phân giác góc A và đường vuông góc với AC tại C nên O cố định.

Câu 5.



Vẽ AF vuông góc BD, CG vuông góc BD, CH vuông góc với AE. Ta có

$\triangle ABF = \triangle CAH$ (cạnh huyền – góc nhọn). Suy ra: $AF = CH$.

$\triangle ADF = \triangle CDG(ch - gn)$ suy ra $AF = CG$.

Từ đó ta có $CH = CG$.

$\triangle CEH = \triangle CEG(ch - cv) \Rightarrow CEH = CEG$;

Mà $CEG = EBC + ECB$; $CEH = EAC + ECA$;

Do đó: $EBC + ECB = EAC + ECA$; (1)

Mặt khác: $EBA + EBC = ECB + ECA$; (2)

lấy (1) trừ (2) theo vế ta có:

$$ECB - EBA = EAC - ECB = EBA - ECB$$

$$\Rightarrow EBA = ECB$$

Mà $DAE = ABD$ nên $DAE = ECB$.

Đề số 12

Câu 1.

$$a) \frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015}$$

$$\frac{1}{2016 \cdot 2015} x = \frac{-1}{2015}$$

$$x = \frac{-1}{2015} : \frac{1}{2016 \cdot 2015} = -2016$$

Vậy $x = -2016$

$$b) M = \frac{3n-1}{n-1} \text{ có giá trị là số nguyên} \Rightarrow 3n-1 : n-1$$

$$\Rightarrow 3(n-1) + 2 : n-1 \Rightarrow 2 : n-1 \Rightarrow n-1 \in U(2) = \{-1; 1; -2; 2\}$$

Ta có bảng

$n-1$	-1	1	-2	2
n	0	2	-1	3

Thử lại ta có $n \in \{0; 2; -1; 3\}$ thì M nhận giá trị nguyên.

$$c) \text{ Ta có : } N = xyz \cdot yz^2 + x^2 y^2 z^2 \cdot yz^2 + x^3 y^3 z^3 \cdot yz^2 + \dots + x^{2014} y^{2014} z^{2014} \cdot yz^2$$

Thay $y = 1; z = -1$ ta được:

$$N = -xyz - x^2 y^2 z^2 - x^3 y^3 z^3 - \dots - x^{2014} y^{2014} z^{2014}$$

$$= -(xyz) - (xyz)^2 - (xyz)^3 - \dots - (xyz)^{2014}.$$

Thay $xyz = -1$ được:

$$N = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 = 0$$

Vậy $N = 0$.

Câu 2.

$$a) \frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2abz - 3acy}{a^2} = \frac{6bcx - 2abz}{4b^2} = \frac{3acy - 6bcx}{9c^2}$$

$$= \frac{2abz - 3acy + 6bcx - 2abz + 3acy - 6bcx}{a^2 + 4b^2 + 9c^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2bz - 3cy = 0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2); \text{ Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$$

b) Nhận xét:

- Với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$

- Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$.

Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên thì $|n - 2016| + n - 2016$ là số chẵn với $n - 2016 \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $2^m + 2015$ là số chẵn $\Rightarrow 2^m$ lẻ $\Leftrightarrow m = 0$.

Khi đó $|n - 2016| + n - 2016 = 2016$

+ Nếu $n < 2016$, ta có $-(n - 2016) + n - 2016 = 2016 \Leftrightarrow 0 = 2016$ (loại)

+ Nếu $n \geq 2016$, ta có $2(n - 2016) = 2016 \Leftrightarrow n - 2016 = 1008 \Leftrightarrow n = 3024$ (thỏa mãn)

Vậy $(m; n) = (0; 3024)$

Câu 3.

$$a) P = |x - 2015| + |2016 - x| + |x - 2017| = (|x - 2015| + |2017 - x|) + |x - 2016|$$

Ta có: $|x - 2015| + |2017 - x| \geq |x - 2015 + 2017 - x| = 2$. Dấu "=" xảy ra khi: $2015 \leq x \leq 2017$ (1)

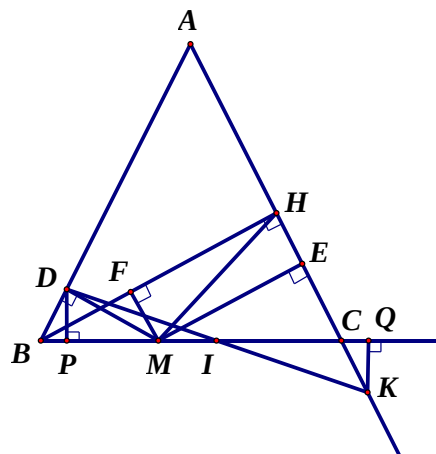
Lại có: $|x - 2016| \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 2016$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\min P = 2$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 2016$

b) Nhận xét: Bốn số phải có cùng số dư khi chia cho 2 và 3. Để có tổng nhỏ nhất, mỗi trong hai số dư này là 1.

Từ đó ta có các số 1, 7, 13 và 19. Tổng của chúng là: $1 + 7 + 13 + 19 = 40$.

Câu 4.



a) Chứng minh được $\triangle DBM = \triangle FMB$ (ch-gn)

b) Theo câu a ta có: $\triangle DBM = \triangle FMB$ (ch-gn) $\Rightarrow MD = BF$ (2 cạnh tương ứng) (1)

+) Chứng minh: $\triangle MFH = \triangle HEM \Rightarrow ME = FH$ (2 cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $MD + ME = BF + FH = BH$

BH không đổi $\Rightarrow MD + ME$ không đổi (đpcm)

c) Vẽ $DP \perp BC$ tại P, $KQ \perp BC$ tại Q, gọi I là giao điểm của DK và BC

+) Chứng minh : $BD = FM = EH = CK$

+) Chứng minh : $\triangle BDP = \triangle CKQ$ (ch-gn) $\Rightarrow DP = KQ$ (cạnh tương ứng)

+) Chứng minh : $IDP = IKQ \Rightarrow \triangle DPI = \triangle KQI$ (g-c-g) $\Rightarrow ID = IK$ (đpcm)

Câu 5.

Tổng số bóng trong 6 túi là : $18 + 19 + 21 + 23 + 25 + 34 = 140$

Vì số bóng của Toán gấp hai lần số bóng của học nên tổng số bóng của hai bạn là bội của 3.

Ta có : 140 chia 3 bằng 46 dư 2. Do đó số bóng đỏ cũng là số chia 3 dư 2.

Trong sáu số đã cho chỉ có 23 chia 3 dư 2, đó chính là số bóng đỏ trong túi còn lại. Từ đó ta tìm được số bóng của Toán là : $18 + 21 = 39$. Số bóng của học là : $19 + 25 + 34 = 78$.

Đề số 13

Câu 1.

a) Ta có:

$$\left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2 \Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{5} = 2 \\ x + \frac{1}{5} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ x = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

Vậy với $x = \frac{9}{5}$ hoặc $x = -\frac{11}{5}$ thì $\left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2$

b) Ta có:

$$2x - \frac{1}{5} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{5}x = -\frac{3}{10} \Rightarrow x = -\frac{3}{8}$$

c) Ta có: $(x - 3)^{x+2} - (x - 3)^{x+8} = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^{x+2} [1 - (x - 3)^6] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ (x - 3)^6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Câu 2.

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4 + 9 + 16} = \frac{116}{29} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = 4 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \pm 2$$

Vậy $(x; y; z) = (4; 6; 8)$ hoặc $(x; y; z) = (-4; -6; -8)$

Câu 3.

Quy tắc mỗi cầu thủ ứng với số áo của họ không là một hàm số vì đại lượng cầu thủ không phải là các giá trị bằng số. (trả lời đúng giải thích sai không có điểm)

Câu 4.

$$\begin{aligned} P &= x^3 + x^2y - 2x^2 - xy - y^2 + 3y + x + 2017 \\ &= x^2(x + y) - 2x^2 - y(x + y) + 3y + x + 2017 \\ &= 2x^2 - 2x^2 - 2y + 3y + x + 2017 = x + y + 2017 = 2019 \end{aligned}$$

Vậy với $x + y = 2$ thì $P = 2019$

Hoặc nhóm để xuất hiện $x + y - 2$

Câu 5.

$$\begin{aligned} \frac{3x - 2y}{4} &= \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2} \\ \Rightarrow \frac{12x - 8y}{16} &= \frac{6z - 12x}{9} = \frac{8y - 6z}{4} = \frac{12x - 8y + 6z - 12x + 8y - 6z}{16 + 9 + 4} = 0 \\ \Rightarrow 12x &= 8y = 6z \Rightarrow \frac{12x}{24} = \frac{8y}{24} = \frac{6z}{24} \\ \Rightarrow \frac{x}{2} &= \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \end{aligned}$$

Câu 6.

$$2x^2 + 3y^2 = 77 \Rightarrow 3y^2 = 77 - 2y^2 \leq 77 \Rightarrow y^2 \leq 77/3 \Rightarrow y^2 \leq 25$$

Mà $2x^2$ chẵn; 77 lẻ $\Rightarrow 3y^2$ lẻ $\Rightarrow y^2$ lẻ $\Rightarrow y^2 \in \{1; 9; 25\}$

$$+ y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 3 = 74 \Rightarrow x^2 = 37 \Rightarrow \text{không có số tự nhiên } x$$

$$+ y^2 = 9 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 27 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \text{ và } y = 3$$

$$+ y^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 75 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ và } y = 5$$

Vậy số tự nhiên x, y thỏa mãn $2x^2 + 3y^2 = 77$ là $(x; y) = (5; 3); (1; 5)$

Học sinh lần lượt thử chọn các số tự nhiên x (hoặc y) từ $0, 1, 2, \dots$ để có được KQ sẽ không được điểm vì không thể hiện được năng lực tư duy số học.

Câu 7.

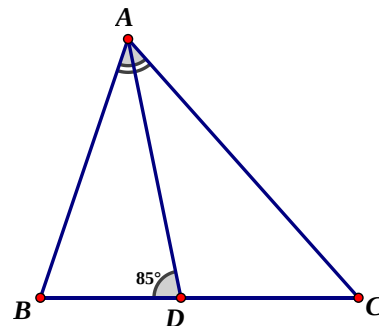
a) Xét $\triangle ADC$ có $\angle ADB$ là góc ngoài tại D

$$\Rightarrow \angle ADB = \angle C + \angle DAC = 85^\circ \quad (1)$$

Xét $\triangle ADB$ có $\angle ADC$ là góc ngoài tại D

$$\Rightarrow \angle ADC = \angle B + \angle BAD = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ \quad (2)$$

Mà $\angle DAC = \angle BAD$ (Vì AD là tia phân giác của góc A)



$\Rightarrow$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow B - C = 95^\circ - 85^\circ = 10^\circ$

b) Vì $B - C = 10^\circ$ mà $4.B = 5.C \Rightarrow \frac{B}{5} = \frac{C}{4} = \frac{B - C}{5 - 4} = 10^\circ$

$\Rightarrow B = 50^\circ$ và $C = 40^\circ \Rightarrow A = 90^\circ$

Câu 8.

a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

$AD = AC$ (gt)

$AE = AB$ (gt)

$\angle BAD = \angle CAE$ (Cùng phụ với $\angle BAC$)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AEC$ (c.g.c)

$\Rightarrow BD = CE$ (Hai cạnh tương ứng)

b) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle NCM$ có $AM = MN$ (gt) ; $BM = CM$ (gt) $\angle AMB = \angle NCM$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle ABM = \triangle NCM$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CN$ (hai cạnh tương ứng)

$ABM = NCM$ (Hai góc tương ứng)

Ta có $\angle ACN = \angle ACB + \angle BCN = \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC$

Lại có $\angle DAE = \angle DAC + \angle BAE - \angle BAC = 180^\circ - \angle BAC$

$\Rightarrow \angle DAE = \angle ACN$

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ACN$ có $CN = AE$ (cùng bằng AB)

$AC = AD$ (gt)

$\angle DAE = \angle ACN$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CAN$ (c.g.c)

c) Vì $\triangle ADE = \triangle CAN$ (cmt) $\Rightarrow \angle NAC = \angle ADE$ (Hai góc tương ứng)

Gọi P là giao điểm của DE và AC

Xét $\triangle ADP$ vuông tại $A \Rightarrow \angle ADE + \angle APD = 90^\circ \Rightarrow \angle NAC + \angle APD = 90^\circ$

$\Rightarrow AI \perp DE$

Xét $\triangle ADI$ vuông tại I . Theo ĐL Pytago ta có $AD^2 = DI^2 + AI^2 \Rightarrow AI^2 = AD^2 - DI^2$

Xét $\triangle AIE$ vuông tại I . Theo ĐL Pytago ta có $AE^2 = AI^2 + IE^2 \Rightarrow AI^2 = AE^2 - IE^2$

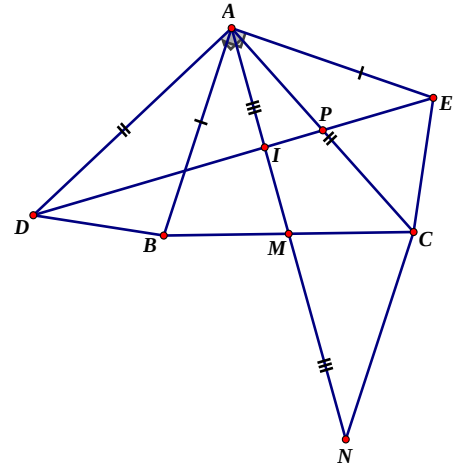
$\Rightarrow AD^2 - DI^2 = AE^2 - IE^2 \Rightarrow AD^2 + IE^2 = DI^2 + AE^2 \Rightarrow \frac{AD^2 + IE^2}{DI^2 + AE^2} = 1$ (đpcm)

Đề số 14

Câu 1.

a) Ta có: $|x| = 1,5 \Rightarrow x = 1,5$ hoặc $x = -1,5$

+) Với $x = 1,5$ và $y = -0,75$ thì



$$P = 1,5 - 4 \cdot 1,5(-0,75) - 0,75 = 1,5(1 + 3) = 6 - 0,75 = 5,25$$

+) Với $x = -1,5$ và $y = -0,75$ thì

$$P = -1,5 - 4(-1,5) \cdot (-0,75) - 0,75 = -1,5(1+3) - 0,75 = -6,75$$

$$b) A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 - 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3-1)} = \frac{1}{3}$$

Câu 2.

$$a) 2x = 3y; 4y = 5z \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10}; \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{15+10+8} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = 5; y = \frac{10}{3}; z = \frac{8}{3}$$

$$b) |x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x \quad (1)$$

Vì VT $\geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0$ hay $x \geq 0$, do đó:

$$|x+1| = x+1; |x+2| = x+2; |x+3| = x+3$$

$$(1) \Rightarrow x+1+x+2+x+3=4x \Rightarrow x=6$$

Câu 3.

$$a) f(0) = 0$$

$$f(-0,5) = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$b) f(-a) = -4(-a)^3 - a = -4a^3 - a$$

$$-f(a) = -[-4a^3 + a] = 4a^3 - a$$

$$\Rightarrow f(-a) = -f(a)$$

Câu 4.

$$\text{Ta có: } x + y = xy \Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x(y-1) = y \Rightarrow x = \frac{y}{y-1}$$

$$\text{vì } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y : y-1 \Rightarrow y-1+1 : y-1 \Rightarrow 1 : y-1,$$

$$\text{do đó } y-1 = \pm 1 \Rightarrow y=2 \text{ hoặc } y=0$$

$$\text{Nếu } y=2 \text{ thì } x=2$$

$$\text{Nếu } y=0 \text{ thì } x=0$$

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ là: $(0;0)$ và $(2;2)$

Câu 5.

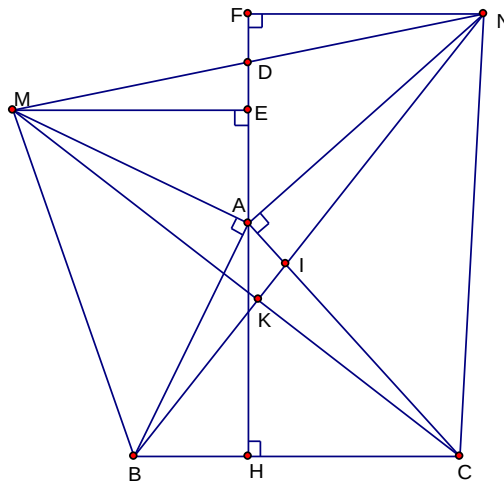
a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$, có:

$$AM = AB \quad (\triangle AMB \text{ vuông cân})$$

$AC = AN$ ($\triangle ACN$ vuông cân)

$\angle MAC = \angle NAC$ ($= 90^\circ + \angle BAC$)

Suy ra $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c - g - c)



b) Gọi I là giao điểm của BN với AC, K là giao điểm của BN với MC.

Xét $\triangle KIC$ và $\triangle AIN$, có:

$\angle ANI = \angle KCI$ ($\triangle AMC = \triangle ABN$)

$\angle AIN = \angle KIC$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \angle IKC = \angle NAI = 90^\circ$, do đó: $MC \perp BN$

c) Kẻ $ME \perp AH$ tại E, $NF \perp AH$ tại F. Gọi D là giao điểm của MN và AH.

- Ta có: $\angle BAH + \angle MAE = 90^\circ$ (vì $\angle MAB = 90^\circ$)

Lại có $\angle MAE + \angle AME = 90^\circ$, nên $\angle AME = \angle BAH$

Xét $\triangle MAE$ và $\triangle ABH$, vuông tại E và H, có:

$\angle AME = \angle BAH$ (chứng minh trên)

$MA = AB$

Suy ra $\triangle MAE = \triangle ABH$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow ME = AH$

- Chứng minh tương tự ta có $\triangle AFN = \triangle CHA$

$\Rightarrow FN = AH$

Xét $\triangle MED$ và $\triangle NFD$, vuông tại E và F, có:

$ME = NF$ ($= AH$)

$\angle EMD = \angle FND$ (phụ với $\angle MDE$ và $\angle FDN$, mà $\angle MDE = \angle FDN$)

$\Rightarrow \triangle MED = \triangle NFD \Rightarrow MD = ND$.

Vậy AH đi qua trung điểm của MN.

Câu 6.

Vì: $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ nên $0 \leq a+b+1+c+2 \leq c+2+c+2+c+2$

$$\Rightarrow 0 \leq 4 \leq 3c+6 \text{ (vì } a+b+c=1)$$

$$\text{Hay } 3c \geq -2 \Rightarrow c \geq -\frac{2}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của c là: $-\frac{2}{3}$ khi đó $a+b = \frac{5}{3}$

Đề số 15

Câu 1.

$$\begin{aligned} 1) A &= \frac{9 \cdot 6^9 \cdot 120 - 4^6 \cdot 9^6}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{12}} = \frac{3^2 \cdot 2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5 - 2^{12} \cdot 3^{12}}{2^{12} \cdot 3^{13} - 2^{12} \cdot 3^{12}} < \\ &= \frac{3^{12} \cdot 2^{12} \cdot 5 - 2^{12} \cdot 3^{12}}{2^{12} \cdot 3^{12} (3-1)} = \frac{3^{12} \cdot 2^{12} (5-1)}{2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 2} \\ &= \frac{5-1}{2} = 2 \end{aligned}$$

Vậy $A=2$

$$\begin{aligned} B &= \frac{10}{7 \cdot 12} + \frac{10}{12 \cdot 17} + \frac{10}{17 \cdot 22} + \dots + \frac{10}{2012 \cdot 2017} + \frac{10}{2017 \cdot 2022} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{5}{7 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{5}{17 \cdot 22} + \dots + \frac{5}{2012 \cdot 2017} + \frac{5}{2017 \cdot 2022} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2017} + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2022} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2022} \right) = 2 \cdot \frac{2022-7}{2022 \cdot 7} = \frac{2015}{7077} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{2015}{7077}$$

2) +) Nếu $a+b+c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

+Nếu $a+b+c=0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 0$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 1$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 1$$

3) Tính giá trị của đa thức

$$f(x) = x^5 - 2018x^4 + 2016x^3 + 2018x^2 - 2016x - 2017 \quad \text{tại } x = 2017$$

$$\text{Ta có } x = 2017 \Rightarrow \begin{cases} 2018 = x+1 \\ 2016 = x-1 \end{cases} \quad \text{Khi đó ta có:}$$

$$\begin{aligned} f(2017) &= x^5 - (x+1)x^4 + (x-1)x^3 + (x+1)x^2 - (x-1)x - x \\ &= x^5 - x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 + x - x \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } f(2017) = 0$$

Câu 2.

$$1) \text{ Theo bài ra ta có: } \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\Rightarrow \frac{12x-8y}{16} = \frac{6z-12x}{9} = \frac{8y-6z}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{16+9+4} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12x-8y=0 \\ 8y-6z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x=8y \\ 8y=6z \end{cases} \Rightarrow 12x=8y=6z$$

$$\Rightarrow \frac{12x}{24} = \frac{8y}{24} = \frac{6z}{24} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \quad (\text{đpcm})$$

2) Áp dụng tính chất $|A| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|x - \frac{1}{2}\right| = 0 \\ \left|y + \frac{2}{3}\right| = 0 \\ |x^2 + xz| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + \frac{2}{3} = 0 \\ x(x+z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2}; y = -\frac{2}{3}; z = -\frac{1}{2}$$

Câu 3.

1) Xét đẳng thức: $49 - y^2 = 12(x - 2001)^2$.

Vế phải là một số chẵn không âm nên y là một số lẻ và không lớn hơn 7

Khi $y = 1 \Rightarrow x = 2003$ và $x = 1999$

Khi $y = 3$ không có giá trị $x \in \mathbb{N}$

Khi $y = 5$ không có giá trị $x \in \mathbb{N}$

Khi $y = 7 \Rightarrow x = 2011$

Vậy các cặp $(x; y)$ cần tìm là $(2003; 1); (1999; 1); (2001; 7)$

2) Ta có

$$|2019x_1 - 2018y_1| \geq 0$$

$$|2019x_2 - 2018y_2| \geq 0$$

...

$$|2019x_{2018} - 2018y_{2018}| \geq 0$$

$$\Rightarrow (2017x_1 - 2016y_1)^2 + (2017x_2 - 2016y_2)^2 + \dots + (2017x_{2018} - 2016y_{2018})^2 \geq 0$$

Theo bài ra ta có:

$$|2019x_1 - 2018y_1| + |2019x_2 - 2018y_2| + \dots + |2019x_{2018} - 2018y_{2018}| \leq 0$$

Suy ra:

$$\begin{cases} |2019x_1 - 2018y_1| = 0 \\ |2019x_2 - 2018y_2| = 0 \\ \vdots \\ |2019x_{2018} - 2018y_{2018}| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2019x_1 = 2018y_1 \\ 2019x_2 = 2018y_2 \\ \vdots \\ 2019x_{2018} = 2018y_{2018} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_{2018}}{y_{2018}} = \frac{2018}{2019} \quad (1)$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_{2018}}{y_{2018}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2018}}{y_1 + y_2 + \dots + y_{2018}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2018}}{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{2018}} = \frac{2018}{2019}$ (đpcm)

3) Gọi chiều dài cuộn vải thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là x, y, z (m) ĐK: $0 < x, y, z < 186$

+) Tổng chiều dài ba cuộn vải đó là $186\text{m} \Rightarrow x + y + z = 186$

+ Sau khi bán được một ngày cửa hàng còn lại $\frac{2}{3}$ cuộn thứ nhất, $\frac{1}{3}$ cuộn thứ hai, $\frac{3}{5}$ cuộn thứ ba

$\Rightarrow$ Trong ngày đó cửa hàng đã bán được số mét vải ở cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là $\frac{x}{3}, \frac{2y}{3}, \frac{2z}{5}$ (mét)

+) Số tiền bán được của ba cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tỉ lệ với 2; 3; 2 và giá tiền mỗi mét vải của ba cuộn như nhau.

$\Rightarrow$ Số mét vải bán được của ba cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tỉ lệ với 2; 3; 2

$$\Rightarrow \frac{x}{3} : \frac{2y}{3} : \frac{2z}{5} = 2 : 3 : 2 \Rightarrow \frac{2x}{12} = \frac{2y}{9} = \frac{2z}{10}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được: $\frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{12+9+10} = \frac{186}{31} = 6$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 72 \\ y = 54 \\ z = 60 \end{cases} \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy trong ngày đó cửa hàng đã bán số mét vải ở cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là : 24; 36; 24 (mét).

Câu 4.

1) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có :

$$AM = EM \quad (\text{gt})$$

$$\angle AMC = \angle EMB \quad (\text{đối đỉnh})$$

$$BM = MC \quad (\text{gt})$$

$$\text{Nên : } \triangle AMC = \triangle EMB \quad (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow AC = EB$$

$$\text{Vì } \triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$$

Mà $\angle MAC$ và $\angle MEB$ là 2 góc có vị trí so le trong

Suy ra $AC \parallel BE$.

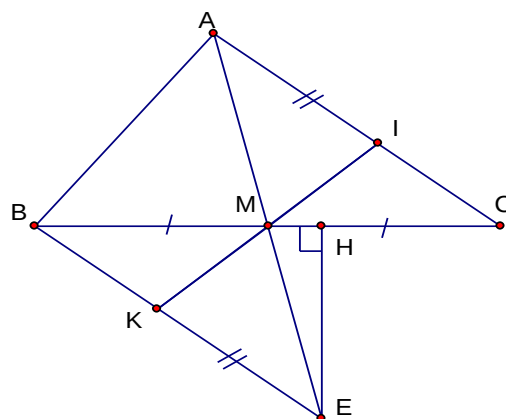
2) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có :

$$AM = EM \quad (\text{gt})$$

$$\angle MAI = \angle MEK \quad (\text{vì } \triangle AMC = \triangle EMB)$$

$$AI = EK \quad (\text{gt})$$

$$\text{Nên } \triangle AMI = \triangle EMK \quad (\text{c.g.c})$$



Suy ra $AMI = EMK$

Mà $AMI + IME = 180^\circ$ (tính chất hai góc kề bù)

$$\Rightarrow EMK + IME = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Ba điểm I;M;K thẳng hàng (đpcm)

3) Trong tam giác vuông BHE ($H = 90^\circ$) có $HBE = 50^\circ$

$$\Rightarrow HBE = 90^\circ - HBE = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow HEM = HEB - MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

BME là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$

$$\text{Nên } BME = HEM + MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$$

(định lý góc ngoài của tam giác)

Câu 5.

Không mất tính tổng quát của bài toán giả sử $x \leq y \leq z$

Vì x, y, z là các số tự nhiên khác 0 $\Rightarrow 1 \leq x \leq y \leq z$

Ta có $x + y + z = xyz$ (*)

$$\Rightarrow \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$$

Thay vào (*) ta được

$$1 + y + z = yz$$

$$\Rightarrow (y-1)(z-1) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-1=1 \\ z-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (1; 2; 3)$$

Vì vai trò của x, y, z như nhau nên các bộ số (x, y, z) thoả mãn bài toán là :

$$(1; 2; 3); (1; 3; 2); (2; 1; 3); (2; 3; 1); (3; 1; 2); (3; 2; 1)$$

Đề số 16

Bài 1.

$$\text{a) + Biến đổi: } A = \frac{7}{5} - \frac{47}{60} : \frac{47}{24}$$

$$= \frac{7}{5} - \frac{2}{5}$$

$$= 1$$

b) + Biến đổi: $16^{20} = 2^{4 \cdot 20} = 2^{80}$

+ Có $2^{80} < 2^{100}$ vì $(1 < 2; 80 < 100)$

Vậy $16^{20} < 2^{100}$

Bài 2.

a) + Ta có $|2x - 7| + \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2} \Rightarrow |2x - 7| = 1$

$\Rightarrow 2x - 7 = 1$ hoặc $2x - 7 = -1$

$\Rightarrow x = 4$ hoặc $x = 3$

Vậy $x = 4$ hoặc $x = 3$.

b) + Biến đổi được $3^n \cdot (3^{-1} + 4) = 13 \cdot 3^5$

$\Rightarrow 3^n = 3^6$

$\Rightarrow n = 6$

KL: Vậy $n = 6$

Bài 3.

+ Biến đổi: $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$

$$\frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

+ Nếu $a + b + c + d \neq 0$ thì $a = b = c = d \Rightarrow Q = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

+ Nếu $a + b + c + d = 0$

thì $a + b = -(c + d); b + c = -(d + a); c + d = -(a + b); d + a = -(b + c)$

$\Rightarrow Q = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$

+ KL : Vậy $Q = 4$ khi $a + b + c + d \neq 0$

$Q = -4$ khi $a + b + c + d = 0$

b) + Ta có: $\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$

$$\frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

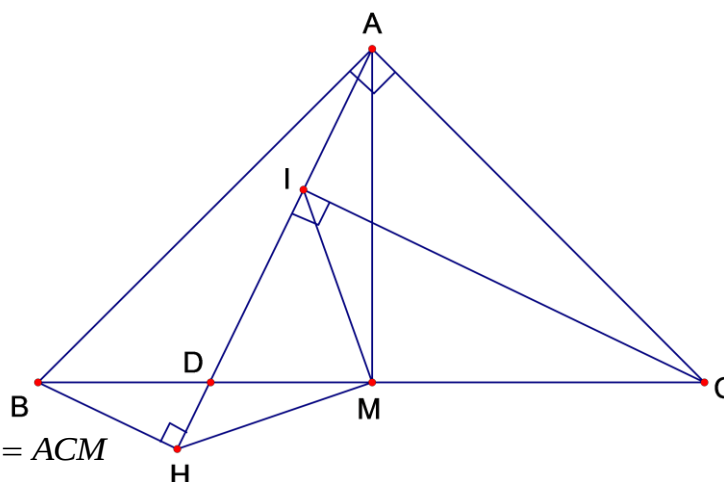
$$\frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t}\right) \Rightarrow M < 2$$

+ Có $M^{10} < 2^{10}$ (Vì $M > 0$) mà $2^{10} = 1024 < 1025$

Vậy $M^{10} < 1025$

Bài 4.



a) * Chứng minh: $BAM = ACM$

+ Chứng minh được: $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c-c-c)

+ Lập luận được: $BAM = CAM = 45^\circ$

+ Tính ra được $ACM = 45^\circ$

$\Rightarrow BAM = ACM$

* Chứng minh: $BH = AI$.

+ Chỉ ra: $BAH = ACI$ (cùng phụ DAC)

+ Chứng minh được $\triangle AIC = \triangle BHA$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = AI$ (2 cạnh tương ứng)

b) Tam giác MHI vuông cân.

+ Chứng minh được $AM \perp BC$

+ Chứng minh được $AM = MC$

+ Chứng minh được $HAM = ICM$

+ Chứng minh được $\triangle HAM = \triangle ICM$ (c-g-c)

$\Rightarrow HM = MI$

(*)

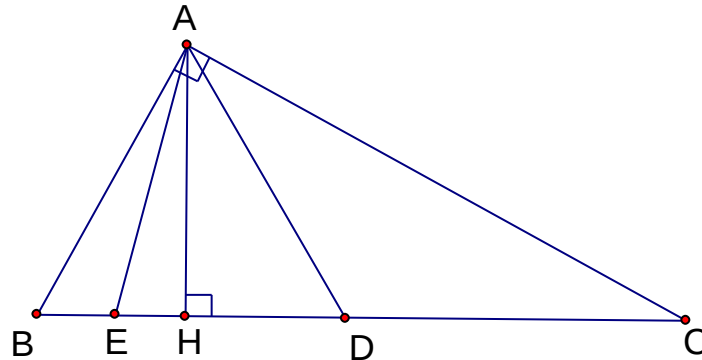
+ Do $\triangle HAM = \triangle ICM \Rightarrow HMA = IMC \Rightarrow HMB = IMA$ (do $AMB = AMC = 90^\circ$)

+ Lập luận được: $HMI = 90^\circ$

(**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \Delta MHI$ vuông cân

2)



+ Chứng minh được :

$$\angle AEC = \angle ABC + \angle BAE = \angle HAD + \angle DAC + \angle BAE = \angle EAH + \angle HAD + \angle DAC = \angle EAC$$

(Vì $\angle B$ và $\angle HAC$ cùng phụ với $\angle BAH$)

Suy ra tam giác AEC cân tại C $\Rightarrow AC = CE$ (*)

+ Tương tự chứng minh được $AB = BD$ (**)

+ Từ (*) và (**) $\Rightarrow AB + AC = BD + EC = ED + BC$

Câu 5.

+) Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow z = -x - y \leq 0$$

$$+) \text{ Vì } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$$

$$+) -1 \leq z \leq 1 \text{ và } z \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

$$\text{KL: Vậy } x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

Đề số 17

Bài 1.

$$\begin{aligned} A &= \frac{(a+b)(-x-y) - (a-y)(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+by)} \\ &= \frac{a(-x-y) + b(-x-y) - a(b-x) + y(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+by)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-ax - ay - bx - by - ab + ax + by - xy}{abxy(xy + ay + ab + by)} \\
&= \frac{-ay - bx - ab - xy}{abxy(xy + ay + ab + by)} \\
&= \frac{-(xy + ay + ab + by)}{abxy(xy + ay + ab + by)} \\
&= \frac{-1}{abxy}
\end{aligned}$$

Với $a = \frac{1}{3}$; $b = -2$; $x = \frac{3}{2}$; $y = 1$ ta được: $A = \frac{-1}{\frac{1}{3} \cdot (-2) \cdot \frac{3}{2} \cdot 1} = 1$

Bài 2.

Ta có: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1) (2) (3) ta được:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$$

Vì $a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0$ nên ta được: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Bài 3.

Gọi diện tích, chiều dài, chiều rộng của các mảnh đất A, B, C theo thứ tự là $S_A, d_A, r_A, S_B, d_B, r_B, S_C, d_C, r_C$.

Theo bài ra ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5} ; \frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8} ; d_A = d_B ; r_A + r_B = 27(\text{m}) ; r_B = r_C ; d_C = 24(\text{m})$$

Hai hình chữ nhật A và B có cùng chiều dài nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều rộng. Ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5} = \frac{r_A}{r_B} \Rightarrow \frac{r_A}{4} = \frac{r_B}{5} = \frac{r_A + r_B}{4 + 5} = \frac{27}{9} = 3$$

$$\Rightarrow r_A = 12(\text{m}) ; r_B = 15(\text{m}) = r_C$$

Hai hình chữ nhật B và C có cùng chiều rộng nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều dài. Ta có:

$$\frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8} = \frac{d_B}{d_C} \Rightarrow d_B = \frac{7d_C}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21(\text{m}) = d_A$$

Do đó: $S_A = d_A \cdot r_A = 21 \cdot 12 = 252(\text{m}^2)$

$$S_B = d_B \cdot r_B = 21 \cdot 15 = 315 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$S_C = d_C \cdot r_C = 24 \cdot 15 = 360 \text{ (m}^2\text{)}$$

Bài 4.

$$\text{a) Ta có: } A = \frac{4x-7}{x-2} = \frac{4(x-2)+1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2}$$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $x-2 \in \mathbb{Z}$.

Để A nguyên thì $\frac{1}{x-2}$ nguyên. $\Rightarrow x-2$ là ước của 1

Ta có: $x-2 = 1$ hoặc $x-2 = -1$. Do đó: $x = 3$ hoặc $x = 1$

Vậy để A nguyên thì $x = 3$ hoặc $x = 1$

$$\text{+) } B = \frac{3x^2-9x+2}{x-3} = \frac{3x(x-3)+2}{x-3} = 3x + \frac{2}{x-3}$$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $x-3 \in \mathbb{Z}$.

Để B nguyên thì $\frac{2}{x-3}$ nguyên. $\Rightarrow x-3$ là ước của 2

Ta có: $x-3 = \pm 2$ hoặc $x-3 = \pm 1$.

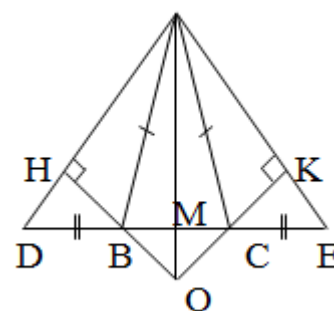
Do đó $x = 5$; $x = 1$; $x = 4$; $x = 2$

Vậy để B nguyên thì $x = 5$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = 4$ hoặc $x = 2$

b) Từ câu a) suy ra: Để A và B cùng nguyên thì $x = 1$

Bài 5.

	ΔABC có $AB = AC$.
GT	$DB = CE$ ($D \in$ tia đối của CB ; $E \in$ tia đối của BC)
	a) ΔADE cân
	b) $MB = MC$, chứng minh AM
KL	là tia phân giác góc DAE
	c) $BH \perp AD = H$; $CK \perp AE = K$ chứng minh: $BH = CK$
	d) $AM \cap BH \cap CK$ tại 1 điểm



a) ΔABC cân có $AB = AC$ nên: $\angle ABC = \angle ACB$

Suy ra: $\angle ABD = \angle ACE$

Xét ΔABD và ΔACE có:

$AB = AC$ (gt)

$$ABD = ACE \text{ (CM trên)}$$

$$DB = CE \text{ (gt)}$$

$$\text{Do đó } \triangle ABD = \triangle ACE \text{ (c - g - c)}$$

$\Rightarrow AD = AE$ (2 cạnh tương ứng). Vậy $\triangle ADE$ cân tại A.

b) Xét $\triangle AMD$ và $\triangle AME$ có:

$$MD = ME \text{ (Do } DB = CE \text{ và } MB = MC \text{ theo gt)}$$

AM: Cạnh chung

$$AD = AE \text{ (CM trên)}$$

$$\text{Do đó } \triangle AMD = \triangle AME \text{ (c - c - c)}$$

$$\Rightarrow \angle MAD = \angle MAE.$$

Vậy AM là tia phân giác của $\angle DAE$

c) Vì $\triangle ADE$ cân tại A (CM câu a)). Nên $\angle ADE = \angle AED$

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle CKE$ có:

$$\angle BDH = \angle CEK \text{ (Do } \angle ADE = \angle AED)$$

$$DB = CE \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle BHD = \triangle CKE \text{ (Cạnh huyền- góc nhọn)}$$

$$\text{Do đó: } BH = CK.$$

d) Gọi giao điểm của BH và CK là O.

Xét $\triangle AHO$ và $\triangle AKO$ có:

OA: Cạnh chung

$$AH = AK \text{ (Do } AD = AE; DH = KE \text{ (vì } \triangle BHD = \triangle CKE))}$$

$$\Rightarrow \triangle AHO = \triangle AKO \text{ (Cạnh huyền- Cạnh góc vuông)}$$

Do đó $\angle OAH = \angle OAK$ nên AO là tia phân giác của $\angle KAH$ hay AO là tia phân giác của $\angle DAE$.

Mặt khác theo câu b) AM là tia phân giác của $\angle DAE$.

Do đó $AO \equiv AM$, suy ra 3 đường thẳng AM; BH; CK cắt nhau tại O.

Đề số 18

Câu 1.

$$\text{a) Ta có: } \sqrt{17} > \sqrt{16}; \sqrt{26} > \sqrt{25} \Rightarrow \sqrt{17} + \sqrt{26} + 1 > \sqrt{16} + \sqrt{25} + 1 = 4 + 5 + 1 = 10$$

$$\text{Mà } 10 = \sqrt{100} > \sqrt{99}$$

$$\text{Vậy: } \sqrt{17} + \sqrt{26} + 1 > \sqrt{99}.$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \dots; \frac{1}{\sqrt{99}} > \frac{1}{\sqrt{100}}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}} = 10$$

Vậy: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có: } P &= \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2014}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} = S. \end{aligned}$$

Do đó $(S - P)^{2016} = 0$

Câu 2.

a) Vì p chia cho 42 có số dư là r nên: $p = 42k + r$ ($0 < r < 42$, k, r tự nhiên)

Hay $p = 2.3.7k + r$.

Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2; 3; 7

$\Rightarrow r$ là hợp số không chia hết cho 2; 3; 7 và $r < 42$

Học sinh chỉ ra được $r = 25$

Vậy hợp số $r = 25$

b) Ta có: $(a + b)^3 = \overline{ab}^2$ là số chính phương nên $a + b$ là số chính phương.

Đặt $a + b = x^2$ ($x \in \mathbb{N}^*$)

Suy ra: $\overline{ab}^2 = (a + b)^3 = x^6$

$\Rightarrow x^3 = \overline{ab} < 100$ và $\overline{ab} > 8 \Rightarrow 8 < x^3 < 100 \Rightarrow 2 < x < 5 \Rightarrow x = 3; 4$ vì $x \in \mathbb{N}^*$

- Nếu $x = 3 \Rightarrow \overline{ab}^2 = (a + b)^3 = 3^6 = 729 = 27^2 = (2 + 7)^3 \Rightarrow x = 3$ (nhận)

- Nếu $x = 4 \Rightarrow \overline{ab}^2 = (a + b)^3 = 4^6 = 4096 = 64^2 \neq (6 + 4)^3 = 1000$

$\Rightarrow x = 4$ (không thỏa mãn)

Vậy số cần tìm là: $\overline{ab} = 27$

Câu 3.

$$\text{a) Ta có: } B = \left(1 - \frac{z}{x}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) = \frac{x-z}{x} \cdot \frac{y-x}{y} \cdot \frac{z+y}{z}$$

Từ: $x - y - z = 0 \Rightarrow x - z = y; y - x = -z$ và $y + z = x$

$$\text{Suy ra: } B = \frac{y}{x} \cdot \frac{-z}{y} \cdot \frac{x}{z} = -1 (x; y; z \neq 0)$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{4(3x-2y)+3(2z-4x)+2(4y-3z)}{16+9+4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \quad (1) \quad \text{và} \quad \frac{3(2z-4x)}{9} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

c) Ta có: $M = \frac{5-x}{x-2} = \frac{3-(x-2)}{x-2} = \frac{3}{x-2} - 1 \quad (x \neq 2)$

M nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{3}{x-2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x-2$ lớn nhất và $x-2 < 0$

$\Leftrightarrow x$ lớn nhất và $x < 2 \Leftrightarrow x = 1$ (vì x nguyên)

Khi đó GTNN của M là: $M = \frac{3}{1-2} - 1 = -4$ khi $x = 1$

Câu 4.

a) Chứng minh: $KC = KA$

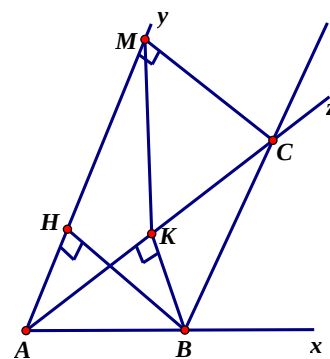
Ta có $yAz = zAx = 30^\circ$ (Az là tia phân giác của xAy)

Mà: $yAz = ACB$ ($Ay \parallel BC$, so le trong)

$$\Rightarrow zAx = ACB \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } B$$

Trong tam giác cân ABC có BK là đường cao ứng với cạnh đáy

$$\Rightarrow BK \text{ cũng là đường trung tuyến của } \triangle ABC \Rightarrow KC = KA$$



b) Chứng minh: $BH = \frac{AC}{2}$

Ta có: $\angle ABH = 90^\circ - \angle xAy = 30^\circ$ ($\triangle ABH$ vuông tại H).

Xét hai tam giác vuông $\triangle ABH$ và $\triangle BAK$, có:

AB : Cạnh chung; $\angle zAx = \angle ABH (= 30^\circ)$

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle BAK \Rightarrow BH = AK$$

Mà: $AK = \frac{AC}{2}$ (cmt) $\Rightarrow BH = \frac{AC}{2}$

c) Chứng minh: $\triangle KMC$ đều

Ta có: $\triangle AMC$ vuông tại M có MK là trung tuyến ứng với cạnh huyền

$$\Rightarrow KM = AC/2 \quad (1)$$

Mà: $AK = KC = AC/2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KM = KC \Rightarrow \triangle KMC$ cân tại K $\quad (3)$

Mặt khác: $\triangle AMC$ có $\angle AMC = 90^\circ$; $yAz = 30^\circ \Rightarrow \angle MCK = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \quad (4)$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \Delta AMC$ đều

Câu 5.

Ta có: $B = 2.C \Rightarrow B > C$ nên $AC > AB \Rightarrow HC > HB$

Trên đoạn thẳng HC lấy điểm I sao cho $IH = HB \Rightarrow$

$$\Delta A_{HI} = \Delta A_{HB}$$
$$\Rightarrow AI = AB \text{ v\grave{a}} AIB = ABC = 2.ACB$$

Mặt khác: $AIB = ACB + IAC \Rightarrow IAC = ACB$

Do đó: $IA = IC < HC$ hay $AB < HC = AD$

Gọi K là giao điểm của DH với AC .

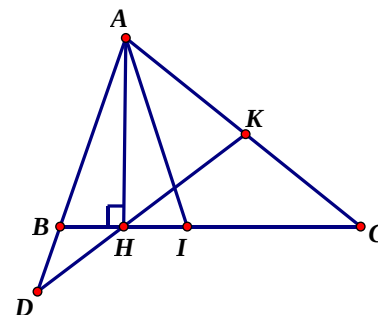
Vì $AD = HC$, $AB = IC$ nên $BD = HI = HB \Rightarrow \triangle DBH$ cân tại B

Do đó: $BDH = BHD = \frac{1}{2}ABC = ACB$

Suy ra: $KHC = ACB (= BHD) \Rightarrow KAH = KHA$ (phụ hai góc bằng nhau)

Suy ra: $KA = KH = KC$ hay K là trung điểm của AC

Vậy đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC



Đề số 19

Câu 1.

a) Ta có:

$$A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{7}\right) + 7,5 = \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2}\right) : \left(\frac{-25}{6} + \frac{22}{7}\right) + \frac{15}{2}$$

$$= \frac{35}{6} : \frac{-43}{42} + \frac{15}{2} = \frac{-245}{43} + \frac{15}{2} = \frac{-490}{86} + \frac{645}{86} = \frac{155}{86}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2 \times 8^4 \times 27^2 + 4 \times 6^9}{2^7 \times 6^7 + 2^7 \times 40 \times 9^4} = \frac{2^{13} \times 3^6 + 2^{11} \times 3^9}{2^{14} \times 3^7 + 2^{10} \times 3^8 \times 5} \\ &= \frac{2^{11} \times 3^6 \times (2^2 + 3^3)}{2^{10} \times 3^7 \times (2^4 + 3 \times 5)} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

c) Ta có:

$$M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

Ta có $(2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \leq 0$

Ta có :
$$\begin{cases} (2x-5)^{2012} \geq 0 \\ (3y+4)^{2014} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \geq 0$$

Mà $(2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \leq 0 \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2012} = 0 \\ (3y+4)^{2014} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases} \cdot \text{Vậy} \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \times \frac{5}{2} \times \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$

Câu 2.

a) Ta có: $\frac{1}{2} - \left|x + \frac{1}{5}\right| = \frac{1}{3} \quad \left|x + \frac{1}{5}\right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad \left|x + \frac{1}{5}\right| = \frac{1}{6}$

TH1: $x + \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{30}$

TH2: $x + \frac{1}{5} = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{11}{30}$

Vậy $x = -\frac{1}{30}; x = -\frac{11}{30}$

b) Ta có : $2x = 3y$ suy ra $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$ hay $\frac{x}{15} = \frac{y}{10}$

$4y = 5z$ suy ra $\frac{y}{5} = \frac{z}{4}$ hay $\frac{y}{10} = \frac{z}{8}$

Vậy $\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{15+10+8} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

Suy ra $x = 5, y = \frac{10}{3}, z = \frac{8}{3}$

c) Ta có: $(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$

$(x+2)^{n+1} - (x+2)^{n+11} = 0$

$(x+2)^{n+1} \left[1 - (x+2)^{10} \right] = 0$

TH 1: $(x+2)^{n+1} = 0$ suy ra $x = -2$

TH2: $1 - (x+2)^{10} = 0$

$(x+2)^{10} = 1$

$x+2 = 1$ suy ra $x = -1$

$$x + 2 = -1 \text{ suy ra } x = -3$$

$$\text{Vậy } x = -2; x = -1; x = -3$$

Câu 3.

a) Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là x, y, z (cm) ($x, y, z > 0$)

Theo bài ra ta có : $x + y + z = 13$

$$\text{và } 2x = 3y = 4z = 2 S_{ABC}$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{13}{13} = 1$$

$$\text{suy ra } x = 6, y = 4; z = 3$$

$$\text{KL: } x = 6, y = 4, z = 3.$$

b) Ta có: $2xy - x - y = 2$

$$4xy - 2x - 2y = 4$$

$$2x(2y-1) - 2y + 1 = 5$$

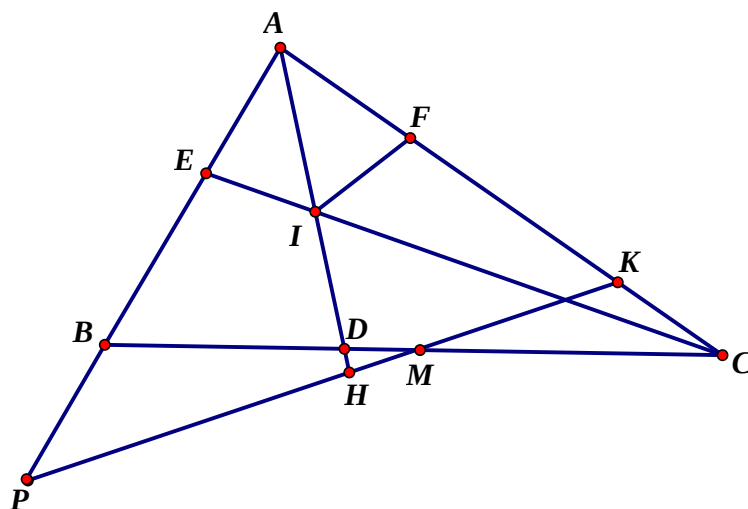
$$(2y-1)(2x-1) = 5$$

$$\text{HS xét 4 trường hợp tìm ra } (x, y) = \{(1; 3); (3; 1); (-2; 0); (0; -2)\}$$

(Mỗi trường hợp đúng cho 0.25 đ)

$$\text{Vậy } (x, y) = \{(1; 3); (3; 1); (-2; 0); (0; -2)\}$$

Câu 4.



a/ Ta có $\angle ABC = 60^\circ$ suy ra $\angle BAC + \angle BCA = 120^\circ$

AD là phân giác của $\angle BAC$ suy ra $\angle IAC = \frac{1}{2} \angle BAC$

CE là phân giác của $\angle ACB$ suy ra $\angle ICA = \frac{1}{2} \angle BCA$

$$\text{Suy ra } \angle IAC + \angle ICA = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$$

$$\text{Vậy } \angle AIC = 120^\circ$$

b/ Xét $\triangle AHP$ và $\triangle AHK$ có

$$\angle PAH = \angle KAH \text{ (AH là phân giác của } \angle BAC)$$

AH chung

$$\angle PHA = \angle KHA = 90^\circ$$

Suy ra $\triangle AHP = \triangle AHK$ (g-c-g) suy ra $PH = KH$ (2 cạnh tương ứng). Vậy $HK = 3\text{cm}$

Vì $\triangle AHK$ vuông ở H theo định lý Pitago ta có

$$AK^2 = AH^2 + HK^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$\text{Suy ra } AK = 5\text{ cm}$$

$$\text{Vì } \angle AIC = 120^\circ$$

$$\text{Do đó } \angle AIE = \angle DIC = 60^\circ$$

Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $AF = AE$

Xét $\triangle EAI$ và $\triangle FAI$ có

$$AE = AF$$

$$\angle EAI = \angle FAI$$

AI chung

$$\text{Vậy } \triangle EAI = \triangle FAI \text{ (c-g-c)}$$

suy ra $IE = IF$ (hai cạnh tương ứng) (1)

$$\angle AIE = \angle AIF = 60^\circ \text{ suy ra } \angle FIC = \angle AIC - \angle AIF = 60^\circ$$

Xét $\triangle DIC$ và $\triangle FIC$ có

$$\angle DIC = \angle FIC = 60^\circ$$

Cạnh IC chung

$$\angle DIC = \angle FCI$$

$$\text{Suy ra } \triangle DIC = \triangle FIC \text{ (g-c-g)}$$

$$\text{Suy ra } ID = IF \text{ (hai cạnh tương ứng) (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle IDE$ cân tại I

Câu 5.

Giả sử $\sqrt{10}$ là số hữu tỷ

$$\sqrt{10} = \frac{a}{b} \text{ (a, b là số tự nhiên, b khác 0; (a; b) = 1)}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = 10$$

$$\text{Suy ra } a^2 = 10b^2$$

$$a : 2 \Rightarrow a^2 : 4 \Rightarrow 10b^2 : 4 \Rightarrow b^2 : 2 \Rightarrow b : 2$$

Vậy $(a;b) \neq 1$

Nên $\sqrt{10}$ là số vô tỷ

Đề số 20

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } M &= \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2017}{2018} \\ &= \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2017}{2018} \\ &= \left(\frac{2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)}{7\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)}{\frac{7}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)} \right) : \frac{2017}{2018} \\ &= \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right) : \frac{2017}{2018} = 0 \end{aligned}$$

b) Có $|2018 - x| \geq 0$ và

$$|2017 - x| + |2019 - x| = |x - 2017| + |2019 - x| \geq |x - 2017 + 2019 - x| = 2$$

$$\Rightarrow |2017 - x| + |2018 - x| + |2019 - x| \geq 2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2017)(2019 - x) \geq 0$ và $2018 - x = 0$, suy ra: $2017 \leq x \leq 2019$ và $x = 2018 \Rightarrow x = 2018$

Vậy $x = 2018$.

Câu 2.

a) Vì a, b, c là các số dương nên $a + b + c \neq 0$

Nên theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a+b-c}{c} &= \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1 \\ \Rightarrow \frac{a+b-c}{c} + 1 &= \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2 \\ \Rightarrow \frac{a+b}{c} &= \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Mà: } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{a+b}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

Vậy: $B = 8$

b) HS biết tìm nghiệm của $f(x) = (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -3$

Nghiệm của $f(x)$ cũng là nghiệm của $g(x) = x^3 - ax^2 + bx - 3$ nên:

Thay $x = 1$ vào $g(x)$ ta có: $1 - a + b - 3 = 0$

Thay $x = -3$ vào $g(x)$ ta có: $-27 - 9a - 3b - 3 = 0$

Từ đó HS biến đổi và tính được: $a = -3; b = -1$

c) Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ nên giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

$$\text{Theo bài ra: } 1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

Suy ra: $x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$

Thay vào đầu bài ta có:

$$1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$$

$$\Rightarrow y(1 - z) - (1 - z) + 2 = 0$$

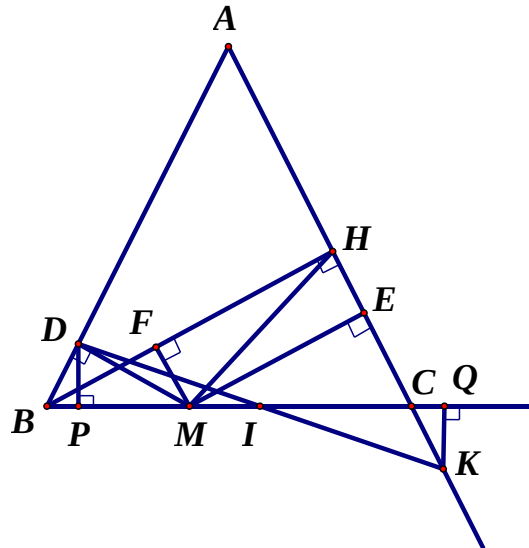
$$\Rightarrow (y - 1)(z - 1) = 2$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} y - 1 = 1 \\ z - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} y - 1 = 2 \\ z - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \text{ (loại)}$$

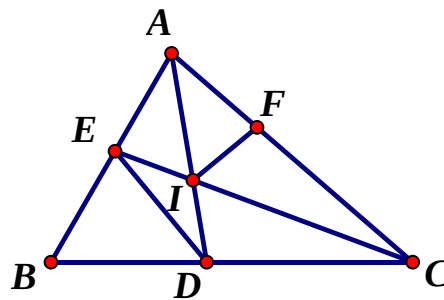
Vậy $(x; y; z) = (1; 2; 3)$ và các hoán vị

Câu 3.



- a) Chứng minh được $\triangle DBM = \triangle FMB$ (ch-gn)
 b) Theo câu a ta có: $\triangle DBM = \triangle FMB$ (ch-gn) $\Rightarrow MD = BF$ (2 cạnh tương ứng) (1)
 +) C/m: $\triangle MFH = \triangle HEM \Rightarrow ME = FH$ (2 cạnh tương ứng) (2)
 Từ (1) và (2) suy ra: $MD + ME = BF + FH = BH$
 BH không đổi $\Rightarrow MD + ME$ không đổi (đpcm)
 c) Vẽ $DP \perp BC$ tại P, $KQ \perp BC$ tại Q, gọi I là giao điểm của DK và BC
 +) Chứng minh: $BD = FM = EH = CK$
 +) Chứng minh: $\triangle BDP = \triangle CKQ$ (ch-gn) $\Rightarrow DP = KQ$ (cạnh tương ứng)
 +) Chứng minh: $IDP = IKQ \Rightarrow \triangle DPI = \triangle KQI$ (g-c-g) $\Rightarrow ID = IK$ (đpcm)

Câu 4.



- Ta có $\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle BAC + \angle BCA = 120^\circ$
 AD là phân giác của $\angle BAC$ suy ra $\angle IAC = \frac{1}{2} \angle BAC$
 CE là phân giác của $\angle ACB$ suy ra $\angle ICA = \frac{1}{2} \angle BCA$
 Suy ra $\angle IAC + \angle ICA = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow \angle AIC = 120^\circ$

Do đó $\widehat{AIE} = \widehat{DIC} = 60^\circ$

Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $AF = AE$

Xét $\triangle EAI$ và $\triangle FAI$ có:

$$AE = AF$$

$$\widehat{EAI} = \widehat{FAI}$$

AI chung

Vậy $\triangle EAI = \triangle FAI$ (c-g-c)

suy ra $IE = IF$ (hai cạnh tương ứng) (1)

$$\widehat{AIE} = \widehat{AIF} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{FIC} = \widehat{AIC} - \widehat{AIF} = 60^\circ$$

Chứng minh $\triangle DIC = \triangle FIC$ (g-c-g)

Suy ra $ID = IF$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle IDE$ cân tại I

Câu 5.

$$\text{Có } S_n = 1 - \frac{1}{1^2} + 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$= (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\text{Do } A > 0 \text{ nên } S_n < n-1$$

$$\text{Mặt khác } A < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow S_n > (n-1) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = n-2 + \frac{1}{n} > n-2 \text{ (do } \frac{1}{n} > 0)$$

$$\Rightarrow n-2 < S_n < n-1 \text{ nên } S_n \text{ không là số nguyên}$$

Đề số 21

Câu 1:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5 = \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2}\right) : \left(-\frac{25}{6} + \frac{15}{7}\right) + \frac{15}{2} \\ &= \frac{35}{6} : \frac{-85}{42} + \frac{15}{2} = \frac{35}{6} \cdot \frac{-42}{85} + \frac{15}{2} = \frac{-49}{17} + \frac{15}{2} = \frac{157}{34} \end{aligned}$$

$$\text{b) } B = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4} = \frac{2 \cdot (2^3)^4 \cdot (3^3)^2 + 2^2 \cdot 2^9 \cdot 3^9}{2^7 \cdot 2^7 \cdot 3^7 + 2^7 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot (3^2)^4} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 + 2^{11} \cdot 3^9}{2^{14} \cdot 3^7 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5}$$

$$= \frac{2^{11} \cdot 3^6 \cdot (2^2 + 3^3)}{2^{10} \cdot 3^7 \cdot (2^4 + 3 \cdot 5)} = \frac{2}{3}$$

$$c) M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

$$\text{Ta c\ddot{a}} : \begin{cases} (2x-5)^{2018} \geq 0 \\ (3y+4)^{2020} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \geq 0$$

$$M_{\min} (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \leq 0 \Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2018} = 0 \\ (3y+4)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases} \text{ . Thay vào ta được:}$$

$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$$

Câu 2:

$$a) -\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{5}x + \frac{5}{4}x = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{6}{5} + \frac{5}{4}\right)x = \frac{13}{14} \Leftrightarrow \frac{49}{20}x = \frac{13}{14} \Leftrightarrow x = \frac{130}{343}, \text{ Vậy } x = \frac{130}{343}$$

$$b) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2x+1} = \frac{98}{99} \Rightarrow \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{99}$$

$$\Rightarrow 2x+1 = 99 \Rightarrow 2x = 98 \Rightarrow x = 49. \text{ Vậy } x = 49$$

$$c) 2xy - x - y = 2 \Leftrightarrow 4xy - 2x - 2y = 4 \Leftrightarrow 2x(2y-1) - 2y+1 = 5 \Leftrightarrow (2y-1)(2x-1) = 5$$

$$\text{HS xét 4 trường hợp tìm ra } (x,y) = \{(1;3);(3;1);(-2;0);(0;-2)\}$$

$$\text{Vậy } (x,y) = \{(1;3);(3;1);(-2;0);(0;-2)\}$$

Câu 3: a) Do tổng, hiệu và tích của x và y lần lượt tỉ lệ nghịch với 35; 210; 12.

$$\text{Ta có } (x+y) \cdot 35 = (x-y) \cdot 210 = 12 \cdot xy$$

$$\text{Từ } (x+y) \cdot 35 = (x-y) \cdot 210 \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} = \frac{2x}{245} = \frac{2y}{175} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \Rightarrow$$

$$x = \frac{7y}{5} \text{ thay vào đẳng thức } (x+y) \cdot 35 = 12 \cdot xy \text{ ta được}$$

$$\Rightarrow y^2 - 5y = 0 \Rightarrow y(y-5) = 0 \Rightarrow y \in \{0;5\} \text{ mà } y > 0 \text{ nên } y = 5$$

$$\text{Với } y = 5 \text{ thì } x = 7.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x}{y+z+t} &= \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z} \Rightarrow \frac{y+z+t}{x} = \frac{z+t+x}{y} = \frac{t+x+y}{z} = \frac{x+y+z}{t} \\ &\Rightarrow \frac{y+z+t}{x} + 1 = \frac{z+t+x}{y} + 1 = \frac{t+x+y}{z} + 1 = \frac{x+y+z}{t} + 1 \\ &\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x} = \frac{z+t+x+y}{y} = \frac{t+x+y+z}{z} = \frac{x+y+z+t}{t} \end{aligned}$$

Nếu $x+y+z+t=0$ thì $P=-4$

Nếu $x+y+z+t \neq 0$ thì $x=y=z=t \Rightarrow P=4$

Vậy P nguyên

$$\text{c) Ta có } a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3$$

Mà $3c^3 - 15d^3 : 3$ nên $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 : 3$ (1)

Dư trong phép chia a cho 3 là $\{0; \pm 1\}$ suy ra dư trong phép chia a^3 cho 3 cũng là $\{0; \pm 1\}$ hay $a \equiv a^3 \pmod{3}$

Tương tự ta có $b \equiv b^3 \pmod{3}; c \equiv c^3 \pmod{3}; d \equiv d^3 \pmod{3}$

$$\Rightarrow a+b+c+d \equiv a^3+b^3+c^3+d^3 \pmod{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a+b+c+d$ chia hết cho 3

Câu 4: a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có : $AM = EM$ (gt)

$$\angle AMC = \angle EMB \text{ (đối đỉnh)}$$

$$BM = MC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle EMB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AC = EB \text{ (Hai}$$

cạnh tương ứng)

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$ mà 2 góc này ở vị trí so le trong Suy ra $AC \parallel BE$.

b) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có : $AM = EM$ (gt)

$$\angle MAI = \angle MEK \text{ (vì}$$

$$\triangle AMC = \triangle EMB)$$

$$AI = EK \text{ (gt)}$$

$$\text{Nên } \triangle AMI = \triangle EMK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle AMI = \angle EMK$$

$$\text{Mà } \angle AMI + \angle IME = 180^\circ \text{ (tính chất hai góc kề bù)}$$

$$\Rightarrow \angle EMK + \angle IME = 180^\circ \Rightarrow \text{Ba điểm I; M; K thẳng hàng}$$

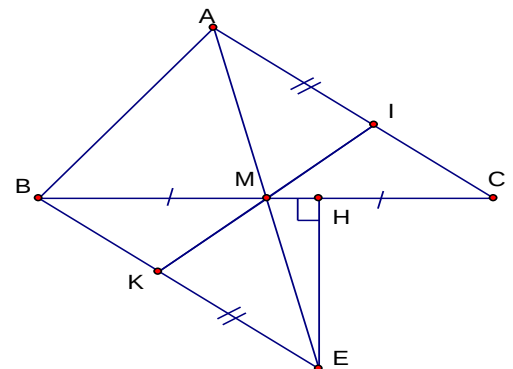
c) Trong tam giác vuông BHE ($\angle H = 90^\circ$) có $\angle HBE = 50^\circ$

$$\Rightarrow \angle HBE = 90^\circ - \angle HEB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ \Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ \text{ } \angle BME \text{ là góc ngoài tại đỉnh M của } \triangle HEM$$

$$\Rightarrow \angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$$

$$\text{Câu 5: Ta có: } B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$$

$$B = 49 - \left(1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{8}{9} + 1 - \frac{15}{16} + 1 - \frac{24}{25} + \dots + 1 - \frac{2499}{2500} \right)$$



$$B = 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) = 49 - M$$

$$\text{Trong đó } M = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right)$$

$$\text{Áp dụng tính chất } \frac{1}{(n+1)n} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$$

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) < \left(\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{50 \cdot 49} \right)$$

$$M < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = 1 - \frac{1}{50} < 1$$

Ta lại có:

$$M > \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{50 \cdot 51} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{50} - \frac{1}{51}$$

$$M > \frac{1}{2} - \frac{1}{51} = \frac{49}{101} > 0$$

Từ đó suy ra $0 < M < 1 \Rightarrow B = 49 - M$ không phải là một số nguyên.

Đề số 22

Câu 1

a/ (2đ)

Thực hiện phép tính

$$A = 1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2015}$$

Ta có:

$$5A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2015} + 5^{2016}$$

$$A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2015}$$

$$\text{Trừ theo vế: } 5A - A = 5^{2016} - 1$$

$$\text{Vậy: } A = \frac{5^{2016} - 1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{b/ (2 đ). Tính } B &= \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20} \\ &= \frac{(2^2)^5 \cdot (3^2)^4 - 2 \cdot (2 \cdot 3)^9}{2^{10} \cdot 3^8 + (2 \cdot 3)^8 \cdot 2^2 \cdot 5} \\ &= \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} \\ &= \frac{2^{10} \cdot 3^8 (1 - 3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1 + 5)} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Câu 2.

a. Tìm x để biểu thức $P = 1 + \frac{9}{3 + |x - 5|}$ đạt giá trị lớn nhất.

Để P đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{9}{3 + |x - 5|}$ đạt GTLN khi và chỉ khi

$3 + |x - 5|$ đạt GTNN mà $|x - 5| \geq 0$ dấu "=" khi $x = 5$

Vậy GTLN của $P = 4$ khi $x = 5$

b. Tìm giá trị của x biết : $|2x - 1| = 2$.

TH1: Xét với $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0,5$ ta có:

$$|2x - 1| = 2 \Rightarrow 2x - 1 = 2 \Rightarrow x = 1,5 \text{ (thỏa mãn đk)}$$

TH2: Xét với $2x - 1 < 0 \Rightarrow x < 0,5$ ta có

$$|2x - 1| = 2 \Rightarrow -2x + 1 = 2 \Rightarrow x = -0,5 \text{ (thỏa mãn đk)}$$

Vậy có hai giá trị phù hợp : $x = 1,5; x = -0,5$

c. Cho 4 số a, b, c, d trong đó b là trung bình cộng của a và c đồng thời $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} \right)$.

Chứng minh bốn số đó lập thành tỉ lệ thức.

Vì $b = \frac{a + c}{2}$ nên $2b = a + c$

Mặt khác : $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} \right) = \frac{b + d}{2bd}$ hay $2bd = bc + cd$

hay $ad + cd = bc + cd$ do đó $ad = bc$ hay bốn số lập thành tỉ lệ thức

Câu 3.

Gọi số học sinh của nhóm I, II, III lần lượt là x, y, z (x, y, z nguyên dương)

Theo đề bài ta có:

$$\frac{2}{3}x = \frac{8}{11}y = \frac{4}{5}z \text{ chia các tỉ số trên cho BCNN}(2,4,8)=8 \text{ ta được}$$

$$\frac{2.x}{3.8} = \frac{8.y}{11.8} = \frac{4.z}{5.8} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10}$$

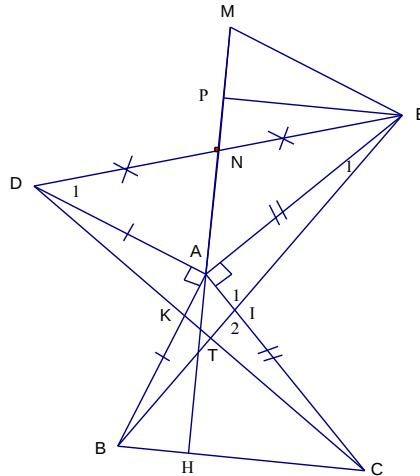
Mặt khác : $y + z - x = 18$

Áp dụng tính chất dãy các tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10} = \frac{y + z - x}{11 + 10 - 12} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 12.2 = 24 \\ y = 11.2 = 22 \\ z = 10.2 = 20 \end{cases}$$

Vậy số học sinh: Nhóm I là 24; nhóm II là 22, nhóm III là 20

Câu 4.



Vẽ hình đúng đến câu a

a/ Chứng minh được $\triangle DAC = \triangle BAE$ (c.g.c)

$$\Rightarrow DC = BE$$

Xét $\triangle AIE$ và $\triangle TIC$ có :

$$\widehat{I_1} = \widehat{I_2} \text{ (đđ)}$$

$$\widehat{E_1} = \widehat{C_1} \text{ (do } \triangle DAC = \triangle BAE \text{)}$$

$$\Rightarrow \widehat{EAI} = \widehat{CTI}$$

$$\Rightarrow \widehat{CTI} = 90^\circ \Rightarrow DC \perp BE$$

b/ Chứng minh được $\triangle MNE = \triangle AND$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{MEN}, AD = ME$$

$$\text{mà } AD = AB \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow AB = ME \text{ (đpcm) (1)}$$

$$\text{Vì } \widehat{D_1} = \widehat{MEN} \Rightarrow DA \parallel ME \Rightarrow \widehat{DAE} + \widehat{AEM} = 180^\circ \text{ (trong cùng phía)}$$

$$\text{mà } \widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{AEM} \text{ (2)}$$

Ta lại có: $AC = AE$ (gt) (3). Từ (1),(2) và (3) $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle EMA$ (đpcm)

c/ Kéo dài MA cắt BC tại H. Từ E hạ $EP \perp MH$

Xét $\triangle AHC$ và $\triangle EPA$ có:

$$\widehat{CAH} = \widehat{AEP} \text{ (do cùng phía với góc PAE)}$$

$$AE = CA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{PAE} = \widehat{HCA} \text{ (do } \triangle ABC = \triangle EMA \text{ câu b)}$$

$$\Rightarrow \triangle AHC = \triangle EPA \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow EPA = AHC$$

$$\Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow MA \perp BC \text{ (đpcm)}$$

Câu 5.

Ta có a, b, c, d là các số nguyên từ 0 đến 9; a, c khác 0

Là số chính phương nên $\overline{abcd} = n^2$ và $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$

$$\text{Hay } n^2 = \overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100(\overline{cd} + 1) + \overline{cd} = 101\overline{cd} + 100$$

Suy ra $n^2 - 100 = (n - 10)(n + 10) = 101\overline{cd}$, n^2 là số có 4 chữ số vậy $n < 100$ do đó $n + 10 = 101$

$$\text{suy ra } n = 91 \text{ và } n^2 = \overline{abcd} = 91^2 = 8281$$

Đề số 23**Bài 1.**

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{155 - \frac{10}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{23}}{403 - \frac{26}{7} - \frac{13}{11} + \frac{13}{23}} + \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{13} - 0,9}{\frac{7}{91} + 0,2 - \frac{3}{10}} = \frac{5\left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23}\right)}{13\left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23}\right)} + \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{13} - \frac{9}{10}}{\frac{1}{13} + \frac{1}{5} - \frac{3}{10}} \\ &= \frac{5\left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23}\right)}{13\left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23}\right)} + \frac{3\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{13} - \frac{3}{10}\right)}{\frac{1}{5} + \frac{1}{13} - \frac{3}{10}} \\ &= \frac{5}{13} + 3 = 3\frac{5}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 7^3 \cdot 2^3} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3 + 1)} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1 - 7)}{5^9 \cdot 7^3 (1 + 2^3)} \\ &= \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{5 \cdot (-6)}{9} = \frac{1}{6} + \frac{10}{3} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Bài 2.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có : } 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \\ &= 10(3^n - 2^{n-1}) : 10 \end{aligned}$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

b) Vì $|2015 - x| \geq 0$ nên :

$$A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x| \geq |2014 - x| + |2016 - x|$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 2015$ (1)

Ta có : $|2014 - x| + |2016 - x| = |x - 2014| + |2016 - x| \geq |x - 2014 + 2016 - x| = 2$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2014)(2016 - x) \geq 0$, suy ra :

$$2014 \leq x \leq 2016 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \geq 2$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 2015$.

Vậy A nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2015$.

c) Ta có : $25 - y^2 \leq 25 \Rightarrow 8(x - 2015)^2 \leq 25 \Rightarrow (x - 2015)^2 < 4$.

Do x nguyên nên $(x - 2015)^2$ là số chính phương. Có 2 trường hợp xảy ra :

TH 1 : $(x - 2015)^2 = 0 \Rightarrow x = 2015$, khi đó $y = 5$ hoặc $y = -5$.

TH 2 : $(x - 2015)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2015 = 1 \\ x - 2015 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2016 \\ x = 2014 \end{cases}$

Với $x = 2016$ hoặc $x = 2014$ thì $y^2 = 17$ (loại)

Vậy $x = 2015$, $y = 5$ và $x = 2015$, $y = -5$

Bài 3.

a) Ta có : $4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$.

Thay vào tỷ lệ thức ta được : $\frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2$

$$\Rightarrow y = -7, z = 1.$$

Vậy $x - 2y + 3z = 2 - 2.(-7) + 3.1 = 19$

b) Ta có : $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8 = ax^3 + 4x^3 - 4x + 8 = (a + 4)x^3 - 4x + 8$

$$g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 - 4bx^2 - 4x + c - 3$$

Do $f(x) = g(x)$ nên chọn x bằng 0; 1; -1 ta được:

$$f(0) = g(0) \Rightarrow 8 = c - 3 \Rightarrow c = 11 \Rightarrow g(x) = x^3 - 4bx^2 - 4x + 8$$

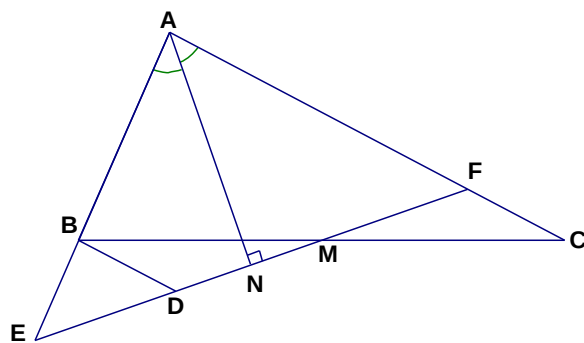
$$f(1) = g(1) \Rightarrow a + 4 - 4 + 8 = 1 - 4b - 4 + 8 \Rightarrow a + 4b = -3 \quad (1)$$

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow -a - 4 + 4 + 8 = -1 - 4b + 4 + 8 \Rightarrow -a + 4b = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $b = 0$; $a = -3$.

Vậy $a = -3$, $b = 0$; $c = 11$

Bài 4.



a) Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt EF tại D.

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MCF$ có : $\angle DBM = \angle FCM$ (so le trong)

$MB = MC$ (giả thiết) ; $\angle BMD = \angle CMF$ (đối đỉnh)

Do đó: $\triangle MBD = \triangle MCF$ (c.g.c) suy ra $BD = CF$ (1)

Mặt khác : $\triangle AEF$ có AN vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên cân tại A, suy ra $AE = AF$. Mà $\angle BDE = \angle MFA$ (đồng vị) nên $\angle BDE = \angle MFA$

Do đó: $\triangle BDE$ cân tại B, suy ra $BD = BE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra : $BE = CF$ (đpcm)

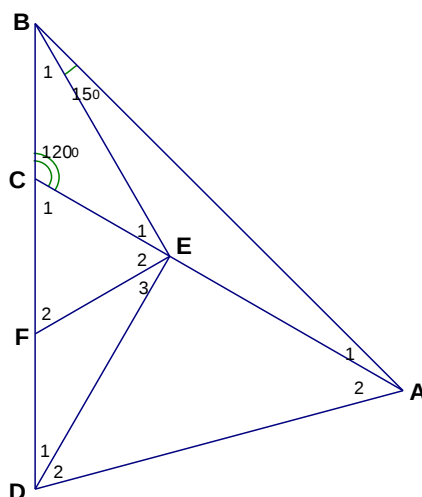
b) Tam giác AEF cân tại A suy ra $AE = AF$

Ta có : $2AE = AE + AF = (AB + BD) + (AC - CF)$

$= (AB + AC) + (BD - CF) = AB + AC$ (do $BE = CF$)

Vậy $AE = \frac{AB + AC}{2}$ (đpcm)

Bài 5.



Trên CA lấy điểm E sao cho $\angle EBA = 15^\circ \Rightarrow \angle B_1 = 30^\circ$

Ta có : $\angle E_1 = \angle A_1 + \angle EBA = 30^\circ$, do đó $\triangle CBE$ cân tại C $\Rightarrow CB = CE$

Gọi F là trung điểm CD $\Rightarrow CB = CE = CF = FD$

Tam giác CEF cân tại C, lại có $C_1 = 180^\circ - \angle BCA = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

Như vậy : $CB = CE = CF = FD = EF$.

Suy ra $D_1 = E_3$ mà $D_1 + E_3 = F_2 = 60^\circ$ (ΔCEF đều) $\Rightarrow D_1 = 30^\circ$

Xét tam giác CDE ta có: $\angle CED = 180^\circ - (\angle C_1 + D_1) = 90^\circ$ (1)

Ta có : $D_1 = B_1 \Rightarrow EB = ED$, $A_1 = \angle EBA \Rightarrow EA = EB \Rightarrow ED = EA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tam giác EDA vuông cân tại E $\Rightarrow D_2 = 45^\circ$

$$\text{Vậy } \angle ADB = D_1 + D_2 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$$

Đề số 24

Câu 1.

$$\text{a) } \frac{7}{-25} + \frac{-18}{25} + \frac{4}{23} + \frac{5}{7} + \frac{19}{23} = \left(\frac{-7}{25} + \frac{-18}{25} \right) + \left(\frac{4}{23} + \frac{19}{23} \right) + \frac{5}{7} = \frac{-25}{25} + \frac{23}{23} + \frac{5}{7} = -1 + 1 + \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\text{b) } \frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} + \frac{12}{19} = \left(\frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} \right) + \frac{12}{19} = \frac{7}{19} \left(\frac{8}{11} + \frac{3}{11} \right) + \frac{12}{19} = \frac{7}{19} + \frac{12}{19} = 1$$

$$\text{c) } (-25) \cdot 125 \cdot 4 \cdot (-8) \cdot (-17) = (-25) \cdot 4 \cdot 125 \cdot (-8) \cdot (-17) \\ = (-100) \cdot (-1000) \cdot (-17) = -1700000$$

$$\text{d) } \frac{7}{35} \cdot \frac{10}{19} + \frac{7}{35} \cdot \frac{9}{19} - \frac{2}{35} = \frac{7}{35} \left(\frac{10}{19} + \frac{9}{19} \right) - \frac{2}{35} = \frac{7}{35} - \frac{2}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

Câu 2.

$$\text{a. } A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1.3} \right) \left(1 + \frac{1}{2.4} \right) \left(1 + \frac{1}{3.5} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{2015.2017} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \dots \left(\frac{2016}{2015} \cdot \frac{2016}{2017} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \dots \left(\frac{2016}{2015} \cdot \frac{2016}{2017} \right) = \frac{2016}{2017}.$$

$$\text{b. Vì } |x| = \frac{1}{2} \text{ nên } x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{2} \text{ thì } B = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 4$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2} \text{ thì } B = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 5 = 7$$

$$\text{Vậy } B = 4 \text{ với } x = \frac{1}{2} \text{ và } B = 7 \text{ với } x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{c. } C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x-y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016} \right)^0 \\ = 2(x-y) + 13x^3y^2(x-y) - 15xy(x-y) + 1 = 1 \text{ (vì } x-y=0).$$

Câu 3.

1. Vì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$ với $\forall x$; $|3y + 12| \geq 0$ với $\forall y$, do đó:

$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \geq 0$ với $\forall x, y$. Theo đề bài thì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$. Từ đó suy ra:

$$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| = 0 \quad \text{Khi đó } 2x - \frac{1}{6} = 0 \text{ và } 3y + 12 = 0 \quad x = \frac{1}{12} \text{ và } y = -4. \text{ Vậy } x = \frac{1}{12}$$

và $y = -4$.

2. Ta có: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ Suy ra:

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{29} = 0$$

$$\text{Do đó: } \frac{3x-2y}{4} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2z-4x}{3} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}.$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2. \quad \text{Suy ra: } x = 4; y = 6; z = 8.$$

Câu 4.

1. Ta có: $x - 2xy + y - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2x(1-2y) - (1-2y) = 5 \Leftrightarrow (2x-1)(1-2y) = 5$$

Lập bảng :

$2x - 1$	1	5	-1	-5
$1 - 2y$	5	1	-5	-1
x	1	3	0	-2
y	-2	0	3	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x; y) \in \{(1; -2), (3; 0), (0; 3), (-2; 1)\}$.

2. Ta có: $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$

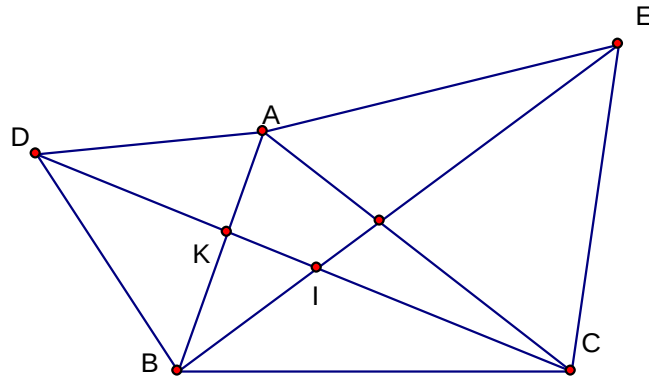
$$= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - 100x^7 - x^7 + \dots - 101x + 101$$

$$= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) - x^6(x - 100) + \dots + x(x - 100) - (x -$$

101)

Suy ra $f(100) = 1$.

Câu 5.



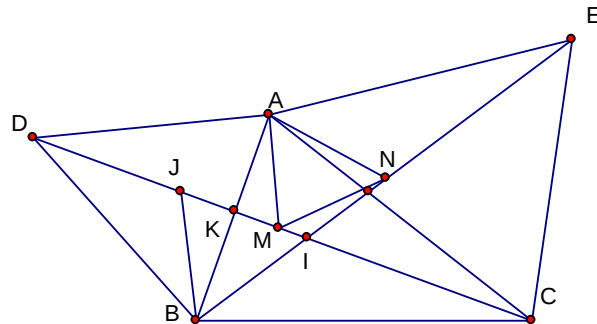
a) Ta có: $AD = AB$; $\angle DAC = \angle BAE$ và $AC = AE$

Suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c)

b) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow \angle ABE = \angle ADC$,

mà $\angle BKI = \angle AKD$ (đối đỉnh).

Khi đó xét $\triangle BIK$ và $\triangle DAK$ suy ra $\angle BIK = \angle DAK = 60^\circ$ (đpcm)



c) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow CM = EN$ và $\angle ACM = \angle AEN$

$\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$ và $\angle CAM = \angle EAN$

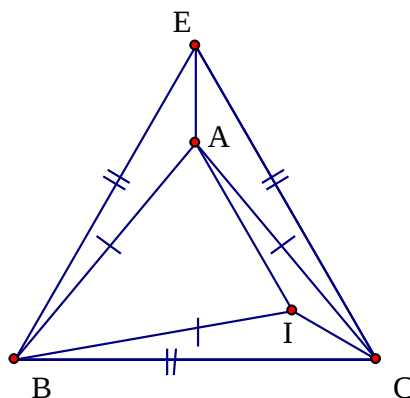
$\angle MAN = \angle CAE = 60^\circ$. Do đó $\triangle AMN$ đều.

d) Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB \Rightarrow \triangle BIJ$ đều $\Rightarrow BJ = BI$ và $\angle JBI = \angle DBA = 60^\circ$ suy ra $\angle IBA = \angle JBD$, kết hợp $BA = BD$

$\Rightarrow \triangle IBA = \triangle JBD$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AIB = \angle DJB = 120^\circ$ mà $\angle BID = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle DIA = 60^\circ$. Từ đó suy ra IA là phân giác của góc DIE

Câu 5.



Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BC, chứa điểm A dựng tam giác đều BCE.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A, $A = 80^\circ$ nên $ABC = ACB = 50^\circ \Rightarrow ABE = ACE = 10^\circ$ và điểm A thuộc miền trong $\triangle BCE$.

Dễ dàng chứng minh được

$$\triangle ABE = \triangle ICB \text{ (g. c. g)}$$

$$\Rightarrow BA = BI \Rightarrow \triangle ABI \text{ cân tại B, ta có}$$

$$ABI = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ \Rightarrow AIB = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

Đề số 25

Bài 1.

$$\begin{aligned} \text{a) + Biến đổi: } A &= \frac{7}{5} - \frac{47}{60} : \frac{47}{24} \\ &= \frac{7}{5} - \frac{2}{5} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{b) + Biến đổi: } 16^{20} = 2^{4 \cdot 20} = 2^{80}$$

$$+ \text{ Có } 2^{80} < 2^{100} \text{ vì } (1 < 2; 80 < 100)$$

$$\text{Vậy } 16^{20} < 2^{100}$$

Bài 2.

$$\text{a) + Ta có } |2x - 7| + \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2} \Rightarrow |2x - 7| = 1$$

$$\Rightarrow 2x - 7 = 1 \text{ hoặc } 2x - 7 = -1$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ hoặc } x = 3$$

$$\text{Vậy } x = 4 \text{ hoặc } x = 3.$$

$$\text{b) + Biến đổi được } 3^n \cdot (3^{-1} + 4) = 13 \cdot 3^5$$

$$\Rightarrow 3^n = 3^6$$

$$\Rightarrow n = 6$$

KL: Vậy $n = 6$

Bài 3.

a) + Biến đổi: $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$

$$\frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

+ Nếu $a+b+c+d \neq 0$ thì $a=b=c=d \Rightarrow Q = 1+1+1+1 = 4$

+ Nếu $a+b+c+d = 0$

thì $a+b = -(c+d)$; $b+c = -(d+a)$; $c+d = -(a+b)$; $d+a = -(b+c)$

$$\Rightarrow Q = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$$

+ KL : Vậy $Q = 4$ khi $a+b+c+d \neq 0$

$$Q = -4 \text{ khi } a+b+c+d = 0$$

b) + Ta có: $\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$

$$\frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

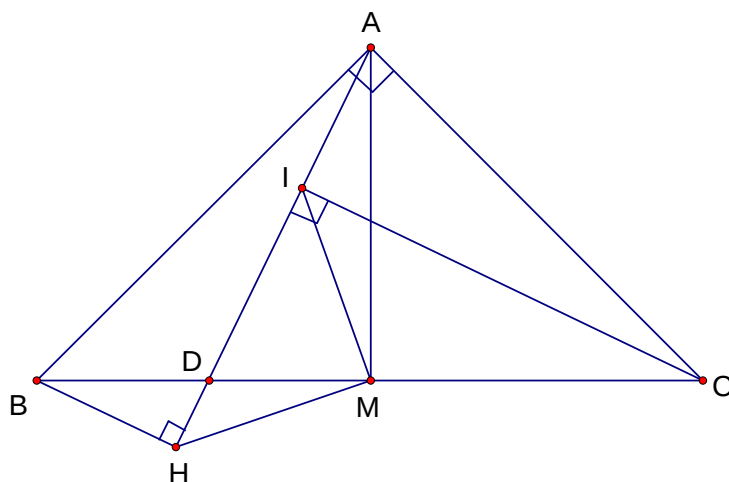
$$\frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right) \Rightarrow M < 2$$

+ Có $M^{10} < 2^{10}$ (Vì $M > 0$) mà $2^{10} = 1024 < 1025$

Vậy $M^{10} < 1025$

Bài 4.



1)

a) * Chứng minh: $BAM = ACM$

+ Chứng minh được: $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c-c-c)

+ Lập luận được: $BAM = CAM = 45^\circ$

+ Tính ra được $ACM = 45^\circ$

$\Rightarrow BAM = ACM$

* Chứng minh: $BH = AI$.

+ Chỉ ra: $BAH = ACI$ (cùng phụ DAC)

+ Chứng minh được $\triangle AIC = \triangle BHA$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = AI$ (2 cạnh tương ứng)

b) Tam giác MHI vuông cân.

+ Chứng minh được $AM \perp BC$

+ Chứng minh được $AM = MC$

+ Chứng minh được $HAM = ICM$

+ Chứng minh được $\triangle HAM = \triangle ICM$ (c-g-c)

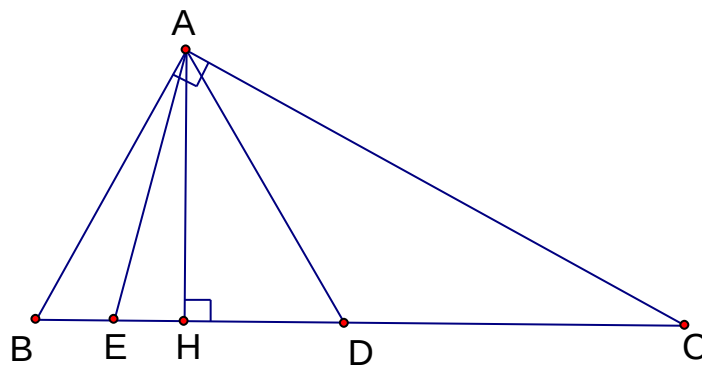
$\Rightarrow HM = MI$ (*)

+ Do $\triangle HAM = \triangle ICM \Rightarrow HMA = IMC \Rightarrow HMB = IMA$ (do $AMB = AMC = 90^\circ$)

+ Lập luận được: $HMI = 90^\circ$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \triangle MHI$ vuông cân

2)



+ Chứng minh được :

$$AEC = ABC + BAE = HAD + DAC + BAE = EAH + HAD + DAC = EAC$$

(Vì B và HAC cùng phụ với BAH)

Suy ra tam giác AEC cân tại C $\Rightarrow AC = CE$ (*)

+ Tương tự chứng minh được $AB = BD$ (**)

$$+ \text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow AB + AC = BD + EC = ED + BC$$

Bài 5.

+) Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow z = -x - y \leq 0$$

$$+) \text{ Vì } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$$

$$+) -1 \leq z \leq 1 \text{ và } z \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

$$\text{KL: Vậy } x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

Đề số 26

Câu 1.

$$1. a) A = \frac{5}{15} + \frac{14}{25} - \frac{12}{9} + \frac{2}{7} + \frac{11}{25}$$

$$= \frac{-3}{3} + \frac{25}{25} + \frac{2}{7} = (-1+1) + \frac{2}{7}$$

$$= 0 + \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$$

$$b) A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3}$$

$$= \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3+1)} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 \cdot (1-7)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot (1+2^3)}$$

$$= \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 4} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 \cdot (-6)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot 9}$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{-10}{3} = \frac{7}{2}$$

2. a) Ta có

$$\left(3 - \frac{9}{10} - |x+2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{30}{10} - \frac{9}{10} - |x+2|\right) : \left(\frac{19}{10} - \frac{10}{10} - \frac{4}{10}\right) = 1 - \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{21}{10} - |x+2|\right) : \frac{5}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{21}{10} - |x+2| = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow |x+2| = \frac{21}{10} - \frac{1}{10} = 2$$

$$\Leftrightarrow x+2 = -2; 2$$

$$\Leftrightarrow x = -4; 0$$

Vậy $x = 0; -4$

b) Từ giả thiết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12}$ (1)

$$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$ (*)

Ta có: $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x-3y+z}{18-36+20} = \frac{6}{2} = 3$

Do đó: $\frac{x}{9} = 3 \Rightarrow x = 27$

$$\frac{y}{12} = 3 \Rightarrow y = 36$$

$$\frac{z}{20} = 3 \Rightarrow z = 60$$

KL: $x = 27, y = 36, z = 60$

Câu 2.

a) Theo đề ta có $3xy - 2y = x^2 + 5 \Rightarrow y(3x - 2) = x^2 + 5$ (1)

Do x, y nguyên nên suy ra $x^2 + 5$ chia hết cho $3x - 2$

$\Rightarrow 9(x^2 + 5)$ chia hết cho $3x - 2$

$$\Rightarrow 9x^2 + 45 \text{ chia hết cho } 3x - 2 \Rightarrow 9x^2 - 6x + 6x - 4 + 49 \text{ chia hết cho } 3x - 2$$

$$\Rightarrow 3x \cdot (3x - 2) + 2(3x - 2) + 49 \text{ chia hết cho } 3x - 2$$

$$\Rightarrow 49 \text{ chia hết cho } 3x - 2 \Rightarrow 3x - 2 \in \{-49; -7; -1; 1; 7; 49\}$$

$$\Rightarrow 3x \in \{-47; -5; 1; 3; 9; 51\} \Rightarrow x \in \{1; 3; 17\}$$

Thay x lần lượt vào (1) ta được $y \in \{6; 2; 6\}$

Vậy các cặp số (x, y) là (1;6), (3;2), (17;6)

$$\begin{aligned} \text{b) } 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= 3^{n+2} + 3^n - 2^{n+2} - 2^n \\ &= 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \\ &= 10(3^n - 2^{n-1}) \end{aligned}$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n \vdots 10$ với mọi n là số nguyên dương.

Câu 3.

$$\begin{aligned} \text{a) } A(-1) &= (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99} + (-1)^{100} \\ &= -1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1) + 1 = 0 \\ &\quad (\text{vì có 50 số } -1 \text{ và 50 số } 1) \end{aligned}$$

Suy ra $x = -1$ là nghiệm của đa thức $A(x)$

$$\begin{aligned} \text{b) } + \text{ Với } x = \frac{1}{2} \text{ thì giá trị của đa thức } A &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow 2A &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} \\ \Rightarrow 2A &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) + 1 - \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow 2A = A + 1 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow A &= 1 - \frac{1}{2^{100}} \end{aligned}$$

Câu 4.

a) C/m được $\triangle AEH = \triangle AFH$ (g-c-g) Suy ra $EH = HF$ (đpcm)

b) Từ $\triangle AEH = \triangle AFH$ Suy ra $E_1 = F$

Xét $\triangle CMF$ có ACB là góc ngoài suy ra $CMF = ACB - F$

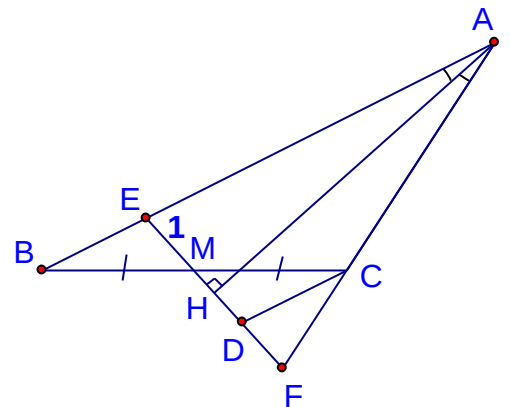
$\triangle BME$ có E_1 là góc ngoài suy ra $BME = E_1 - B$

$$\text{Vậy } CMF + BME = (ACB - F) + (E_1 - B)$$

$$\text{hay } 2BME = ACB - B \text{ (đpcm).}$$

c) Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông AFH :

$$\text{ta có } HF^2 + HA^2 = AF^2 \quad \text{hay} \quad \frac{FE^2}{4} + AH^2 = AE^2 \quad (\text{đpcm})$$



d) C/m $\triangle AHE = \triangle AHF (g - c - g)$ Suy ra $AE = AF$ và $E_1 = F$

Từ C vẽ $CD \parallel AB (D \in EF)$

C/m được $\triangle BME = \triangle CMD (g - c - g) \Rightarrow BE = CD \quad (1)$

Và có $E_1 = CDF$ (cặp góc đồng vị)

Do đó $CDF = F \Rightarrow \triangle CDF$ cân $\Rightarrow CF = CD \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BE = CF$

Câu 5.

a) **Cách 1:** Ta có thức $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10} = \frac{x^{11} - 1}{x - 1}$

Thay $x = 2,13$ ta được kết quả $P(2,13) = \frac{2,13^{11} - 1}{2,13 - 1} \approx 3622,355813$.

Cách 2: Nhập vào máy: $\sum_{x=0}^{10} (2,13^x) \boxed{=}$ ta được kết quả $P(2,13) \approx 3622,355813$.

b) HD: $A = 2^{2000}(2^{10} + 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{16})$
 $= (2^{20})^{100} \times 130048$

mà $2^{20} = (2^{10})^2 = 1024^2 = 1048576$

Ta nhận thấy bất kỳ một số có đuôi là 76 thì lũy thừa luôn luôn có đuôi là 76 (*dùng máy để kiểm tra*)

Do đó: $A = 130048 \times (\dots 76) = \dots 48$. Vậy 2 số cuối của A có giá trị là 48

Đề số 27

Câu 1.

$$1) A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5}$$

$$= \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3 + 1)} = \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}$$

2) Ta có $f(0) = 2014 \Leftrightarrow c = 2014$

$$f(1) = 2015 \Leftrightarrow a + b + c = 2015 \Rightarrow a + b = 1 \quad (1)$$

$$f(-1) = 2017 \Leftrightarrow a - b + c = 2017 \Rightarrow a - b = 3 \quad (2)$$

Từ (1)(2) suy ra: $a = 2; b = -1$. Khi đó $f(x) = 2x^2 - x + 2014$

Suy ra $f(-2) = 2.(-2)^2 - (-2) + 2014 = 2024$

Câu 2.

$$1) \left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2 \Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{5} = 2 \\ x + \frac{1}{5} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ x = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{9}{5}; x = -\frac{11}{5}$

$$2) 2^{x-1} + 5.2^{x-2} = \frac{7}{32} \Leftrightarrow 2^{x-1} \left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{32} \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{32} \Leftrightarrow 2^{x-1} = \frac{7}{32} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{16} = 2^{-4}$$

Suy ra $x-1 = -4 \Leftrightarrow x = -3$. Vậy $x = -3$.

$$3) |x+5| + (3y-4)^{2016} = 0. \text{ Vì } |x+5| \geq 0; (3y-4)^{2016} \geq 0$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} |x+5| = 0 \\ (3y-4)^{2016} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 = 0 \\ 3y-4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy $x = -5; y = \frac{4}{3}$

$$4) \text{ Ta có: } \frac{x}{2} = \frac{y}{5} \Leftrightarrow \frac{xy}{2.5} = \frac{y^2}{5^2} \Leftrightarrow \frac{40}{10} = \frac{y^2}{25} \Rightarrow y^2 = 10^2 \Leftrightarrow y = \pm 10 \Rightarrow x = \pm 4$$

Vậy $(x; y) \in \{(4; 10); (-4; -10)\}$

Câu 3.

$$1) \text{ Ta có: } 2xy + x - 2y = 4 \Leftrightarrow x(2y+1) - (2y+1) = 3 \Leftrightarrow (x-1)(2y+1) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2y+1) = 3 = (\pm 1).(\pm 3) = (\pm 3).(\pm 1)$$

$x-1$	1	-1	3	-3
x	2	0	4	-2
$2y+1$	3	-3	1	-1
y	1	-2	0	-1

Vậy $(x; y) \in \{(2; 1); (0; -2); (4; 0); (-2; -1)\}$

$$2) \text{ Ta có } 0,5:1\frac{2}{3}:2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}:\frac{5}{3}:\frac{9}{4} = \frac{6}{12}:\frac{20}{12}:\frac{27}{12} = 6:20:27$$

Giả sử M được chia thành 3 số là $x; y; z$.

Theo bài ra ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{20} = \frac{z}{27} \Leftrightarrow \frac{x^2}{6^2} = \frac{y^2}{20^2} = \frac{z^2}{27^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6^2 + 20^2 + 27^2} = \frac{4660}{1165} = 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 12^2 \Rightarrow x = \pm 12; y^2 = 40^2 \Rightarrow y = \pm 40; z^2 = 54^2 \Rightarrow z = \pm 54$$

Vậy $M = 12 + 40 + 54 = 106$ Hoặc $M = -12 - 40 - 54 = -106$

Câu 4.

a) Ta có $ABC = NCE = (ACB)$

$$\Rightarrow \triangle MBD = \triangle NCE (cgv - gn).$$

b) Theo câu a)

$$\Rightarrow MD = EN \Rightarrow \triangle IMD = \triangle INE (cgv - gn) \Rightarrow IM = IN \Rightarrow I \text{ trung điểm } MN.$$

c) Kẻ $AH \perp BC$

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACH (ch - gn)$$

$$\Rightarrow BAH = CAH \quad (1)$$

Đường vuông góc với MN tại I cắt AH tại O.

$$\Rightarrow \triangle OAB = \triangle OAC (c.g.c)$$

$$\Rightarrow OBA = OCA \quad (2)$$

Mặt khác :

$$\triangle OBH = \triangle OCH (2cgv) \Rightarrow OB = OC \quad (*)$$

$$\triangle OMI = \triangle ONI (2cgv) \Rightarrow OM = ON \quad (**)$$

$$BM = CN \text{ (câu b) } (***)$$

Từ $(*)(**)(***)$ suy ra :

$$\triangle OBM = \triangle OCN (c.c.c) \Rightarrow OBM = OCN \quad (3)$$

$$\text{Từ } (2)(3) \Rightarrow OCA = OCN (= OBA) = 90^\circ \Rightarrow OC \perp AC$$

Vì AC cố định mà $OC \perp AC \Rightarrow O$ cố định.

Vậy đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua điểm O cố định.

Câu 5.

1) Ta có

$$\overline{abc} : 7 \Leftrightarrow (100a + 10b + c) : 7 \Leftrightarrow (98a + 7b + 2a + 3b + c) : 7 \Leftrightarrow (2a + 3b + c) : 7 \quad (1)$$

Mặt khác theo bài ra :

$$a + b + c = 14 \Rightarrow (a + b + c) : 7 \Rightarrow (2a + 2b + 2c) : 7 \quad (2)$$

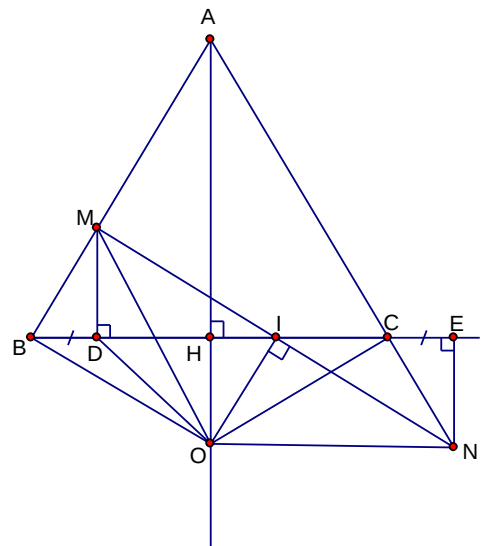
$$\text{Từ } (1), (2) \Rightarrow b - c : 7 \Rightarrow b - c \in \{-7; 0; 7\}$$

$$+) \text{ Nếu } b - c = 7 \text{ có } c = 0 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow a = 7$$

$$c = 1 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = 5$$

$$c = 2 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$+) \text{ Nếu } b - c = 0 \text{ có } b = c = 6 \Rightarrow a = 2$$



$$b = c = 5 \Rightarrow a = 4$$

$$b = c = 4 \Rightarrow a = 6$$

$$b = c = 3 \Rightarrow a = 8$$

+) Nếu $b - c = -7$ có $c = b + 7 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow c = 7 \Rightarrow a = 7$

$$b = 1 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow a = 5$$

$$b = 2 \Rightarrow c = 9 \Rightarrow a = 3$$

Vậy có 10 số thỏa mãn : 770; 581; 392; 266; 455; 644; 833; 707; 518; 329.

2) Kẻ tia CF sao cho $\angle ACF = 60^\circ (F \in AB)$,

Tia CF cắt AD tại O.

$$\Rightarrow \triangle AOC; \triangle FOD \text{ đều} \Rightarrow OA = OC = AC; OF = OD = FD.$$

$$\triangle AEC \text{ có } \angle EAC = 80^\circ, \angle ACE = 50^\circ \Rightarrow \angle CEA = 50^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ACE \text{ cân tại A} \Rightarrow AC = AE \Rightarrow \triangle AEO \text{ cân tại A. Có}$$

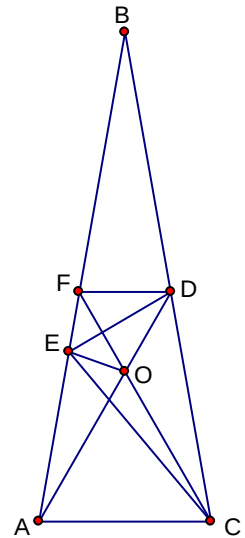
$$\angle EAO = 20^\circ \Rightarrow \angle AEO = \angle AOE = 80^\circ \Rightarrow \angle EOF = 40^\circ$$

$$\text{Suy ra: } \angle AFC = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ = \angle EOF$$

$$\Rightarrow \triangle EOF \text{ cân tại E} \Rightarrow EO = EF$$

$$\Rightarrow \triangle FDE = \triangle ODE (c.c.c)$$

$$\Rightarrow \angle ODE = \angle FDE = \frac{1}{2} \angle FDA = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ \text{ Vậy } \angle ADE = 30^\circ.$$



Đề số 28

Câu 1.

$$\text{a) Tính } A = \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1008} + \frac{11}{2016} \right) \cdot \frac{1008}{25} + \frac{1007}{2016} \right]$$

$$A = \left[\frac{2}{17} - \frac{3}{34} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{25} + \frac{11}{50} \right) \cdot \frac{1007}{2016} \right]$$

$$A = 1 : \left[\frac{1}{2} + \frac{1007}{2016} \right]$$

$$A = 1 : \left(\frac{2015}{2016} \right)$$

$$A = \frac{2016}{2015}$$

Vậy $A = \frac{2016}{2015}$

b) Tính $B = \frac{1}{-77^2} \cdot 7^4 \cdot (-11)^2 \cdot 77^5 \cdot \left(\frac{1}{7^2}\right)^2 : (7^3 \cdot 11^6)$

$$B = \frac{1}{-7^2 \cdot 11^2} \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 7^5 \cdot 11^5 \cdot \frac{1}{7^4} \cdot \frac{1}{7^3 \cdot 11^6}$$

$$B = -\frac{7^9 \cdot 11^7}{7^9 \cdot 11^8}$$

$$B = -\frac{1}{11}$$

Vậy $B = -\frac{1}{11}$.

2. Ta có: $P = \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) = \frac{b+c}{b} \cdot \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{a+b}{c} \cdot \frac{c+a}{b}$ với $a, b, c \neq 0$

Khi $a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = -c \\ b + c = -a \\ c + a = -b \end{cases} \Rightarrow P = \frac{-a}{a} \cdot \frac{-c}{c} \cdot \frac{-b}{b} = -1$

Khi $a + b + c \neq 0$, áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a-b+c}{2b} = \frac{c-a+b}{2a} = \frac{a-c+b}{2c} = \frac{a-b+c+c-a+b+a-c+b}{2(c+a+b)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{2b} = \frac{c+b}{2a} = \frac{a+b}{2c} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{b} = \frac{c+b}{a} = \frac{a+b}{c} = 2$$

$$\Rightarrow P = 8$$

Với $a, b, c \neq 0$ thì $P = -1$ khi $a + b + c = 0$; $P = 8$ khi $a + b + c \neq 0$

Câu 2.

a) Tìm x biết: $\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}$

$$\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{3|x-2|+1} \Leftrightarrow 6|x-2|+2 = 3|x-2|+6 \Leftrightarrow 3|x-2| = 4$$

$$\Leftrightarrow |x-2| = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \frac{4}{3} \\ x-2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $x \in \left\{\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right\}$

b) Gọi kích thước hình chữ nhật cần tìm là x, y (đơn vị độ dài)

$$(x, y \in \mathbb{N}^*; x \geq y)$$

Ta có diện tích và chu vi hình chữ nhật lần lượt là : $x.y$ và $2(x + y)$

Theo bài ra ta có : $x.y = 2(x + y)$ với $x, y \in \mathbb{N}^*; x \geq y$

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y - 2) - 2(y - 2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)(x - 2) = 4$$

Với $x, y \in \mathbb{N}^*$ ta có $(y - 2); (x - 2) \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow y - 2; x - 2 \in \mathcal{U}(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \text{ nhưng vì } x - 2; y - 2 > -2 \text{ và } x \geq y$$

Ta có 2 trường hợp sau :

$$\begin{cases} x - 2 = 4 \\ y - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - 2 = 2 \\ y - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Có hai hình chữ nhật thỏa mãn bài toán :

Hình chữ nhật có kích thước 6 và 3; 4 và 4.

c) Các bạn tự chứng minh: $(x - y)^3 - (x - y)$ chia hết cho 2

$$(y - z)^2 - (y - z) \text{ chia hết cho 2}$$

$$|z - x| - (z - x) \text{ chia hết cho 2}$$

Do đó:

$$(x - y)^3 + (y - z)^2 + 2015|x - z| =$$

$$(x - y)^3 - (x - y) + (y - z)^2 - (y - z) + |z - x| - (z - x) + 2014|z - x|$$

chia hết cho 2

Mà 2017 không chia hết cho 2 nên không tồn tại các số nguyên dương $x; y; z$ thỏa mãn đề bài.

Câu 3.

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = x + \frac{3}{2}|x|$ (1)

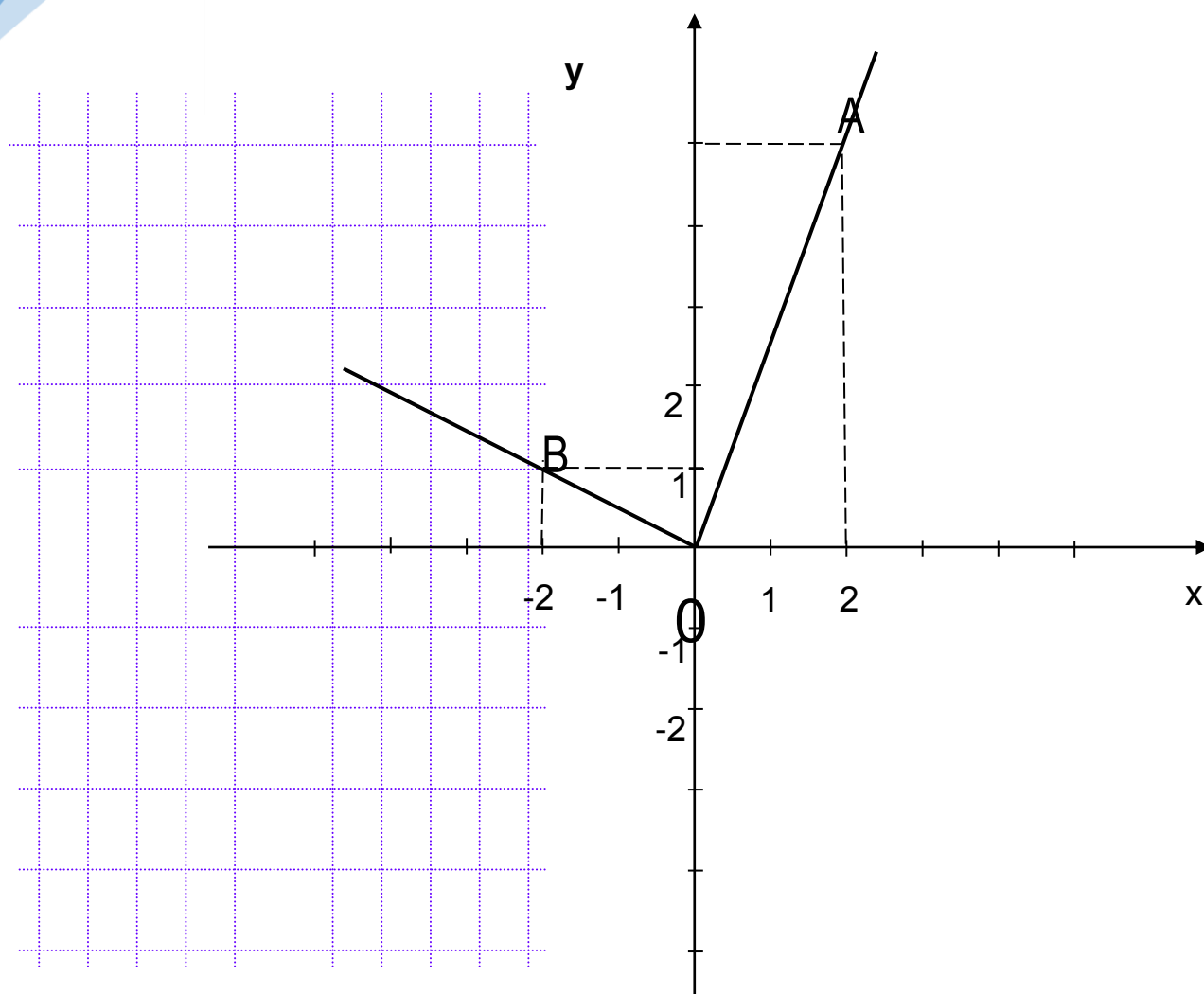
$$\text{Từ hàm số (1), ta có : } y = \frac{5}{2}x \text{ với } x \geq 0$$

$$y = \frac{-1}{2}x \text{ với } x < 0$$

Cho $x = 2 \Rightarrow y = 5$, ta có điểm $A(2; 5)$ thuộc đồ thị hàm số (1)

Cho $x = -2 \Rightarrow y = 1$, ta có điểm $B(-2; 1)$ thuộc đồ thị hàm số (1)

Đồ thị hàm số (1) là hai tia OA và OB



b) Từ hàm số (1), ta có $y = \frac{5}{2}x$ với $x \geq 0$

$$y = \frac{-1}{2}x \text{ với } x < 0$$

Điểm E thuộc đồ thị hàm số (1) có hoành độ $x = -4 < 0$

nên tung độ điểm E là $y = \frac{-1}{2}(-4) = 2 \Rightarrow E(-4; 2)$

Điểm F thuộc đồ thị hàm số (1) có hoành độ $x = \frac{4}{5} > 0$

nên tung độ điểm F là $y = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5} = 2 \Rightarrow F(1; 2)$

Điểm M thuộc trục tung nên hoành độ điểm M là $x = 0$

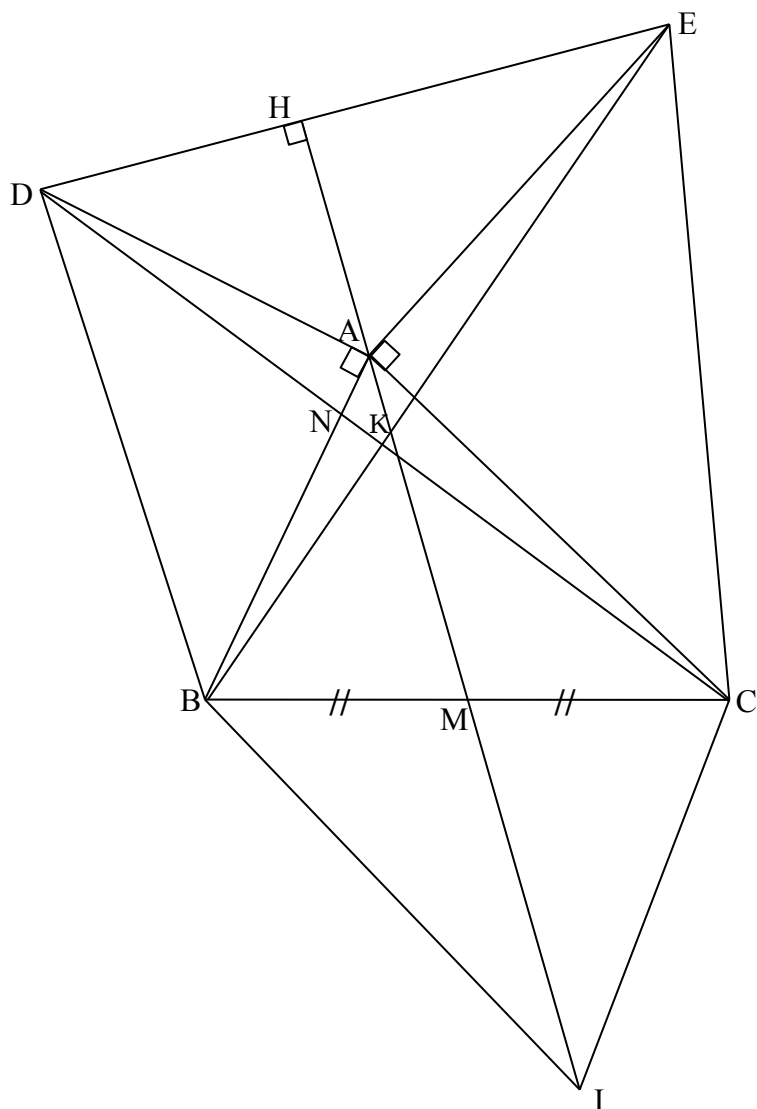
Ta có E, F thuộc đường thẳng $y = 2$

Để $EM + FM$ nhỏ nhất khi M nằm giữa E và F

nên M thuộc đường thẳng $y = 2$, nên tung độ M là $y = 2$

Vậy điểm M (0; 2)

Câu 4.

**a) Chứng minh $DC = BE$**

Ta có $\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC = 90^\circ + \angle BAC$

tương tự $\angle BAE = 90^\circ + \angle BAC$

$$\Rightarrow \angle DAC = \angle BAE$$

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có $AD = AB$ ($\triangle ABD$ vuông cân tại A)

$AC = AE$ ($\triangle ACE$ vuông cân tại A)

$$\angle DAC = \angle BAE \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow DC = BE \text{ (định nghĩa tam giác bằng nhau)}$$

Chứng minh $DC \perp BE$

Gọi K, N lần lượt là giao điểm của DC với BE và AB

$\triangle AND$ và $\triangle KNB$ có $\angle AND = \angle KNB$ (đối đỉnh);

$$\angle ADN = \angle KBN \text{ (} \triangle DAC = \triangle BAE \text{)}$$

$\Rightarrow \angle DAN = \angle BKN$ (định lý tổng 3 góc trong tam giác)

Mà $\angle DAN = 90^\circ$ ($\triangle ABD$ vuông cân tại A)

$\Rightarrow \angle BKN = 90^\circ$

$\Rightarrow DC \perp BE$ tại K

b) Chứng minh A, H, M thẳng hàng

Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho $MI = MA$

Chứng minh $\triangle AMB = \triangle IMC$ (c-g-c)

$\Rightarrow CI = AB$ và $CI \parallel AB$

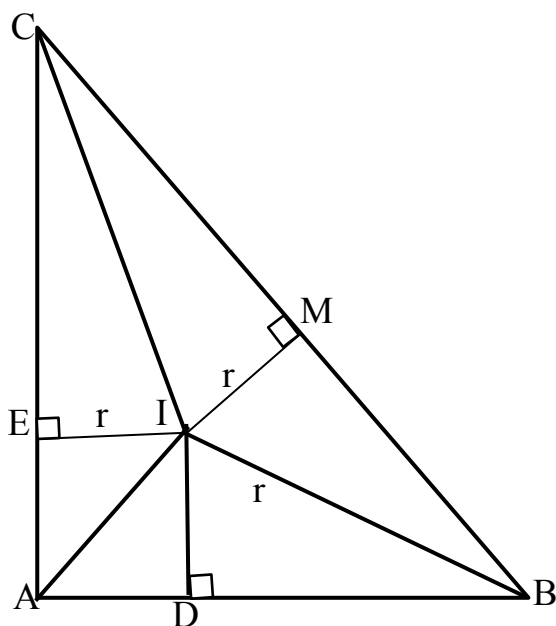
Chứng minh $\angle ACI = \angle DAE$ (cùng bù $\angle BAC$)

Chứng minh $\triangle ACI = \triangle EAD$ (c-g-c)

$\Rightarrow \angle CAI = \angle AED$ mà $\angle AED + \angle EAH = 90^\circ$ ($\triangle AHE$ vuông tại H)

$\Rightarrow \angle CAI + \angle EAH = 90^\circ \Rightarrow \angle MAH = 180^\circ \Rightarrow M, A, H$ thẳng hàng

2.



Vì điểm I nằm trong tam giác và cách đều 3 cạnh tam giác ABC nên I là giao điểm 3 đường phân giác trong tam giác ABC

Tam giác ABC vuông tại A nên $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (định lý Pitago)

Tính $BC = 5\text{cm}$

Chứng minh $\triangle CEI = \triangle CMI$ (cạnh huyền- góc nhọn) $\Rightarrow CE = CM$

Tương tự $AE = AD$; $BD = BM$

Do đó:

$$BM = \frac{MB + BD}{2} = \frac{(BC - MC) + (AB - AD)}{2} = \frac{(BC - CE) + (BA - AE)}{2}$$

$$= \frac{BC + BA - (AE + EC)}{2} = \frac{BC + BA - AC}{2}$$

$$\Rightarrow BM = \frac{5 + 3 - 4}{2} = 2(\text{cm})$$

Câu 5.

S Có (n - 1) số hạng:

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$S = n - 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) < n - 1$$

Mặt khác $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}$

$$S > n - 1 - 1 + \frac{1}{n} = n - 2 + \frac{1}{n} > n - 2$$

Từ (1) và (2) ta có $n - 2 < S < n - 1$

Vậy S không có giá trị nguyên với mọi số tự nhiên $n \geq 2$

Đề số 29**Câu 1.**

$$1) \text{ Ta có } |x-1| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{2}{3} \\ x-1 = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$2) \text{ Từ câu 1) Với } x = \frac{5}{3} \text{ thay vào A ta được } A = \frac{14}{27}$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{3} \text{ thay vào A ta được } A = -\frac{2}{9}$$

Câu 2.

1) Ta có:

$$A = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 10 \cdot 3^n - 2^n(2^2 + 1) = 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n$$

$$= 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^{n-1} = 10(3^n - 2^{n-1}); 10$$

A chia hết cho 10 suy ra chữ số tận cùng của A là 0

2) Ta có:

$$\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-2+5}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-2 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

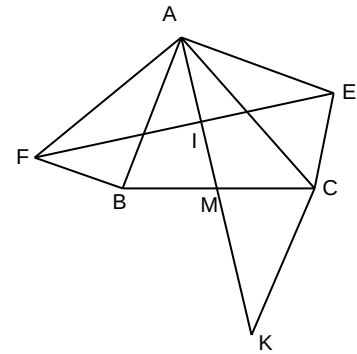
$$\Rightarrow x = 1; 3; -3; 7$$

Câu 3.

- 1) Ta có với $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0$
 2) $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm
 $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow x = 5$ là một nghiệm
 $x = -3 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm
 Vậy $f(x)$ có ít nhất là 3 nghiệm.

Câu 4.

- a) Chứng minh $\triangle ABF = \triangle AEC$ (cgc) $\Rightarrow FB = EC$
 b) Trên tia đối của tia MA lấy K sao cho $AK = 2AM$. Ta có
 $\triangle ABM = \triangle KCM \Rightarrow CK \parallel AB$
 $\Rightarrow \angle ACK + \angle CAB = \angle EAF + \angle CAB = 180^\circ \Rightarrow \angle ACK = \angle EAF$
 $\triangle EAF$ và $\triangle KCA$ có $AE = AB = CK$;
 $AF = AC$ (gt); $\angle ACK = \angle EAF$
 $\Rightarrow \triangle EAF = \triangle KCA$ (cgc) $\Rightarrow EF = AK = 2AM$.
 c) Từ $\triangle EAF = \triangle KCA \Rightarrow \angle CAK = \angle AFE \Rightarrow \angle AFE + \angle FAK = \angle CAK + \angle FAK = 90^\circ$
 $\Rightarrow AK \perp EF$

**Câu 5.**

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a + b|$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$ ta có:

$$|x - a| + |x - d| \geq |x - a| + |d - x| \geq |x - a + d - x| = d - a \quad (1)$$

$$|x - b| + |x - c| \geq |x - b| + |c - x| \geq |x - b + c - x| = c - b \quad (2)$$

Suy ra $A \geq c + d - a - b$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi dấu "=" ở (1) và (2) xảy ra

$$\Leftrightarrow (x - a)(d - x) \geq 0 \text{ và } (x - b)(c - x) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq x \leq d \text{ và } b \leq x \leq c.$$

$$\text{Do đó } \min A = c + d - a - b \Leftrightarrow b \leq x \leq c.$$

Đề số 30**Câu 1.**

a) $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

b) $B = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot (3)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 4 = \frac{3^2 \cdot 4^2 \cdot 4}{4^2 \cdot 3^2} = 4$

Câu 2.

a) Nếu $x \geq 3$ thì: $|2x - 6| - 4x = 12 \Leftrightarrow 2x - 6 - 4x = 12 \Leftrightarrow -2x = 18 \Leftrightarrow x = -9$ (KTM)

Nếu $x < 3$ thì: $|2x - 6| - 4x = 12 \Leftrightarrow 6 - 2x - 4x = 12 \Leftrightarrow -6x = 6 \Leftrightarrow x = -1$ (TM)

Vậy $x = -1$

$$b) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015} \right) \cdot x = \frac{2014}{1} + \frac{2013}{2} + \dots + \frac{2}{2013} + \frac{1}{2014}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015} \right) x = \frac{2013}{2} + 1 + \frac{2012}{3} + 1 + \dots + \frac{2}{2013} + 1 + \frac{1}{2014} + 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015} \right) x = \frac{2015}{2} + \frac{2015}{3} + \dots + \frac{2015}{2013} + \frac{2015}{2014} + \frac{2015}{2015}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015} \right) \cdot x = 2015 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \right) \Leftrightarrow x = 2015$$

KL : $x = 2015$

c) Với $a, b, c, d \neq 0$, $4a \neq \pm 5b$, $4c \neq \pm 5d$, ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Áp dụng TC của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{4a}{4c} = \frac{5b}{5d} = \frac{4a+5b}{4c+5d} = \frac{4a-5b}{4c-5d} \Leftrightarrow \frac{4a+5b}{4a-5b} = \frac{4c+5d}{4c-5d}.$$

Câu 3.

Giả sử thời gian chuyển động trên cạnh thứ nhất, thứ ba, thứ tư lần lượt là x, y, z (giây)

$\Rightarrow$ thời gian chuyển động trên cạnh thứ hai là x (giây).

Quãng đường mà vật chuyển động trên các cạnh thứ nhất, thứ ba, thứ tư lần lượt là $5x, 4y, 3z$.

Mà độ dài các cạnh của hình vuông bằng nhau nên ta có : $5x = 4y = 3z$ (1)

Tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 59 giây nên có : $x + x + y + z = 59$

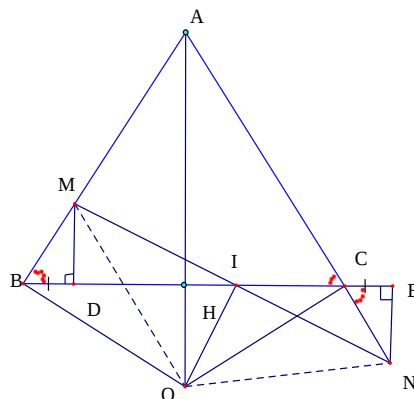
$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5}, \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có : $\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20} = \frac{2x+y+z}{24+15+20} = \frac{59}{59} = 1$

$\Rightarrow x=12, y=15, z=20$

KL : Độ dài cạnh hình vuông là : $5.12 = 60(\text{cm})$

Câu 4.



a) Xét $\triangle BDM = \triangle CEN$ có: $BD = CE$ (gt) ,

$$D = E = 90^\circ \text{ (MD, NE } \perp \text{ BC)}$$

$$\angle ABC = \angle ECN \text{ (} = \angle ACB \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle BDM = \triangle CEN \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow DM = EN$$

b) Xét $\triangle MDI$ và $\triangle NEI$ có: $D = E = 90^\circ$

$$DM = EN \text{ (Theo câu a)}$$

$$\angle DMI = \angle ENC \text{ (So le trong và MD // NE)}$$

$$\Rightarrow \triangle MDI = \triangle NEI \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow IM = IN$$

Vậy I là trung điểm của MN.

c) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC , O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I $\Rightarrow$ Cần chứng minh O là điểm cố định.

Nối O với B, C. Vì đường thẳng OA cố định nên cần chứng minh OC cố định hay $OC \perp AC$.

$$\text{Chứng minh } \triangle OAB = \triangle OAC \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \angle OBA = \angle OCA \text{ (1)}$$

$$\text{Chứng minh } \triangle OBM = \triangle OCN \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \angle OBA = \angle OCN \text{ (2)}$$

$$\text{Từ 1, 2} \Rightarrow \angle OCA = \angle OCN \text{ mà } \angle OCA + \angle OCN = 180^\circ \Rightarrow \angle OCA = \angle OCN = 90^\circ$$

$$\Rightarrow OC \perp AC.$$

$$\Rightarrow O \text{ là điểm cố định.}$$

Vậy khi D di chuyển trên cạnh BC thì đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5.

$$f(-2) = 4a - 2b + c \text{ và } f(3) = 9a + 3b + c \Rightarrow f(-2).f(3) = (4a - 2b + c)(9a + 3b + c)$$

$$\text{Nhận thấy } (4a - 2b + c) + (9a + 3b + c) = 13a + b + 2c = 0$$

$$\Rightarrow (4a - 2b + c) = - (9a + 3b + c)$$

$$\text{Vậy } f(-2).f(3) = - (4a - 2b + c).(4a - 2b + c) = - (4a - 2b + c)^2 \leq 0$$

Đề số 31

Câu 1.

$$\text{a) } \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) < x < \frac{1}{24} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{4}$$

$$\frac{-2}{4} < x < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -2 < x < 1. \text{ mà } x \text{ là số nguyên nên } x \in \{-1, 0\}$$

b) Vì $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{15}$; $\frac{b}{5} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$ nên $\frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12} = \frac{a-b+c}{10-15+12} = \frac{-49}{7} = -7$$

$$\text{Suy ra: } a = 10 \cdot (-7) = -70; b = 15 \cdot (-7) = -105; c = 12 \cdot (-7) = -84$$

Câu 2.

a) Để đa thức $g(x)$ có nghiệm -1 thì $g(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^4 + m^2(-1)^3 + m(-1)^2 + m(-1) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - m^2 + m - m - 1 = 0 \Leftrightarrow -m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

b) Tổng các hệ số của đa thức sau khi phá ngoặc và sắp xếp là $f(1)$

$$\text{Mà } f(1) = (3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 8)^{2013} \cdot (1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 3)^{2014} = (-1)^{2013} \cdot (-1)^{2014} = -1.$$

Vậy: Tổng các hệ số của đa thức sau khi phá ngoặc và sắp xếp là -1

c) Gọi $d = \text{ƯCLN}(12n+1, 30n+2) \quad (d \in \mathbb{N}^*)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12n+1 : d \\ 30n+2 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60n+5 : d \\ 60n+4 : d \end{cases} \Rightarrow (60n+5) - (60n+4) = 1 : d \Rightarrow d = 1$$

Vậy: Phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

Câu 3.

Gọi vận tốc và thời gian xe tải đi trên ba chặng đường lần lượt là $v_1, v_2, v_3; t_1, t_2, t_3$. Khi đó:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 5$$

Vì ba chặng đường dài bằng nhau, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỷ lệ nghịch, do

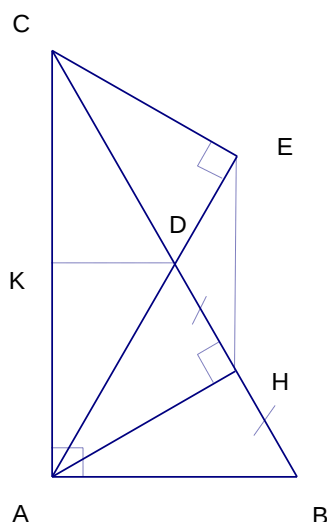
$$\text{đó: } t_1 : t_2 : t_3 = \frac{1}{v_1} : \frac{1}{v_2} : \frac{1}{v_3} = \frac{1}{40} : \frac{1}{24} : \frac{1}{60} = 3 : 5 : 2$$

$$\text{Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có: } \frac{t_1}{3} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_3}{2} = \frac{t_1+t_2+t_3}{10} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\text{Suy ra: } t_1 = 3 \cdot 0,5 = 1,5(\text{h});$$

$$\text{Quãng đường AB là: } 3 \cdot (40 \cdot 1,5) = 180(\text{km})$$

Câu 4.



a) $\triangle AHB = \triangle AHD$ (hai cạnh góc vuông tương ứng bằng nhau)

$\Rightarrow AB = AD$

$\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A.

$B = 60^\circ \Rightarrow \angle BAD = 60^\circ$

b) Kẻ $DK \perp AC \Rightarrow DK = DE = DH$ (tính chất đường phân giác)

$\Rightarrow \triangle DEH$ cân tại D

$\angle EDH = \angle ADC = 120^\circ$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \angle DHE = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle DHE = \angle ACB$ (ở vị trí so le trong) $\Rightarrow EH \parallel AC$

Câu 5.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 1.3 + 2.4 + 3.5 + 4.6 + \dots + 48.50 = 1.(2+1) + 2.(3+1) + 3.(4+1) + \dots + 48.(49+1) \\ &= 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 48.49 + (1+2+3+\dots+48) \end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } T_1 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 48.49 = \frac{48.49.50}{3} = 39200$$

$$T_2 = 1+2+3+\dots+48 = \frac{1+48}{2} \cdot 48 = 1176$$

$$\text{Vậy: } A = 39\,200 + 1176 = 40\,376$$

b) Vì $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}; \dots; \frac{1}{100^2} < \frac{1}{99.100}$ nên

$$B < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$\text{Tính được: } \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{49}{100}$$

$$\text{Suy ra: } B < \frac{1}{4} + \frac{49}{100} = \frac{25+49}{100} = \frac{74}{100} < \frac{75}{100} < \frac{3}{4}$$

Đề số 32**Câu 1.**

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3} \\ &= \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} + \frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3} \\ &= \left[\left(\frac{-4}{7} + \frac{-3}{7} \right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right) \right] : \frac{2}{3} = 0 : \frac{2}{3} = 0 \end{aligned}$$

Vậy : $A = 0$

$$\text{b) Vì } |x| = \frac{1}{2} \text{ nên } x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{2} \text{ thì: } A = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2} \text{ thì: } A = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 1 = 3$$

$$\text{Vậy : } A = 0 \text{ với } x = \frac{1}{2} \text{ và } A = 3 \text{ với } x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{c) Từ } \frac{x}{3} = \frac{y}{7} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{14}; \frac{y}{2} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{14} = \frac{z}{35}. \text{ Suy ra } \frac{x}{6} = \frac{y}{14} = \frac{z}{35}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{14} = \frac{z}{35} = \frac{x+y+z}{6+14+35} = \frac{-110}{55} = -2$$

$$\text{Suy ra } x = -2 \cdot 6 = -12; \quad y = -2 \cdot 14 = -28; \quad z = -2 \cdot 35 = -70.$$

$$\text{Vậy: } x = -12; \quad y = -28; \quad z = -70.$$

Câu 2.

$$\text{a) Ta có: } 4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 = \frac{41}{9} \cdot \frac{18}{41} - 7 = 2 - 7 = -5$$

$$\text{Lại có: } \left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot \frac{31}{45} \right) : \left(-21\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{16}{5} \cdot \frac{5}{16} + \frac{9}{2} \cdot \frac{76}{45} \right) : \left(-\frac{43}{2} \right) = \left(1 + \frac{38}{5} \right) \cdot \frac{-2}{43} = \frac{43}{5} \cdot \frac{-2}{43} = \frac{-2}{5}$$

$$\text{Do đó: } -5 < x < \frac{-2}{5} \text{ mà } x \in \mathbb{Z} \text{ nên } x \in \{-4; -3; -2; -1\}$$

$$\text{b) Do } |x-1| \geq 0; (y+2)^{20} \geq 0 \Rightarrow |x-1| + (y+2)^{20} \geq 0 \text{ với mọi } x, y.$$

Kết hợp $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$ suy ra $|x-1| = 0$ và $(y+2)^{20} = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1; y = -2.$$

Giá trị của biểu thức $C = 2x^5 - 5y^3 + 2015$ tại $x = 1; y = -2$

$$\text{là: } C = 2.1^5 - 5.(-2)^3 + 2015 = 2 + 40 + 2015 = 2057$$

Vậy $C = 2057$

Câu 3.

a) Gọi a, b, c là các chữ số của số có ba chữ số cần tìm. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq 9$.

Ta có $1 \leq a + b + c \leq 27$.

Mặt khác số cần tìm là bội của 18 nên là bội của 9,

do đó $a + b + c = 9$ hoặc $a + b + c = 18$ hoặc $a + b + c = 27$.

Theo đề bài ta có: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6}$;

Như vậy $a + b + c$ chia hết cho 6, nên $a + b + c = 18$.

Từ đó suy ra $a = 3, b = 6, c = 9$.

Do số phải tìm là bội của 18 nên chữ số hàng đơn vị chẵn,

vì vậy hai số cần tìm là: 396; 936.

b) Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ suy ra $c^2 = a.b$

$$\text{khi đó } \frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + a.b}{b^2 + a.b} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$$

c) Nhận xét: Với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên thì $|b-45| + b - 45$ là số chẵn với $b \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $2^a + 37$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ $\Leftrightarrow a = 0$.

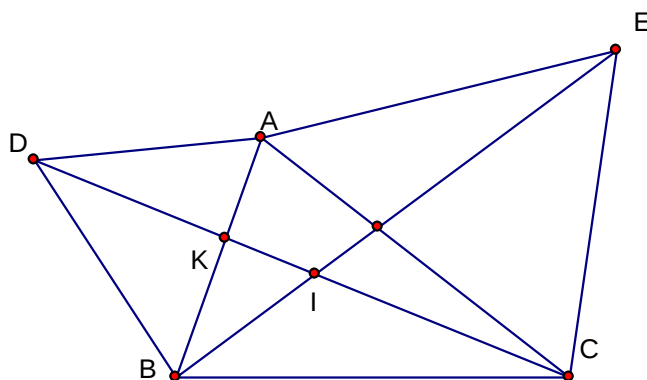
$$\text{Khi đó } |b-45| + b - 45 = 38$$

+ Nếu $b < 45$, ta có $-(b-45) + b - 45 = 38 \Leftrightarrow 0 = 38$ (loại)

+ Nếu $b \geq 45$, ta có $2(b-45) = 38 \Leftrightarrow b-45 = 19 \Leftrightarrow b = 64$ (TM)

vậy $(a; b) = (0; 64)$

Câu 4.



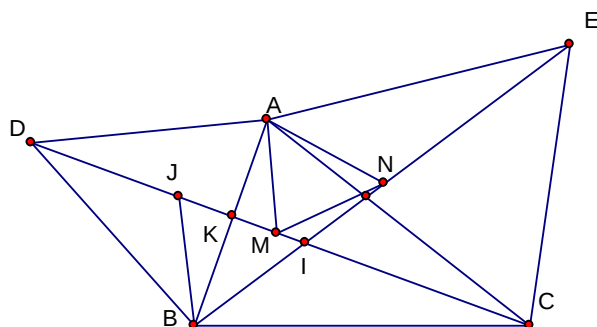
a) Ta có: $AD = AB$; $\angle DAC = \angle BAE$ và $AC = AE$

Suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c)

b) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow \angle ABE = \angle ADC$,

mà $\angle BKI = \angle AKD$ (đối đỉnh).

Khi đó xét $\triangle BIK$ và $\triangle DAK$ suy ra $\angle BIK = \angle DAK = 60^\circ$ (đpcm)



c) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow CM = EN$ và $\angle ACM = \angle AEN$

$\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$ và $\angle CAM = \angle EAN$

$\angle MAN = \angle CAE = 60^\circ$. Do đó $\triangle AMN$ đều.

d) Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB \Rightarrow \triangle BIJ$ đều $\Rightarrow BJ = BI$ và $\angle JBI = \angle DBA = 60^\circ$ suy ra $\angle IBA = \angle JBD$, kết hợp $BA = BD$

$\Rightarrow \triangle IBA = \triangle JBD$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AIB = \angle DJB = 120^\circ$ mà $\angle BID = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle DIA = 60^\circ$. Từ đó suy ra IA là phân giác của góc DIE

Câu 5.

Ta có:

$$a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + \dots + (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0 ; a_1 > 0 ;$$

$$a_2 + a_3 + a_4 > 0; \dots; a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0; a_{15} + a_{16} + a_{17} > 0; a_{18} + a_{19} + a_{20} > 0 \Rightarrow a_{14} < 0.$$

$$\text{Cũng như vậy: } (a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_{10} + a_{11} + a_{12}) + (a_{13} + a_{14}) + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0 \Rightarrow a_{13} + a_{14} < 0.$$

$$\text{Mặt khác, } a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0 \Rightarrow a_{12} > 0.$$

$$\text{Từ các điều kiện } a_1 > 0; a_{12} > 0; a_{14} < 0 \Rightarrow a_1 \cdot a_{14} + a_{14} a_{12} < a_1 \cdot a_{12} \text{ (đpcm).}$$

Đề số 33

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } A &= 1000 - \{(-125) \cdot (-8) - 11 \cdot [49 - 40 + 8 \cdot (121 - 121)]\} \\ &= 1000 - [1000 - 11 \cdot (9 + 8 \cdot 0)] \\ &= 1000 - (1000 - 11 \cdot 9) \\ &= 99 \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} &\left(3 - \frac{9}{10} - |x+2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1 \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{30}{10} - \frac{9}{10} - |x+2|\right) : \left(\frac{19}{10} - \frac{10}{10} - \frac{4}{10}\right) = 1 - \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{21}{10} - |x+2|\right) : \frac{5}{10} = \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow &\frac{21}{10} - |x+2| = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{10} \\ \Leftrightarrow &|x+2| = \frac{21}{10} - \frac{1}{10} = 2 \\ \Leftrightarrow &x+2 = -2; 2 \\ \Leftrightarrow &x = -4; 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x = 0; -4$$

$$\text{c) - Nếu } x > 11 \text{ hoặc } x < 10 \text{ thì } x - 10 > 1 \text{ hoặc } x - 11 < -1. \text{ Suy ra } |x-10| > 1; |x-11| > 1 \text{ (loại)}$$

$$\text{- Nếu } 10 < x < 11 \text{ thì } 0 < x - 10 < 1, 0 < 11 - x < 1. \text{ Suy ra } |x-10| < 1; |x-11| < 1. \text{ Do đó}$$

$$|x-10|^{10} < |x-10| = x-10; |x-11|^{11} = |11-x|^{11} < |11-x| = 11-x$$

$$\text{Suy ra } |x-10|^{10} + |x-11|^{11} < x-10 + 11-x = 1 \text{ (loại)}$$

$$\text{- Nếu } x = 10 \text{ hoặc } x = 11 \text{ thỏa mãn}$$

$$\text{Vậy } x = 10; 11$$

Câu 2.

$$\text{a) Gọi hai số phải tìm là } x \text{ và } y \text{ (} x > 0, y > 0 \text{ và } x \neq y \text{)}$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } 35 \cdot (x+y) = 210 \cdot (x-y) = 12x \cdot y$$

$$\text{Chia các tích trên cho BCNN của } 35, 210, 12 \text{ là } 420 \text{ ta được:}$$

$$\frac{35.(x+y)}{420} = \frac{210(x-y)}{420} = \frac{12xy}{420}$$

$$\text{hay } \frac{x+y}{12} = \frac{x-y}{2} = \frac{xy}{35} \quad (1)$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x+y}{12} = \frac{x-y}{2} = \frac{(x+y)+(x-y)}{12+2} = \frac{(x+y)-(x-y)}{12-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{12} = \frac{x-y}{2} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \frac{xy}{35} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{xy}{7y} = \frac{xy}{5x}$$

$$\text{Vì } x > 0; y > 0 \text{ nên } 7y = 35 \Rightarrow y = 5; 5x = 35 \Rightarrow x = 7$$

Vậy hai số phải tìm là 7 và 5

$$\text{b) Do } x, y, z \text{ khác } 0 \text{ nên } \frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} \Rightarrow \frac{zxy}{ayz+bxz} = \frac{xyz}{bzx+cyx} = \frac{yzx}{cxy+azy}$$

$$\text{Suy ra } ayz + bxz = bzx + cyx = cxy + azy \Rightarrow az = cx, bx = ay$$

$$\text{Do đó } \frac{x}{a} = \frac{z}{c}, \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = t \Rightarrow x = at, y = bt, z = ct, t \neq 0$$

$$\text{Ta có } \frac{xy}{ay+bx} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow \frac{at \cdot bt}{abt+bat} = \frac{a^2t^2+b^2t^2+c^2t^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{t}{2} = t^2 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ (do } t \neq 0)$$

$$\text{Vậy } x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{c}{2}$$

Câu 3.

$$\text{a) Theo đề ta có } 3xy - 2y = x^2 + 5 \Rightarrow y(3x - 2) = x^2 + 5 \quad (1)$$

Do x, y nguyên nên suy ra $x^2 + 5$ chia hết cho $3x - 2$

$$\Rightarrow 9.(x^2 + 5) \text{ chia hết cho } 3x - 2$$

$$\Rightarrow 9.x^2 + 45 \text{ chia hết cho } 3x - 2 \Rightarrow 9.x^2 - 6x + 6x - 4 + 49 \text{ chia hết cho } 3x - 2$$

$$\Rightarrow 3x.(3x - 2) + 2(3x - 2) + 49 \text{ chia hết cho } 3x - 2$$

$$\Rightarrow 49 \text{ chia hết cho } 3x - 2 \Rightarrow 3x - 2 \in \{-49; -7; -1; 1; 7; 49\}$$

$$\Rightarrow 3x \in \{-47; -5; 1; 3; 9; 51\} \Rightarrow x \in \{1; 3; 17\}$$

$$\text{Thay } x \text{ lần lượt vào (1) ta được } y \in \{6; 2; 6\}$$

Vậy các cặp số (x, y) là $(1; 6), (3; 2), (17; 6)$

$$\text{b) Do } \overline{ab}; \overline{ad} \text{ là các số nguyên tố nên } b \text{ và } d \text{ lẻ khác } 5 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác từ điều kiện ii) ta có } 9d + c = b(b-1) \quad (2)$$

$$\text{Có } 9d + c \geq 9 \text{ nên từ (2) suy ra } b > 3 \text{ mà } b \text{ lẻ } \Rightarrow b = 7; 9$$

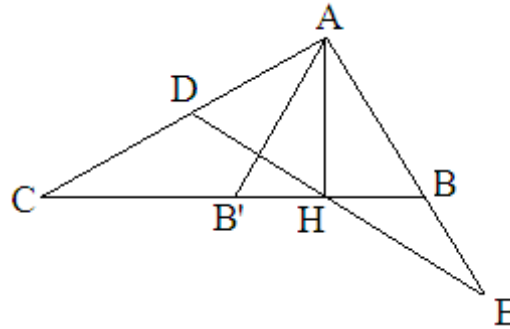
$$+ b = 7 \Rightarrow 9d + c = 42 \Rightarrow 3 < d \leq 4 \text{ trái với (1)}$$

$$+ b = 9 \Rightarrow 9d + c = 72 \Rightarrow 6 < d \leq 8 \text{ mà } d \text{ lẻ} \Rightarrow d = 7$$

Thay vào điều kiện (2) được $c = 9$.

Do $\overline{a9}; \overline{a7}$ là các số nguyên tố nên a chỉ có thể nhận các giá trị tương ứng 1; 2; 5; 7; 8 hoặc 1; 3; 4; 6; 9. Suy ra $a = 1$ và $\overline{abcd} = 1997$, thử lại thấy đúng.

Câu 4.



a) Ta có $\triangle BEH$ cân tại $B \Rightarrow \angle BEH = \angle BHE$

Ta có $\angle ABC = 2. \angle BHE = 2. \angle DHC$ mà $\angle ABC = 2. \angle ACB \Rightarrow \angle DHC = \angle DCH$ (1)

Suy ra $\triangle DCH$ cân tại D nên $DH = DC$

Xét $\triangle ACH$: $\angle CAH + \angle DCH = 90^\circ$, $\angle CHD + \angle DHA = 90^\circ$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\angle DAH = \angle DHA$, do đó $\triangle DAH$ cân tại D , suy ra $DA = DC$.

b) Lấy B' đối xứng với B qua H , suy ra $\triangle ABB'$ cân tại A (AH là trung trực của BB')

$\Rightarrow AB = AB'$, $B'H = BH$, $\angle AB'H = \angle ABC$.

Ta có $\angle AB'H = \angle ABC = 2. \angle C = \angle C + \angle CAB' \Rightarrow \angle C = \angle CAB'$, do đó $\triangle B'AC$ cân tại B' nên $B'A = B'C$

Vì $AB < AC$ nên $AB' = AB < AC$ nghĩa là B' ở giữa H và C nên

$$HC = HB' + B'C = HB + AB' = BE + AB = AE$$

Đề số 34

Câu 1.

$$\text{a) } 5^{2014} - 5^{2013} + 5^{2012} = 5^{2011}(5^3 - 5^2 + 5)$$

$$= 5^{2011}(125 - 25 + 5) = 5^{2011}.105 \text{ chia hết cho } 105$$

b) *) Nếu $p = 3k + 1$ ta có: $2p + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ là hợp số (trái gt)

*) Nếu $p = 3k + 2$ ta có $2p + 4 = 2(3k + 2) + 2 = 6(k + 1)$ là hợp số (trái gt)

Vậy $p = 3k$, mặt khác p là số nguyên tố nên $p = 3$

Câu 2.

$$\text{a) Nếu } x \geq \frac{3}{2} \text{ thì } |3 - 2x| = x + 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = 4$$

Nếu $x < \frac{3}{2}$ thì $|3-2x| = x+1 \Leftrightarrow 3-2x = x+1 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Vậy $x = 4$ hoặc $x = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2012}{2} + 1 + \frac{2011}{3} + 1 + \dots + \frac{2}{2012} + 1 + \frac{1}{2013} + 1 + 1 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2014}{2} + \frac{2014}{3} + \dots + \frac{2014}{2012} + \frac{2014}{2013} + \frac{2014}{2014} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = 2014 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014}\right) \Leftrightarrow x = 2014 \end{aligned}$$

Câu 3.

$$\text{a)} \text{ Ta có } \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{21} = \frac{y}{14} \quad (1); \quad 5x = 7z \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{z}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{21} = \frac{z}{15} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \frac{x}{21} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = \frac{x-2y+z}{21-28+15} = \frac{32}{8} = 4$$

Tìm được: $x = 84$; $y = 56$; $z = 60$

$$\text{b)} \text{ Đặt: } \frac{7x+5y}{3x-7y} = \frac{7z+5t}{3z-7t} = k \Rightarrow 7x+5y = k(3x-7y) \Rightarrow (3k-7)x = (7k+5)y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{7k+5}{3k-7} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } 7z+5t = k(3z-7t) \Rightarrow (3k-7)z = (7k+5)t \Rightarrow \frac{z}{t} = \frac{7k+5}{3k-7} \quad (2)$$

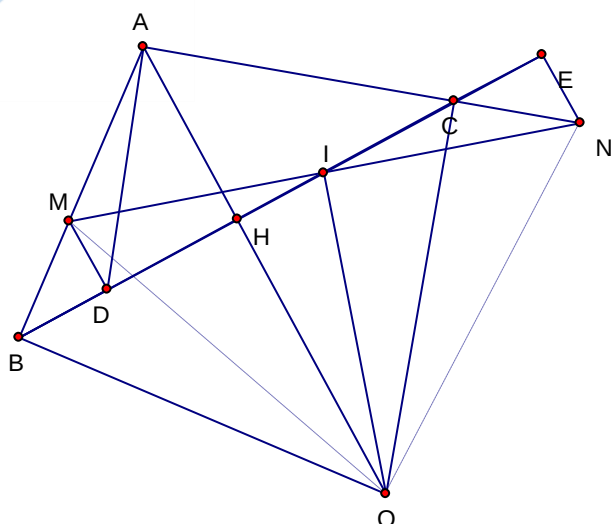
Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

$$\text{c)} \quad A = |x-2013| + |2014-x| + |x-2015| = (|x-2013| + |2015-x|) + |x-2014|$$

Ta có: $|x-2013| + |2015-x| \geq |x-2013+2015-x| = 2$. Dấu "=" xảy ra khi: $2013 \leq x \leq 2015$ (1)

Lại có: $|x-2014| \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 2014$ (2). Từ (1) và (2) Ta có $\min A = 2$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 2014$

Câu 4.



a) Do $AB < BC$ nên $A > B$, mà $B = C$ vì tam giác ABC cân. Mà $A + B + C = 180^\circ$ nên ta có $A > 60^\circ$ (HS có thể c/m bằng phản chứng)

b) HS chứng minh được $\triangle BDM = \triangle CEN$ suy ra $EN = DM$

HS chứng minh được $\triangle IDM = \triangle IEN$ suy ra $IN = IM$

c) Kẻ AH vuông góc với BC. Gọi O là giao điểm của AH và đường thẳng vuông góc với MN ở I.
HS chứng minh được O là điểm cố định.

Đề số 35

Câu 1.

$$\begin{aligned}
 1) \quad A &= (-1) \cdot \frac{(-7)^3}{8^3} \cdot \frac{(-2)^2}{7^2} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{(-1) \cdot (-7)^3 \cdot (-2)^2}{2^9 \cdot 7^2 \cdot 2} \\
 &= \frac{(-1) \cdot (-7) \cdot (-1)}{2^8} \\
 &= \frac{-7}{256}
 \end{aligned}$$

Tính:

$$\begin{aligned}
 *) \quad \frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} &= \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right)}{7 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right)} \\
 &= \frac{2}{7} \quad \left(\text{vì } \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \neq 0 \right)
 \end{aligned}$$

$$*) \frac{-1\frac{1}{6} + 0,875 - 0,7}{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}} = \frac{-7 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right)}{2 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right)}$$

$$= \frac{-7}{2} \text{ (vì } \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \neq 0 \text{)}$$

$$B = 2016 : \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{-7}{2}\right) = -2016$$

2) Cho đa thức $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Vì $Q(x) \div 3$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$, nên

Với $x = 0$, ta có $Q(0) = d \div 3$

Với $x = 1$, ta có $Q(1) = a + b + c + d \div 3$

mà $d \div 3 \Rightarrow a + b + c \div 3$ (1)

Với $x = -1$, ta có $Q(-1) = -a + b - c + d \div 3$

mà $d \div 3 \Rightarrow -a + b - c \div 3$ (2)

$Q(1) + Q(-1) = 2b \div 3$ mà $(2; 3) = 1$ nên $b \div 3$

$Q(1) - Q(-1) = 2(a + c) \div 3$ mà $(2; 3) = 1$ nên $a + c \div 3$ (3)

Với $x = 2$, ta có $Q(2) = 8a + 4b + 2c + d \div 3$

hay $7a + (a + c) + 2b + d \div 3$

Mà $d \div 3, a + c \div 3, b \div 3$ nên $7a \div 3$ mà $(7; 3) = 1 \Rightarrow a \div 3$

Từ (3) suy ra $c \div 3 \Rightarrow \text{đpcm}$

Câu 2.

1) Với $a, b, c \neq 0$, ta có

$$\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} = \frac{bza - cya}{a^2} = \frac{bcx - baz}{b^2} = \frac{acy - bcx}{c^2}$$

$$= \frac{bza - cya + bcx - baz + acy - bcx}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{0}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$$

Suy ra $\frac{bz - cy}{a} = 0$, do đó $bz = cy \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (1)

$$\frac{cx - az}{b} = 0, \text{ do đó } cx = az \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

2) Gọi ba phần được chia của số M là x, y, z , ta được $x + y + z = M$

Theo đề bài ta có $x : y : z = \frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 10728$ (1)

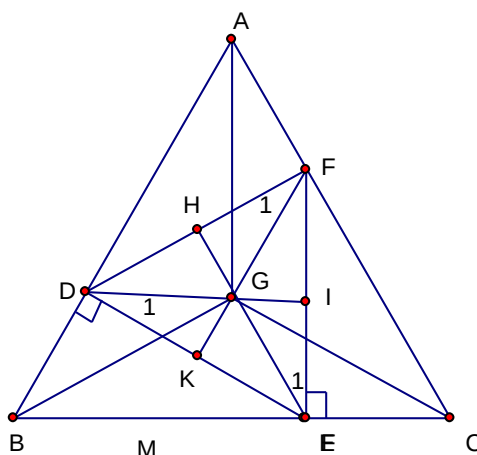
Hay $\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 10728$

Suy ra $x^3 = 10^3 \cdot k^3$; $y^3 = 6^3 \cdot k^3$; $z = 5^3 \cdot k^3$

Thay vào (1), được $1341k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$

suy ra $x = 20$; $y = 12$; $z = 10$ Vậy $M = 42$.

Câu 3.



1) $\triangle ABC$ đều nên $AB = AC = BC = a$ và $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

$$BD = \frac{1}{3}a \quad (\text{gt}) \Rightarrow AD = \frac{2}{3}a$$

Xét $\triangle BDE$ vuông tại D có $\angle B = 60^\circ \Rightarrow \angle DEB = 30^\circ$

Xét $\triangle BDE$ vuông tại D có $\angle DEB = 30^\circ \Rightarrow BD = \frac{1}{2} BE$

$$\text{hay } BE = 2 BD = 2 \cdot \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a \text{ mà } BC = a \text{ nên } EC = \frac{1}{3}a$$

Tương tự, xét $\triangle ECF$ vuông tại E có $\angle C = 60^\circ \Rightarrow \angle EFC = 30^\circ$

$$\Rightarrow AF = \frac{1}{3}a$$

Xét $\triangle ADF$ và $\triangle BED$ có:

$$AD = BE \left(= \frac{2}{3}a \right)$$

$$\angle A = \angle B \left(= 60^\circ \right)$$

$$AF = BD \left(= \frac{1}{3}a \right)$$

$$\Rightarrow \triangle ADF = \triangle BED \text{ (c. g. c)}$$

$$\Rightarrow \angle AFD = \angle BDE \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Mà $\angle BDE = 90^\circ \Rightarrow \angle AFD = 90^\circ$ hay $DF \perp AC$

2) Chứng minh tương tự cũng có $\triangle DBE = \triangle ECF$ (c.g.c) $\Rightarrow DE = EF$ (hai cạnh tương ứng)

Có $\triangle ADF = \triangle BED$ (c.g.c) (cmt) $\Rightarrow DF = DE$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow DE = DF = EF \Rightarrow \triangle DEF$ là tam giác đều.

3) Xét $\triangle DEF$ đều có G là trọng tâm của tam giác $\Rightarrow G$ là giao điểm của ba đường phân giác

$\Rightarrow GD, GE, GF$ là các đường phân giác của các góc $\angle EDF; \angle DEF; \angle DFE$

Có $\triangle DEF$ đều nên $\angle D = \angle E = \angle F = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle D_1 = \angle E_1 = \angle F_1 = 30^\circ$ (cùng bằng nửa góc $\angle D, \angle E, \angle F = 60^\circ$)

Suy ra $\angle BDG = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$

$\angle CEG = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$

$\angle AFG = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$

Xét $\triangle DEF$ đều có G là trọng tâm của tam giác $\Rightarrow G$ là giao điểm của ba đường trung trực

$\Rightarrow GD = GE = GF$

*) Xét $\triangle AGF$ và $\triangle BGD$ có

$GF = GD$

$\angle AFG = \angle BDG (= 120^\circ)$

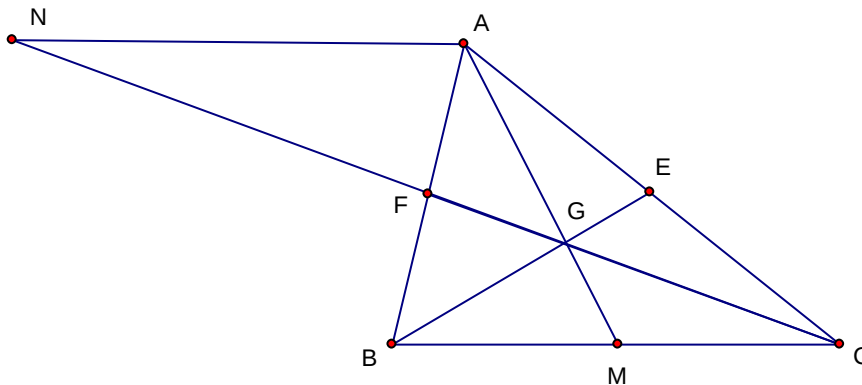
$AF = BD$

$\Rightarrow \triangle AGF = \triangle BGD$ (c.g.c) $\Rightarrow GA = GB$ (hai cạnh tương ứng)

Tương tự, có $\triangle AGF = \triangle CGE$ (c.g.c) $\Rightarrow AG = GC$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AG = BG = CG$ (đpcm)

Câu 4.



Vẽ trung tuyến CF của Tam giác ABC , Trên tia đối của tia FC lấy điểm N sao cho $FN = FC$.

C/M được: $\triangle ANF = \triangle BCF$ (c-g-c) $\Rightarrow AN = BC$

Xét $\triangle CAN$ có $AN + AC > NC$ (bất đẳng thức tam giác)

$\Rightarrow AC + BC > NC$

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $CF = 3 GF \Rightarrow NC = 6 GF$ (1)

Ta sẽ chứng minh: nếu $\angle AGB \leq 90^\circ$ thì $GF \geq \frac{AB}{2}$

Giả sử $GF < \frac{AB}{2}$ hay $GF < AF = BF$ thì $\angle FAG < \angle AGF$; $\angle FBG < \angle BGF$ (quan hệ góc và cạnh tương ứng trong tam giác)

$$\Rightarrow \angle ABG + \angle BAG < \angle FGB + \angle FGA = \angle AGB \leq 90^\circ$$

Xét tam giác AGB có $\angle ABG + \angle BAG + \angle AGB < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ vô lí.

Vậy nếu $\angle AGB \leq 90^\circ$ thì $GF \geq \frac{AB}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow NC \geq 3AB$ suy ra $AC + BC > 3AB$ (đpcm)

Câu 5.

$$\text{Biến đổi } C = \frac{22-3x}{4-x} = \frac{3(4-x)+10}{4-x} = 3 + \frac{10}{4-x}$$

C có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{10}{4-x}$ có giá trị lớn nhất

Có $x \in \mathbb{Z}$, ta xét các trường hợp sau

$$\text{Với } x > 4 \Rightarrow 4-x < 0 \text{ thì } \frac{10}{4-x} < 0 \quad (1)$$

Với $x > 4 \Rightarrow 4-x > 0$. Phân số $\frac{10}{4-x}$ có tử và mẫu đều dương, tử không đổi nên có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất

Có $x \in \mathbb{Z}$ Suy ra $4-x \in \mathbb{Z}$

Suy ra $4-x$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 4-x=1 \Rightarrow x=3$

khi đó $\frac{10}{4-x}$ có giá trị là 10 (2)

Từ (1) và (2), phân số $\frac{10}{4-x}$ lớn nhất bằng 10

Vậy GTLN của C bằng 13 khi và chỉ khi $x=3$

Đề số 36

Câu 1.

a) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$

Vì a, b, c là các số dương nên $a + b + c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{Nên: } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Mà: } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{a+b}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

Vậy: $B = 8$

b) Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, a \neq \pm b, c \neq \pm d$.

$$\text{Chứng minh: } \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{2013} = \left(\frac{c}{d}\right)^{2013} = \left(\frac{a-c}{b-d}\right)^{2013} \quad (1)$$

$$\text{Mà: } \left(\frac{a}{b}\right)^{2013} = \left(\frac{c}{d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013}}{b^{2013}} = \frac{c^{2013}}{d^{2013}} = \frac{a^{2013} + c^{2013}}{b^{2013} + d^{2013}} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 2.

a) Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

Chứng minh rằng: Biểu thức sau có giá trị nguyên

$$A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z} = \frac{x+y+z+t}{3(x+y+z+t)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = y+z+t; 3y = z+t+x; 3z = t+x+y; 3t = x+y+z$$

$$\Rightarrow x+y = z+t; y+z = t+x; z+t = x+y; t+x = y+z$$

$$\Rightarrow A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z} = 1+1+1+1 = 4 \in \mathbb{Z}$$

Vậy biểu thức A có giá trị nguyên. (đpcm)

b) Tìm x biết: $x^2 - 5x + 6 = 0$

Ta có: $x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x) - (2x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy: $x = 2$ hoặc $x = 3$

c) Số A được chia thành ba phần số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

Gọi ba phần được chia lần lượt là: a, b, c

Theo bài ra ta có: $a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 24309$

$$\text{Ta có: } a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} = 24 : 45 : 10 \Rightarrow \frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10} \Rightarrow \frac{a^2}{576} = \frac{b^2}{2025} = \frac{c^2}{100} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{576 + 2025 + 100} = \frac{24309}{2701} = 9$$

$$\Rightarrow a^2 = 576 \cdot 9 = 5184 \Rightarrow a = \pm 72$$

$$b^2 = 2025 \cdot 9 = 18225 \Rightarrow b = \pm 135$$

$$c^2 = 100 \cdot 9 = 900 \Rightarrow c = 30$$

$$\text{Vì: } \frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10} \Rightarrow a, b, c \text{ cùng dấu.}$$

$$\Rightarrow A = -72 + (-135) + (-30) = -237$$

$$A = 72 + 135 + 30 = 235$$

Vậy: $A = -135$ hoặc $A = 135$

Câu 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$$

$$\text{Ta có: } |x - 2015| = |2015 - x|$$

$$\Rightarrow A = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014|$$

$$\Rightarrow A \geq |x - 2013 + 2015 - x| + |x - 2014|$$

$$\Rightarrow A \geq 2 + |x - 2014|$$

Mà: $|x - 3014| \geq 0$

$\Rightarrow A \geq 0$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2013)(2015-x) \\ x=2014 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2013 \leq x \leq 2014 \\ x=2014 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 2014$

Vậy GTNN của A là 2 khi $x = 2014$

Câu 4.

Tìm hai số dương biết tổng hiệu tích của chúng tỉ lệ nghịch với ba số 30; 120; 16.

Gọi hai số dương cần tìm là x, y

Theo bài ra ta có: $30(x+y) = 120(x-y) = 16xy$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{8} = \frac{x-y}{2} = \frac{xy}{15} = k$$

$$\Rightarrow x+y=8k; x-y=2k; xy=15k$$

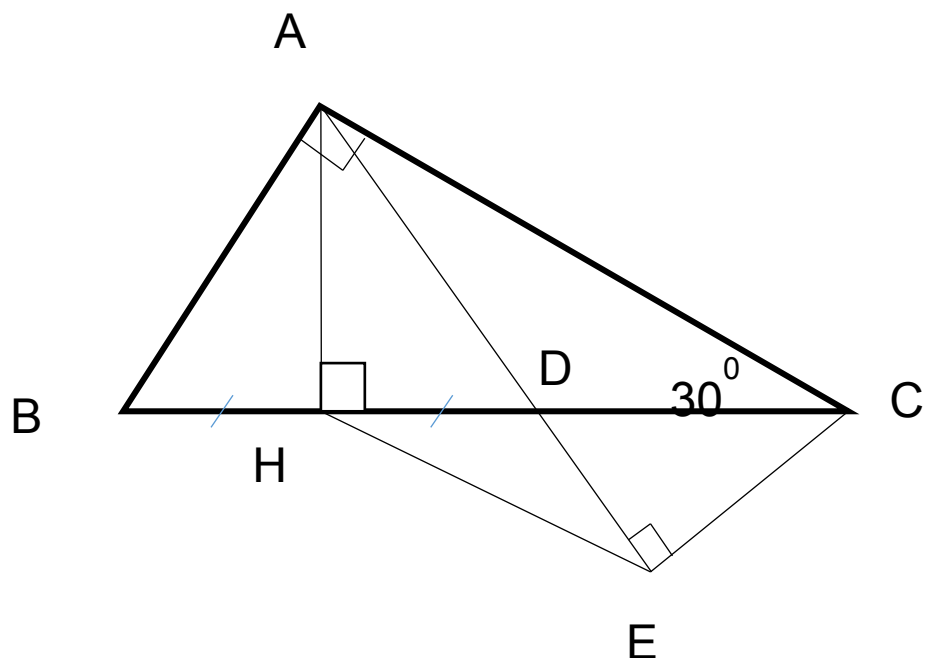
$$\Rightarrow x=5k; y=3k \Rightarrow xy=5k \cdot 3k = 15k$$

$$15k^2 = 15k \Rightarrow k=1$$

$$\Rightarrow x+y=8; x-y=2 \Rightarrow x=5; y=3$$

Vậy hai số dương cần tìm là 5 và 3.

Câu 5.



a) $\triangle ABD$ có AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\triangle ABD$ cân tại A.

Ta có: $B+C=90^\circ$ (Hai góc nhọn của một tam giác vuông)

$$\Rightarrow B=90^\circ-30^\circ=60^\circ$$

Nên $\triangle ABD$ là tam giác đều. (đpcm)

b) Ta có: $EAC = BAC - ABD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\Rightarrow \triangle AHC = \triangle CEA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Do đó $AH = CE$ (đpcm)

c) (2,5 điểm)

$\triangle AHC = \triangle CEA$ (cmt) nên $HC = EA$ (1)

$\triangle ADC$ cân ở D vì có $ADC = DCA = 30^\circ \Rightarrow \triangle DAC$ cân ở D.

Suy ra : $DA = DC$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DH = DE \Rightarrow \triangle DHE$ cân tại D

Hai tam giác cân ADC và DEH có:

Hai tam giác cân: $\triangle ACD$ cân tại D và $\triangle DHE$ cân tại D có:

$ADC = HDE$ (đđ) $\Rightarrow DHE = ADC$ ở vị trí so le trong

$\Rightarrow EH \parallel AC$ (đpcm)

Đề số 37

Câu 1.

a) Tính giá trị biểu thức $P = \left| a - \frac{1}{2014} \right| + \left| a - \frac{1}{2016} \right|$, với $a = \frac{1}{2015}$.

Thay $a = \frac{1}{2015}$ vào biểu thức $P = \left| \frac{1}{2015} - \frac{1}{2014} \right| + \left| \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} \right|$

Ta có $P = \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}$

$$P = \frac{1}{2014} - \frac{1}{2016}$$

$$P = \frac{2016 - 2014}{2014 \cdot 2016} = \frac{2}{2014 \cdot 2016}$$

$$P = \frac{1}{1007 \cdot 2016} = \frac{1}{2030112}$$

b) Tìm số nguyên x để tích hai phân số $\frac{6}{x+1}$ và $\frac{x-1}{3}$ là một số nguyên.

$$\begin{aligned} \text{Đặt } A &= \frac{6}{x+1} \cdot \frac{x-1}{3} = \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x-1}{1} \\ &= \frac{2(x-1)}{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2x-2}{x+1} \\
&= \frac{2(x+1)-4}{x+1} \\
&= 2 - \frac{4}{x+1}
\end{aligned}$$

Để A nhận giá trị nguyên thì $x+1$ là $U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Suy ra $x \in \{0; -2; 1; -3; 3; -5\}$

Câu 2.

2. a) Cho $a > 2, b > 2$. Chứng minh $ab > a+b$

$$\text{Từ } a > 2 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{2}$$

$$b > 2 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} < 1$$

Vậy $ab > a+b$

b) Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích của hình thứ nhất và diện tích của hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5, diện tích hình thứ hai và diện tích hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8, hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27 cm, hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là 24 cm. Tính diện tích của mỗi hình chữ nhật đó.

Gọi diện tích ba hình chữ nhật lần lượt là S_1, S_2, S_3 , chiều dài, chiều rộng tương ứng là $d_1, r_1; d_2, r_2; d_3, r_3$ theo đề bài ta có

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}; \frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} \text{ và } d_1 = d_2; r_1 + r_2 = 27; r_2 = r_3, d_3 = 24$$

Vì hình thứ nhất và hình thứ hai cùng chiều dài

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_1+r_2}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Suy ra chiều rộng $r_1 = 12\text{cm}, r_2 = 15\text{cm}$

Vì hình thứ hai và hình thứ ba cùng chiều rộng

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} = \frac{d_2}{d_3} \Rightarrow d_2 = \frac{7d_3}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21\text{cm}$$

Vậy diện tích hình thứ hai $S_2 = d_2 r_2 = 21 \cdot 15 = 315\text{ cm}^2$

Diện tích hình thứ nhất

$$S_1 = \frac{4}{5} S_2 = \frac{4}{5} \cdot 315 = 252 \text{ cm}^2$$

Diện tích hình thứ ba $S_3 = \frac{8}{7} S_2 = \frac{8}{7} \cdot 315 = 360 \text{ cm}^2$

Câu 3.

a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có :

$$AM = EM \quad (\text{gt})$$

$$\angle AMC = \angle EMB \quad (\text{đối đỉnh})$$

$$BM = MC \quad (\text{gt})$$

$$\text{Nên : } \triangle AMC = \triangle EMB \quad (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow AC = EB$$

$$\text{Vì } \triangle AMC = \triangle EMB$$

$$\Rightarrow \text{Góc MAC bằng góc MEB}$$

(2 góc có vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC và EB cắt đường thẳng AE). Suy ra $AC \parallel BE$.

b) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có :

$$AM = EM \quad (\text{gt})$$

$$\angle MAI = \angle MEK \quad (\text{vì } \triangle AMC = \triangle EMB)$$

$$AI = EK \quad (\text{gt})$$

$$\text{Nên } \triangle AMI = \triangle EMK \quad (\text{c.g.c}). \text{ Suy ra } \angle AMI = \angle EMK$$

$$\text{Mà } \angle AMI + \angle IME = 180^\circ \quad (\text{tính chất hai góc kề bù})$$

$$\Rightarrow \angle EMK + \angle IME = 180^\circ \Rightarrow \text{Ba điểm I; M; K thẳng hàng}$$

c) Trong tam giác vuông BHE ($H = 90^\circ$) có $\angle HBE = 50^\circ$

$$\Rightarrow \angle HBE = 90^\circ - \angle HEB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

$\angle BME$ là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$

$$\text{Nên } \angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$$

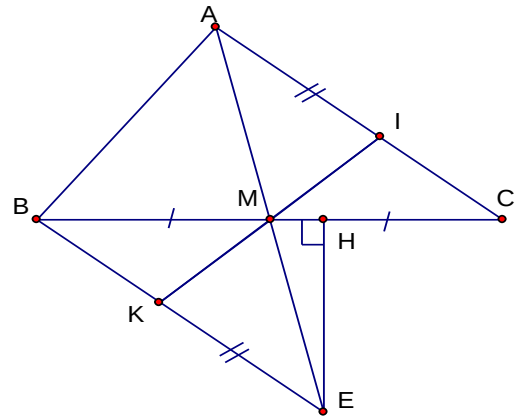
(định lý góc ngoài của tam giác)

Câu 4.

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$.

Chứng minh rằng $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Ta có $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$



$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

Suy ra $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_{10} + a_{15})$

Vậy $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Câu 5:

Kẻ $BH \perp AC$

Vì $\angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \angle ABH = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{AB}{2}$ (1)

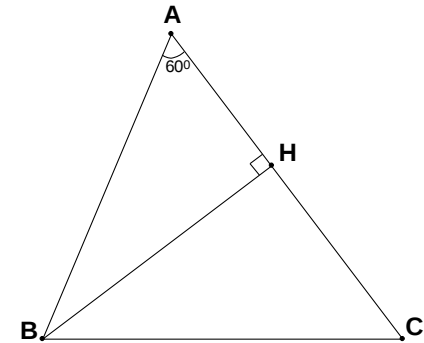
Áp dụng định lý Pitago ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \text{ và } BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 - AH^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 - AH^2 + (AC - AH)^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 - AH^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH + AH^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH \text{ (2)}$$

Từ (1) & (2) $\Rightarrow$ đpcm



Đề số 38

Câu 1.

$$A = 1 \quad B = \frac{1}{4}$$

Câu 2. áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta tính được

$$a_1 = a_2 = \dots = a_9 = 10$$

Câu 3.

a) Vì $|x^2 + 2x| \geq 0$ và $|y^2 - 9| \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$ và $y^2 - 9 = 0$ từ đó tìm được các cặp $(x; y) = \{(0; 3); (0; -3); (-2; 3); (-2; -3)\}$

b) Vì $\sqrt{(x - \sqrt{2})^2} \geq 0$ với $\forall x$; $\sqrt{(y + \sqrt{2})^2} \geq 0$ với $\forall y$; $|x + y + z| \geq 0$ với $\forall x, y, z$

Suy ra đẳng thức đã cho tương đương
$$\begin{cases} \sqrt{(x - \sqrt{2})^2} = 0 \\ \sqrt{(y + \sqrt{2})^2} = 0 \\ |x + y + z| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Câu 4: Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ suy ra $c^2 = a.b$ khi đó $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + a.b}{b^2 + a.b} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$

$$\Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Từ } \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2} - 1 = \frac{b}{a} - 1 \text{ hay } \frac{b^2+c^2-a^2-c^2}{a^2+c^2} = \frac{b-a}{a}$$

$$\text{vậy } \frac{b^2-a^2}{a^2+c^2} = \frac{b-a}{a}$$

Câu 5:

a. Biểu thức xác định $f(x) = |x+1|$

Khi $f(x) = 2 \Rightarrow |x+1| = 2$ từ đó tìm được $x = 1; x = -3$.

b) Thay giá trị tương ứng của x vào 2 đa thức, ta tìm được biểu thức $P(1)$ và $Q(-1)$ theo m giải phương ẩn m mới tìm được $\Rightarrow m = -\frac{1}{4}$

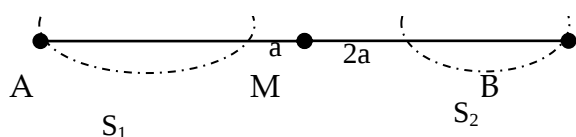
Câu 6. Ta có $C = -18 - (|2x-6| + |3y+9|) \leq -18$

Vì $|2x-6| \geq 0; |3y+9| \geq 0$

Suy ra C đạt giá trị lớn nhất bằng -18 khi $\begin{cases} 2x-6=0 \\ 3y+9=0 \end{cases}$

$\Rightarrow x = 3$ và $y = -3$.

Câu 7.



Quảng đường AB dài 540km, nửa quãng đường AB dài 270km.

Gọi t là khoảng thời gian từ lúc khởi hành cho đến khi ô tô và xe máy lần lượt cách M bằng a và $2a$ (km, $a > 0$).

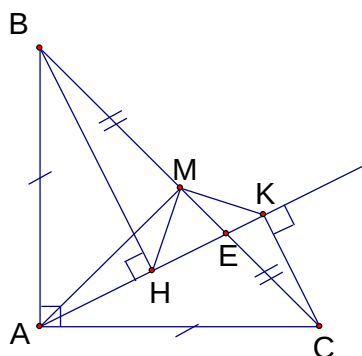
Khi đó ô tô và xe máy lần lượt đi được quãng đường là: $270 - a$ và $270 - 2a$

$$\Rightarrow t = \frac{270-a}{65} = \frac{270-2a}{40}$$

$$t = \frac{540-2a}{130} = \frac{270-2a}{40} = \frac{(540-2a)-(270-2a)}{130-40} = \frac{270}{90} = 3$$

Vậy sau khi khởi hành 3 giờ thì ô tô cách M một khoảng bằng $\frac{1}{2}$ khoảng cách từ xe máy tới M.

Câu 8.



a) Theo bài ra ta có: $\angle BAH + \angle KAC = \angle BAH + \angle HBA \Rightarrow \angle KAC = \angle HBA$

mà $AB = CA$ (gt)

$\Rightarrow \triangle HAB = \triangle KCA$ (ch - gn) $\Rightarrow BH = AK$

b) Cả $\angle MBH + \angle HBA = 45^\circ = \angle MAK + \angle KAC$ mà $\angle KAC = \angle HBA$ (c/m trên)

$\Rightarrow \angle MBH = \angle MAK$

Xét $\triangle MBH$ và $\triangle MAK$ có:

$MB = MA$ (t/c tam giác vuông)

$\angle MBH = \angle MAK$ (c/m trên)

$BH = AK$ (c/m trên)

$\Rightarrow \triangle MBH = \triangle MAK$ (đpcm)

c) Từ các kết quả trên $\Rightarrow \triangle MHA = \triangle MKC$ (c.c.c) và $MH = MK$ (1)

$\Rightarrow \angle KMC = \angle HMA \Rightarrow \angle KMC + \angle CMH = \angle HMA + \angle CMH = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle HMK = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle MHK$ vuông tại M (đpcm)

Đề số 39

Câu 1.

a) Ta có:

$$3^{x-1}(1+5) = 162 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 27$$

$$\Rightarrow x-1 = 3 \Rightarrow x = 4$$

b) Ta có:

$$3x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(3 + x) = 0$$

$$x=0 \text{ hoặc } x=-3$$

c) Ta có:

$$(x-1)(x-3) < 0 \text{ vì } x-1 > x-3 \text{ nên}$$

$$(x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

Câu 2.

a) Ta có:

Từ $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ ta có: $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25} = \frac{2x^2}{18} = \frac{2y^2}{32} = \frac{3z^2}{75} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 3z^2}{-25} = \frac{-100}{-25} = 4$

$$\begin{cases} x^2 = 36 \\ y^2 = 64 \\ z^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ z = 10 \\ x = -6 \\ y = -8 \\ z = -10 \end{cases} \quad (\text{Vì } x, y, z \text{ cùng dấu})$$

b) Ta có:

Ta có $\frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2d} = \frac{d}{2a} = \frac{a+b+c+d}{2b+2c+2d+2a} = \frac{1}{2}$ (do $a, b, c, d > 0$)

$$\Rightarrow a + b + c + d > 0$$

$$\text{suy ra } a = b = c = d$$

$$\text{Thay vào tính được } P = 2$$

Câu 3.

a) Ta có:

$$\text{Ta có } x + y + xy = 2 \Leftrightarrow x + 1 + y(x + 1) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y+1) = 3$$

Do x, y nguyên nên $x + 1$ và $y + 1$ phải là ước của 3. Lập bảng ta có:

$x+1$	1	3	-1	-3
$y+1$	3	1	-3	-1
x	0	2	-2	-4
y	2	0	-4	-2

Vậy các cặp (x, y) là: $(0, 2); (2, 0); (-2, -4); (-4, -2)$.

b) Ta có:

$$Q = \frac{27 - 2x}{12 - x} = 2 + \frac{3}{12 - x}$$

$$A \text{ lớn nhất khi } \frac{3}{12 - x} \text{ lớn nhất}$$

$$* \text{ Xét } x > 12 \text{ thì } \frac{3}{12 - x} < 0$$

* Xét $x < 12$ thì $\frac{3}{12-x} > 0$. Vì phân số có tử và mẫu là các số dương, tử không đổi nên phân số có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất.

$$\text{Vậy để } \frac{3}{12-x} \text{ lớn nhất thì } \begin{cases} 12-x > 0 \\ x \in \mathbb{Z} \\ 12-x \text{ nhỏ nhất} \end{cases} \Leftrightarrow x = 11$$

A có giá trị lớn nhất là 5 khi $x = 11$

Câu 4.

a) Ta có:

1 là nghiệm của $f(x) \Rightarrow f(1) = 0$ hay $a + b + c = 0$ (1)

-1 là nghiệm của $f(x) \Rightarrow f(-1) = 0$ hay $a - b + c = 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2a + 2c = 0 \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow a = -c$

Vậy a và c là hai số đối nhau.

b) Ta có $(|x-3|+2) \geq 2, \forall x \Rightarrow (|x-3|+2)^2 \geq 4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$

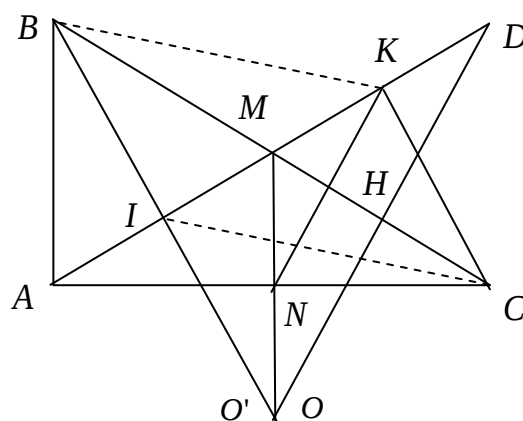
$|y+3| \geq 0, \forall y$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = -3$

Vậy $P = (|x-3|+2)^2 + |y+3| + 2007 \geq 4 + 2007 = 2011$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$ và $y = -3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 2011 \Leftrightarrow x = 3$ và $y = -3$

Câu 5.



a) (2,0 đ)

- Chứng minh $\triangle IBM = \triangle KCM \Rightarrow IM = MK$

- Chứng minh $\triangle IMC = \triangle KMB$

$\Rightarrow CI = BK$ và góc $MKB = \text{góc } MIC \Rightarrow BK \parallel CI$

b) (1,5 đ)

Chỉ ra được $AM = MC \Rightarrow \triangle AMC$ cân tại M

$\Rightarrow$ đường cao MN đồng thời là đường trung tuyến của $\triangle AMC$

$\Rightarrow N$ là trung điểm AC

ΔAKC vuông tại K có KN là trung tuyến $\Rightarrow KN = \frac{1}{2} AC$

Mặt khác $MC = \frac{1}{2} BC$

Lại có ΔABC vuông tại $A \Rightarrow BC > AC \Rightarrow \frac{1}{2} BC > \frac{1}{2} AC$ hay $MC > KN$

Vậy $MC > KN$ (ĐPCM)

c) (1,0 đ)

Theo CM ý a $IM = MK$ mà $AM = MD$ (gt)

$\Rightarrow AI = KD$

Vậy để $AI = IM = MK = KD$ thì cần $AI = IM$

Mặt khác $BI \perp AM \Rightarrow$ khi đó BI vừa là trung tuyến, vừa là đường cao ΔABM

$\Rightarrow \Delta ABM$ cân tại B (1)

Mà ΔABC vuông tại A , trung tuyến AM nên ta có ΔABM cân tại M (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔABM đều $\Rightarrow$ góc $ABM = 60^\circ$

Vậy vuông ΔABC cần thêm điều kiện góc $ABM = 60^\circ$

d) (1,0 đ)

Xảy ra 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu I thuộc đoạn $AM \Rightarrow H$ thuộc đoạn MC

$\Rightarrow BI$ và DH cắt tia MN .

Gọi O là giao điểm của BI và tia MN , O' là giao điểm của DH và tia MN

Dễ dàng chứng minh $\Delta AIO = \Delta MHO' \Rightarrow MO = MO' \Rightarrow O \equiv O'$

Suy ra BI, DH, MN đồng quy.

Trường hợp 2: Nếu I thuộc đoạn $MD \Rightarrow H$ thuộc đoạn MB

$\Rightarrow BI$ và BH cắt tia đối của tia MN . Chứng minh tương tự trường hợp 1

Vậy BI, DH, MN đồng quy.

(Học sinh có thể sử dụng các cách khác để CM: VD sử dụng tính chất đồng quy của 3 đường cao...)

Đề số 40

Câu 1.

a) So sánh: $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1$ và $\sqrt{99}$

Ta có: $\sqrt{17} > \sqrt{16}; \sqrt{26} > \sqrt{25} \Rightarrow \sqrt{17} + \sqrt{26} + 1 > \sqrt{16} + \sqrt{25} + 1 = 4 + 5 + 1 = 10$

Mà $10 = \sqrt{100} > \sqrt{99}$

Vậy: $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1 > \sqrt{99}$.

b) Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \dots; \frac{1}{\sqrt{99}} > \frac{1}{\sqrt{100}}$

Suy ra: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}} = 10$

Vậy: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$

c) Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$ **và** $P = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$.

Tính $(S - P)^{2016}$

Ta có: $P = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} \right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2014} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} = S.$$

Do đó $(S - P)^{2016} = 0$

Câu 2.

a) Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư là r là hợp số. Tìm hợp số r.

Vì p chia cho 42 có số dư là r nên: $p = 42k + r$ ($0 < r < 42$, k, r tự nhiên)

Hay $p = 2 \cdot 3 \cdot 7k + r$.

Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2; 3; 7

$\Rightarrow$ r là hợp số không chia hết cho 2; 3; 7 và $r < 42$

Học sinh chỉ ra được $r = 25$

Vậy hợp số $r = 25$

b) Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}^2 = (a + b)^3$

Ta có: $(a + b)^3 = \overline{ab}^2$ là số chính phương nên $a + b$ là số chính phương.

Đặt $a + b = x^2$ ($x \in \mathbb{N}^*$)

Suy ra: $\overline{ab}^2 = (a + b)^3 = x^6$

$\Rightarrow x^3 = \overline{ab} < 100$ và $\overline{ab} > 8 \Rightarrow 8 < x^3 < 100 \Rightarrow 2 < x < 5 \Rightarrow x = 3; 4$ vì $x \in \mathbb{N}^*$

- Nếu $x = 3 \Rightarrow \overline{ab}^2 = (a + b)^3 = 3^6 = 729 = 27^2 = (2 + 7)^3 \Rightarrow x = 3$ (nhận)

- Nếu $x = 4 \Rightarrow \overline{ab}^2 = (a + b)^3 = 4^6 = 4096 = 64^2 \neq (6 + 4)^3 = 1000$

$\Rightarrow x = 4$ (không thỏa mãn)

Vậy số cần tìm là: $\overline{ab} = 27$

Câu 3.

a) Cho $x; y; z \neq 0$ và $x-y-z=0$. Tính giá trị biểu thức $B = \left(1 - \frac{z}{x}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right)$

$$\text{Ta có: } B = \left(1 - \frac{z}{x}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) = \frac{x-z}{x} \cdot \frac{y-x}{y} \cdot \frac{z+y}{z}$$

$$\text{Từ: } x - y - z = 0 \Rightarrow x - z = y; y - x = -z \text{ và } y + z = x$$

$$\text{Suy ra: } B = \frac{y}{x} \cdot \frac{-z}{y} \cdot \frac{x}{z} = -1 (x; y; z \neq 0)$$

b) Cho $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

$$\text{Ta có: } \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{4(3x-2y) + 3(2z-4x) + 2(4y-3z)}{16+9+4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \quad (1) \text{ và } \frac{3(2z-4x)}{9} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

c) Cho biểu thức $M = \frac{5-x}{x-2}$. Tìm x nguyên để M nhỏ nhất

$$\text{Ta có: } M = \frac{5-x}{x-2} = \frac{3-(x-2)}{x-2} = \frac{3}{x-2} - 1 (x \neq 2)$$

$$M \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x-2 \text{ lớn nhất và } x-2 < 0$$

$$\Leftrightarrow x \text{ lớn nhất và } x < 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (vì } x \text{ nguyên)}$$

$$\text{Khi đó GTNN của } M \text{ là: } M = \frac{3}{1-2} - 1 = -4 \text{ khi } x = 1$$

Câu 4.

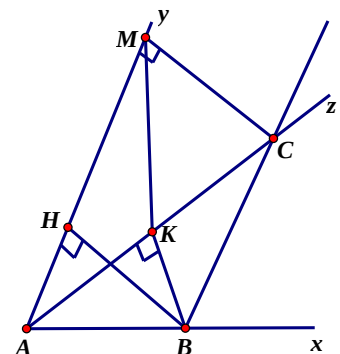
a) Chứng minh: $KC = KA$

Ta có $yAz = zAx = 30^\circ$ (Az là tia phân giác của xAy)

Mà: $yAz = ACB$ ($Ay \parallel BC$, so le trong)

$$\Rightarrow zAx = ACB \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } B$$

Trong tam giác cân ABC có BK là đường cao ứng với cạnh đáy



$\Rightarrow BK$ cũng là đường trung tuyến của $\triangle ABC \Rightarrow KC = KA$

b) Chứng minh: $BH = \frac{AC}{2}$

Ta có: $\angle ABH = 90^\circ - \angle A = 30^\circ$ ($\triangle ABH$ vuông tại H).

Xét hai tam giác vuông $\triangle ABH$ và $\triangle BAK$, có:

AB : Cạnh chung; $\angle ABH = \angle BAK (= 30^\circ)$

$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle BAK \Rightarrow BH = AK$

Mà: $AK = \frac{AC}{2}$ (cmt) $\Rightarrow BH = \frac{AC}{2}$

c) Chứng minh: $\triangle KMC$ đều

Ta có: $\triangle AMC$ vuông tại M có MK là trung tuyến ứng với cạnh huyền

$\Rightarrow KM = AC/2$ (1)

Mà: $AK = KC = AC/2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KM = KC \Rightarrow \triangle KMC$ cân tại K (3)

Mặt khác: $\triangle AMC$ có $\angle AMC = 90^\circ$; $\angle MAC = 30^\circ \Rightarrow \angle MCK = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \triangle KMC$ đều

Câu 5.

Chứng minh rằng đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC

Ta có: $B = 2.C \Rightarrow B > C$ nên $AC > AB \Rightarrow HC > HB$

Trên đoạn thẳng HC lấy điểm I sao cho $HI = HB \Rightarrow \triangle AHI = \triangle AHB$

$\Rightarrow AI = AB$ và $\angle AIB = \angle ABC = 2.\angle ACB$

Mặt khác: $\angle AIB = \angle ACB + \angle IAC \Rightarrow \angle IAC = \angle ACB$

Do đó: $IA = IC < HC$ hay $AB < HC = AD$

Gọi K là giao điểm của DH với AC.

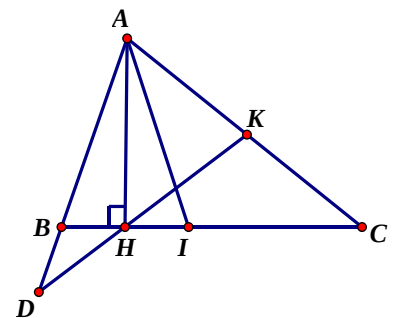
Vì $AD = HC$, $AB = IC$ nên $BD = HI = HB \Rightarrow \triangle DBH$ cân tại B

Do đó: $\angle BDH = \angle BHD = \frac{1}{2} \angle ABC = \angle ACB$

Suy ra: $\angle KHC = \angle ACB (= \angle BHD) \Rightarrow \angle KAH = \angle KHA$ (phụ hai góc bằng nhau)

Suy ra: $KA = KH = KC$ hay K là trung điểm của AC

Vậy đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC



Đề số 41

Câu 1.

$$a. A = \frac{2^{12} \cdot 78}{2^{10} \cdot 104} + \frac{3^{10} \cdot 16}{3^9 \cdot 16} = 3 + 3 = 6$$

$$b. A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015} \text{ suy ra: } 3A = 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2016}$$

$$\text{Do đó: } 2A = 3A - A = (3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2016}) - (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015}) = 3^{2016} - 3$$

$$2A + 3 = 3^n \text{ nên } 3^{2016} = 3^n \Rightarrow n = 2016$$

$$\text{Do đó } n = 2016$$

Câu 2.

a. Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{y+x-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

$$= \frac{y+z+1+x+z+2+y+x-3}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

(Vì $x+y+z \neq 0$). Do đó $x+y+z = 0,5$. Thay kết quả này vào đề bài ta có:

$$\frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2 \text{ tức là } \frac{1,5-x}{x} = \frac{2,5-y}{y} = \frac{-2,5-z}{z} = 2$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = \frac{-5}{6}$$

$$b. \frac{x+4}{2012} + \frac{x+3}{2013} = \frac{x+2}{2014} + \frac{x+1}{2015}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{2012} + 1 + \frac{x+3}{2013} + 1 = \frac{x+2}{2014} + 1 + \frac{x+1}{2015} + 1$$

$$\Leftrightarrow (x+2016) \left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2016 = 0 \text{ (Vì } \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = -2016$$

Vậy giá trị x cần tìm là : $x = -2016$

c. Ta có : $x^2+2014x = x(x+2014)$

x	-	-2014	-	0	+
$x+2014$	-	0	+		+
$x(x+2014)$	+		-		+

Vậy $x^2+2014x > 0$ khi $x < -2014$ hoặc $x > 0$

Câu 3.

$$a. A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$$

Để A là số nguyên thì $\sqrt{x}-3$ là ước của 4, tức là $\sqrt{x}-3 = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Vậy giá trị x cần tìm là : 1 ; 4 ; 16 ; 25 ; 49

$$b. B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3} = \frac{(x^2 + 3) + 12}{x^2 + 3} = 1 + \frac{12}{x^2 + 3}$$

Ta có: $x^2 \geq 0$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 3 \geq 3 \quad (2 \text{ vế dương})$$

$$\Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq 4 \Rightarrow 1 + \frac{12}{x^2 + 3} \leq 1 + 4$$

$$\Rightarrow B \leq 5$$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$

Vậy $\text{Max } B = 5 \Leftrightarrow x = 0$.

c. Từ : $x - 2xy + y = 0$

$$\text{Hay } (1 - 2y)(2x - 1) = -1$$

Vì x, y là các số nguyên nên $(1 - 2y)$ và $(2x - 1)$ là các số nguyên do đó ta có các trường hợp sau :

$$\begin{cases} 1 - 2y = 1 \\ 2x - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Hoặc } \begin{cases} 1 - 2y = -1 \\ 2x - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy có 2 cặp số x, y như trên thỏa mãn điều kiện đầu bài

Câu 4.

a. Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có : $AM = EM$ (gt)

$\angle AMC = \angle EMB$ (đối đỉnh)

$BM = MC$ (gt)

Nên : $\triangle AMC = \triangle EMB$ (c.g.c) $\Rightarrow AC = EB$

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$

(2 góc có vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC và EB cắt đường thẳng AE)

Suy ra $AC \parallel BE$.

b. Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có : $AM = EM$ (gt)

$\angle MAI = \angle MEK$ (vì $\triangle AMC = \triangle EMB$)

$AI = EK$ (gt)

Nên $\triangle AMI = \triangle EMK$ (c.g.c)

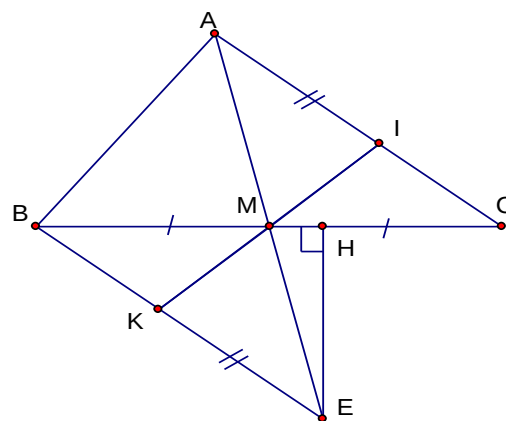
Suy ra $\angle AMI = \angle EMK$

Mà $\angle AMI + \angle IME = 180^\circ$ (tính chất hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \angle EMK + \angle IME = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Ba điểm I, M, K thẳng hàng

c. Trong tam giác vuông BHE ($\angle H = 90^\circ$) có $\angle HBE = 50^\circ$



$$\Rightarrow HEB = 90^\circ - HBE = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow HEM = HEB - MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

BME là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$

$$\text{Nên } BME = HEM + MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$$

(định lý góc ngoài của tam giác)

Câu 5.

Áp dụng định lý Pitago vào tam giác vuông NIA và NIC ta có:

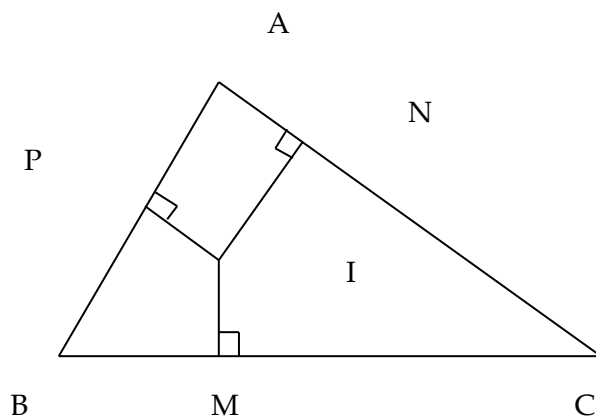
$$AN^2 = IA^2 - IN^2; CN^2 = IC^2 - IN^2$$

$$\Rightarrow CN^2 - AN^2 = IC^2 - IA^2 \quad (1)$$

Tương tự ta cũng có: $AP^2 - BP^2 = IA^2 - IB^2 \quad (2)$

$$MB^2 - CM^2 = IB^2 - IC^2 \quad (3)$$

Từ (1); (2) và (3) ta có: $AN^2 + BP^2 + CM^2 = AP^2 + BM^2 + CN^2$



Đề số 42

Câu 1.

$$\text{a) Ta có: } A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{2^2 \cdot 3^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{125 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 14^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3}$$

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^5} \cdot \frac{3-1}{3+1} - \frac{5^{10} \cdot 7^3}{5^9 \cdot 7^3} \cdot \frac{1-7}{1+2^3}$$

$$A = \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{5 \cdot (-6)}{9}$$

$$A = \frac{1}{6} - \frac{-10}{3} = \frac{7}{2}$$

$$\text{b) Ta có: } 4B = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (5-1) + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (6-2) + \dots + 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot (20-16)$$

$$4B = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 - 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19$$

$$4B = 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20$$

$$B = 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 5 = 29070$$

c) Gọi số có 3 chữ số cần tìm là $\overline{abc}$ (a, b, c là STN có 1 chữ số, $a \neq 0$)

$$\text{Theo bài ra ta có: } \overline{(a+n)(b-n)(c-n)} = \overline{n \cdot abc}$$

$$\Rightarrow 100(a+n) + 10(b-n) + (c-n) = n(100a + 10b + c)$$

$$\Rightarrow 100a + 100n + 10b - 10n + c - n = 100an + 10bn + cn$$

$$\Rightarrow 100(n-1)a + 10(n-1)b + (n-1)c = 89n$$

$$\Rightarrow 89n : n-1 \text{ mà } (89; n-1) = 1 \text{ nên } n : n-1$$

Tìm được $n = 2$

Số có 3 chữ số cần tìm là 178

Câu 2.

a) Ta có: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3}; \frac{y}{6} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k$

$$\Rightarrow x = 8k, y = 6k, z = 5k$$

$$xyz = 30 \Rightarrow 8k.6k.5k = 30 \Rightarrow 240k^3 = 30 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 4, y = 3, z = \frac{5}{2}$$

b) Ta có: $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = \left|-1,6 + \frac{3}{5}\right| \Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = \left|-\frac{8}{5} + \frac{3}{5}\right|$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ hoặc } x = \frac{1}{4}$$

Câu 3.

1. a) Vì $f(2) - f(-1) = 7 \Rightarrow (m - 2).2 - (m - 1).(-1) = 7$

$$\Rightarrow 2m - 4 + m - 1 = 7$$

$$\Rightarrow 3m - 5 = 7 \Rightarrow m = 4$$

b) Với $m = 5$ ta có hàm số $y = f(x) = 4x$

Vì $f(3 - 2x) = 20 \Rightarrow 4(3 - 2x) = 20$

$$\Rightarrow 12 - 8x = 20 \Rightarrow x = -1$$

2) Giả sử cả 3 đơn thức A, B, C cùng có giá trị âm

$$\Rightarrow A.B.C \text{ có giá trị âm} \quad (1)$$

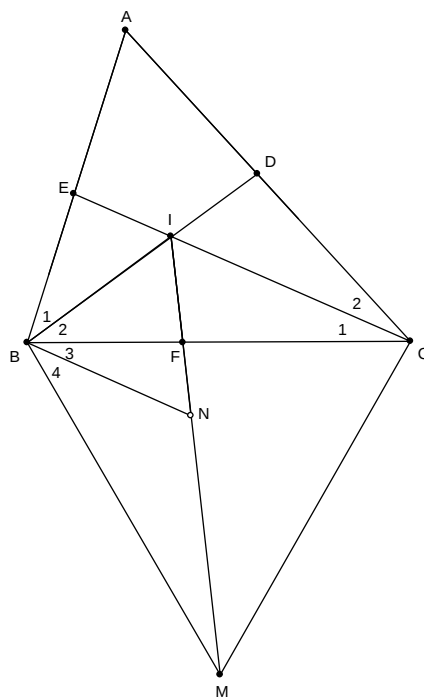
Mặt khác: $A.B.C = \left(-\frac{1}{2}x^2yz^2\right).\left(-\frac{3}{4}xy^2z^2\right).x^3y = \frac{3}{8}x^6y^4z^4$

$$\text{Vì } \frac{3}{8}x^6y^4z^4 \geq 0 \quad \forall x, y \Rightarrow A.B.C \geq 0 \quad \forall x, y \quad (2)$$

Ta thấy (1) mâu thuẫn với (2) $\Rightarrow$ điều giả sử sai.

Vậy ba đơn thức $A = -\frac{1}{2}x^2yz^2$, $B = -\frac{3}{4}xy^2z^2$, $C = x^3y$ không thể cùng có giá trị âm.

Câu 4. Vẽ hình đúng, ghi đúng giả thiết, kết luận



a) BD là phân giác của góc ABC nên $B_1 = B_2 = \frac{1}{2} \angle ABC$

CE là phân giác của góc ACB nên $C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \angle ACB$

Mà tam giác ABC có $A + B + C = 180^\circ$ suy ra $60^\circ + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle ABC + \angle ACB = 120^\circ \Rightarrow B_2 + C_1 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BIC = 120^\circ$$

b) $\triangle BIE = \triangle BIF$ (cgc) $\Rightarrow BIE = BIF$

$$\angle BIC = 120^\circ \Rightarrow BIE = 60^\circ \Rightarrow BIE = BIF = 60^\circ$$

$$\text{Mà } BIE + BIF + CIF = 180^\circ \Rightarrow CIF = 60^\circ$$

$$\angle CID = \angle BIE = 60^\circ \text{ (đ.đ)} \Rightarrow \angle CIF = \angle CID = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CID = \triangle CIF \text{ (g-c-g)}$$

c) Trên đoạn IM lấy điểm N sao cho $IB = IN \Rightarrow NM = IC$

$$\Rightarrow \triangle BIN \text{ đều} \Rightarrow BN = BI \text{ và } \angle BNM = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BNM = \triangle BIC \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow BM = BC \text{ và } B_2 = B_4 \Rightarrow \triangle BCM \text{ đều}$$

Câu 5.

$$\text{Đặt } S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n$$

$$S = 2S - S = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n)$$

$$S = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n)$$

$$\text{Đặt } T = 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n. \text{ Tính được } T = 2T - T = 2^{n-1} - 2^3$$

$$\Rightarrow S = n.2^{n+1} - 2^3 - 2^{n-1} + 2^3 = (n-1).2^{n+1}$$

$$\Rightarrow (n-1).2^{n+1} = 2^{n+11} \Rightarrow n-1 = 2^{10} \Rightarrow n = 2^{10} + 1 = 1025$$

Bài 1.

a) Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ suy ra $c^2 = ab$, khi đó $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$

b) Theo câu a) ta có: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} = \frac{b}{a}$

từ $\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} - 1 = \frac{b}{a} - 1$

hay $\frac{b^2 + c^2 - a^2 - c^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$. Vậy $\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$

Bài 2.

Ta có với mọi k là số nguyên dương thì:

$$\frac{1}{1+2+\dots+k} = \frac{2}{k(k+1)} = 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Thay lần lượt $k=1, 2, \dots, n$ ta được tổng

$$S_n = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{2}{n+1}$$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $S_n < 2$

Bài 3.

Cùng một đoạn đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch

Gọi x, y, z là thời gian chuyển động lần lượt với các vận tốc 5m/s ; 4m/s ; 3m/s

Ta có: $5x = 4y = 3z$ và $x + x + y + z = 59$

$$\text{hay: } \frac{x}{\frac{1}{5}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} = \frac{x+x+y+z}{\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{59}{\frac{60}{60}} = 60$$

$$\text{Do đó: } x = 60 \cdot \frac{1}{5} = 12; \quad y = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15; \quad z = 60 \cdot \frac{1}{3} = 20$$

Vậy cạnh hình vuông là: $5 \cdot 12 = 60$ (m)

Bài 4.

a) Chứng minh $\triangle ADB = \triangle ADC$ (c.c.c)

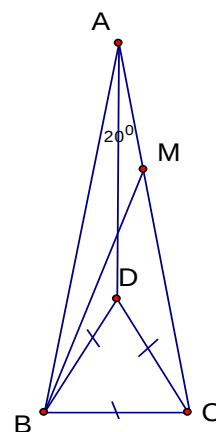
suy ra $\angle DAB = \angle DAC$

Do đó $\angle DAB = 20^\circ : 2 = 10^\circ$

b) $\triangle ABC$ cân tại A, mà $\angle A = 20^\circ$ (gt) nên $\angle ABC = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$

$\triangle DBC$ đều nên $\angle DBC = 60^\circ$

Tia BD nằm giữa hai tia BA và BC suy ra $\angle ABD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$.



Tia BM là phân giác của góc ABD nên $\angle ABM = 10^\circ$

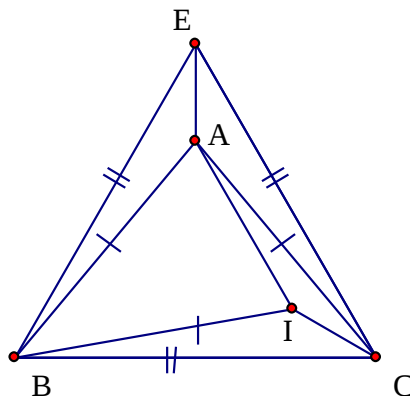
Xét tam giác ABM và BAD có:

AB cạnh chung ; $\angle BAM = \angle ABD = 20^\circ$; $\angle ABM = \angle DAB = 10^\circ$

Vậy: $\triangle ABM = \triangle BAD$ (g.c.g)

suy ra $AM = BD$, mà $BD = BC$ (gt) nên $AM = BC$

Bài 5.



Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BC, chứa điểm A dựng tam giác đều BCE.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A, $\angle A = 80^\circ$ nên $\angle ABC = \angle ACB = 50^\circ \Rightarrow \angle ABE = \angle ACE = 10^\circ$ và điểm A thuộc miền trong $\triangle BCE$.

Dễ dàng chứng minh được

$\triangle ABE = \triangle ICB$ (g. c. g)

$\Rightarrow BA = BI \Rightarrow \triangle ABI$ cân tại B, ta có

$$\angle ABI = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ \Rightarrow \angle AIB = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

Đề số 44

Câu 1.

a, $\frac{64}{(-2)^x} = 4^4 : 4^3$

$$\Rightarrow (-2)^x = 16$$

$$(-2)^x = (-2)^4$$

$$x = 4$$

b, $\left(\frac{6}{x^2+2} - 1\right) + \left(\frac{12}{x^2+8} - 1\right) + \left(\frac{7}{x^2+3} - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{6-x^2-2}{x^2+2} + \frac{12-x^2-8}{x^2+8} + \frac{7-x^2-3}{x^2+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x^2+2} + \frac{4-x^2}{x^2+8} + \frac{4-x^2}{x^2+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-x^2)\left(\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+8} + \frac{1}{x^2+3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4-x^2 = 0 \quad (\text{vì } x^2+2; x^2+8; x^2+3 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

c, Lập bảng xét dấu:

x	2	3
x-2	- 0 +	+
3-x	+	+ 0 -

* Xét khoảng $x < 2$, ta có:

$$-x + 2 + 3 - x = 11$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3 \in \text{khoảng đang xét}$$

* Xét khoảng $2 \leq x \leq 3$, ta có:

$$x - 2 + 3 - x = 11$$

$$1 = 11 \text{ (loại)}$$

* Xét khoảng $x > 3$, ta có:

$$x - 2 - 3 + x = 11$$

$$2x = 16$$

$$x = 8 \in \text{khoảng đang xét}$$

$$\text{Vậy } x \in \{-3; 8\}$$

Câu 2.

1) **a,** Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{4a}{4c} = \frac{3b}{3d} = \frac{4a-3b}{4c-3d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4a-3b}{a} = \frac{4c-3d}{c}$$

b, Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{(a-b)^2}{(c-d)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{3a^2}{3c^2} = \frac{2b^2}{2d^2} = \frac{3a^2+2b^2}{3c^2+2d^2}$$

2) $(2x+1)(2y+1) = 167$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \{(0; 83); (-1; -84); (83; 0); (-84; -1)\}$$

Câu 3.

a) Gọi quãng đường đi được của 2 người khởi hành từ A và từ B lần lượt là S_A, S_B . Ta có 2 trường hợp sau :

TH1: Địa điểm C nằm giữa 2 địa điểm A và B, có

$$\frac{S_A}{20} = \frac{S_B}{24} = \frac{S_A + S_B}{20 + 24} = \frac{11}{44} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_A = 5(km) \quad S_B = 6(km)$$

TH2: Địa điểm C không nằm giữa 2 địa điểm A và B, có

$$\frac{S_B}{24} = \frac{S_A}{20} = \frac{S_B - S_A}{24 - 20} = \frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow S_B = 66(km)$$

$$S_A = 55(km)$$

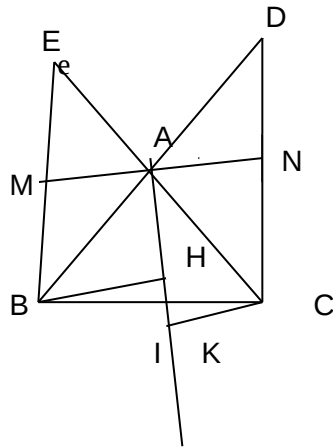
b) Ta có:

$$f_{(-2)} \cdot f_{(3)} = (4a - 2b + c) \cdot (9a + 3b + c)$$

$$\Leftrightarrow 4a - 2b + c = -(9a + 3b + c)$$

$$\text{Vậy } f_{(-2)} \cdot f_{(3)} = -(4a - 2b + c) \cdot (4a - 2b + c) = -(4a - 2b + c)^2 \leq 0$$

Câu 4.



a) _ Chứng minh $\triangle ABE = \triangle ADC(c.g.c) \Rightarrow BE = DC$

b) _ Chứng minh $\triangle AEM = \triangle ACN(c.g.c)$

$$\Rightarrow \angle EAM = \angle CAN$$

_ Chứng minh $\angle CAN + \angle MAC = 180^\circ$

$\Rightarrow M, A, N$ thẳng hàng

c) Gọi I là giao điểm của BC và Ax

$$BH \leq BI$$

_ Chứng minh

$$CK \leq CI$$

$$\Rightarrow BH + CK \leq BI + CI = BC$$

d) $BH + CK$ có GTLN = BC

Khi đó K; H trùng với I do đó Ax vuông góc với BC

Câu 5.

$$A = \frac{3}{4} + \frac{23}{4 \cdot (4|x| - 5)}$$

$$A \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \frac{23}{4 \cdot (4|x| - 5)} \text{ lớn nhất}$$

$$+ \text{ Xét } |x| \leq 1 \Rightarrow \frac{23}{4.(4|x|-5)} < 0$$

$$+ \text{ Xét } |x| \geq 2 \Rightarrow \frac{23}{4.(4|x|-5)} > 0$$

A lớn nhất $4|x| - 5$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x \in \{\pm 2\}$.

Vậy $\text{Max } A = \frac{8}{3}$ tại $x = \pm 2$

Đề số 45

Câu 1.

$$1. \text{ Ta có: } A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512} = \frac{\left(\frac{2}{5} \cdot 5\right)^7 + \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^7 \cdot 2^2} = \frac{2^7 + 12^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^7 \cdot 2^2} = \frac{2^6(2 + 3^3)}{2^7(5^2 + 2^2)} = \frac{1}{2}.$$

$$2. \text{ Ta có: } 2x^3 - 1 = 15 \Leftrightarrow 2x^3 = 16 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x^3 = 2^3 \Rightarrow x = 2.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{18}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$$

$$\text{Do đó, ta có: } \frac{18}{9} = \frac{y-25}{16} \Leftrightarrow y-25 = 32 \Leftrightarrow y = 57.$$

$$\frac{18}{9} = \frac{z+9}{25} \Leftrightarrow z+9 = 50 \Leftrightarrow z = 41.$$

$$\text{Vậy } B = x + y + z = 2 + 57 + 41 = 100.$$

Câu 2.

1. Trừ từng vế hai đẳng thức đã cho ta được:

$$x(x-y) - y(x-y) = \frac{3}{10} - \left(-\frac{3}{50}\right) \Leftrightarrow (x-y)(x-y) = \frac{9}{25} \Leftrightarrow (x-y)^2 = \left(\pm \frac{3}{5}\right)^2$$

$$\text{Suy ra: } x-y = \pm \frac{3}{5}.$$

$$\text{Thay } x-y = \frac{3}{5} \text{ vào hai đẳng thức đã cho ta được } x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{10}.$$

$$\text{Thay } x-y = -\frac{3}{5} \text{ vào hai đẳng thức đã cho ta được } x = -\frac{1}{2}; y = \frac{1}{10}.$$

$$2. \text{ Từ } (x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0 \text{ suy ra } x-3 \text{ và } x+\frac{1}{2} \text{ cùng dấu.}$$

Để thấy $x-3 < x+\frac{1}{2}$ nên ta có:

- $x-3$ và $x+\frac{1}{2}$ cùng dương $\Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.
- $x-3$ và $x+\frac{1}{2}$ cùng âm $\Leftrightarrow x+\frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$.

Vậy $x > 3$ hoặc $x < -\frac{1}{2}$.

Câu 3.

1. Ta có: $\frac{7n-8}{2n-3} = \frac{2(7n-8)}{2(2n-3)} = \frac{7(2n-3)+5}{2(2n-3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2n-3)}$.

Phân số đã cho có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{5}{2(2n-3)}$ lớn nhất.

Từ đó suy ra: $n = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của phân số đã cho bằng 6 khi $n = 2$.

2. Vì $p(x) \vdots 5$ với mọi x nguyên nên $p(0) = d \vdots 5$.

$$p(1) = a + b + c + d \vdots 5 \quad (1)$$

$$p(-1) = -a + b - c + d \vdots 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2(b+d) \vdots 5$ và $2(a+c) \vdots 5$.

Vì $2(b+d) \vdots 5$, mà $(2, 5) = 1$ nên $b+d \vdots 5$ suy ra $b \vdots 5$.

$$p(2) = 8a + 4b + 2c + d \vdots 5 \text{ mà } d \vdots 5; b \vdots 5 \text{ nên } 8a + 2c \vdots 5.$$

Kết hợp với $2(a+c) \vdots 5 \Rightarrow 6a \vdots 5 \Rightarrow a \vdots 5$ vì $(6, 5) = 1$. Từ đó suy ra $c \vdots 5$.

Vậy a, b, c, d đều chia hết cho 5.

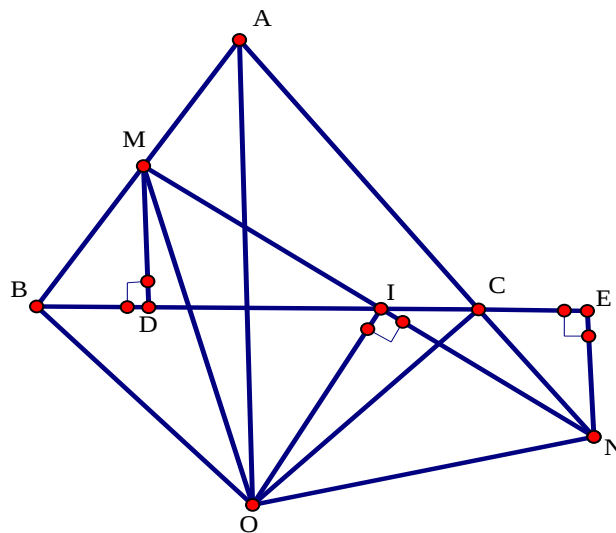
3. Vì $a < b+c$ nên $\frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{b+c+a}$. (1)

Tương tự, ta có: $\frac{b}{c+a} < 1 \Rightarrow \frac{b}{c+a} < \frac{b+b}{c+a+b}$. (2)

$$\frac{c}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{c}{a+b} < \frac{c+c}{a+b+c}. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2$.

Câu 4.



1. Tam giác ABC cân tại A nên $ABC = ACB$; $NCE = ACB$; (đối đỉnh)

Do đó: $\triangle MDB = \triangle NEC (g.c.g) \Rightarrow DM = EN$.

2. Ta có $\triangle MDI = \triangle NEI (g.c.g) \Rightarrow MI = NI$

Vì $BD = CE$ nên $BC = DE$.

Lại có $DI < MI$, $IE < IN$ nên $DE = DI + IE < MI + IN = MN$

Suy ra $BC < MN$.

3) Ta chứng minh được:

$$\Delta ABO = \Delta ACO(c.g.c) \Rightarrow OC = OB, ABO = ACO.$$

$$\Delta MIO = \Delta NIO(c.g.c) \Rightarrow OM = ON.$$

Ta lại có: $BM = CN$. Do đó $\Delta BMO = \Delta CNO(c.c.c)$

$\Rightarrow MBO = NCO$, Mà: $MBO = ACO$ suy ra $NCO = ACO$, mà đây là hai góc kề bù nên $CO \perp AN$.

Vì tam giác ABC cho trước, O là giao của phân giác góc A và đường vuông góc với AC tại C nên O cố định.

Câu 5.

Ta có đẳng thức: $a^{102} + b^{102} = (a^{101} + b^{101})(a + b) - ab(a^{100} + b^{100})$ với mọi a, b .

Kết hợp với: $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$

Suy ra: $1 = (a + b) - ab \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow 1 + b^{100} = 1 + b^{101} = 1 + b^{102} \Rightarrow b = 1 \\ b = 1 \Rightarrow 1 + a^{100} = 1 + a^{101} = 1 + a^{102} \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Do đó $P = a^{2014} + b^{2015} = 1^{2014} + 1^{2015} = 2$.

Đề số 46

Câu 1.

a) Ta có:

$$3^{x-1}(1+5) = 162 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 27 \\ \Rightarrow x-1 = 3 \Rightarrow x = 4$$

b) Ta có:

$$3x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(3 + x) = 0 \\ x = 0 \text{ hoặc } x = -3$$

c) Ta có:

$(x-1)(x-3) < 0$ vì $x-1 > x-3$ nên

$$(x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

Câu 2.

a) Ta có:

$$\text{Từ } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \text{ ta có: } \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25} = \frac{2x^2}{18} = \frac{2y^2}{32} = \frac{3z^2}{75} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 3z^2}{-25} = \frac{-100}{-25} = 4$$

$$\begin{cases} x^2 = 36 \\ y^2 = 64 \\ z^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ z = 10 \\ x = -6 \\ y = -8 \\ z = -10 \end{cases} \text{ (Vì } x, y, z \text{ cùng dấu)}$$

b) Ta có:

$$\text{Ta có } \frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2d} = \frac{d}{2a} = \frac{a+b+c+d}{2b+2c+2d+2a} = \frac{1}{2}$$

(do $a, b, c, d > 0 \Rightarrow a + b + c + d > 0$)

suy ra $a = b = c = d$

Thay vào tính được $P = 2$

Câu 3.

a) Ta có:

$$\text{Ta có } x + y + xy = 2 \Leftrightarrow x + 1 + y(x + 1) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y+1) = 3$$

Do x, y nguyên nên $x + 1$ và $y + 1$ phải là ước của 3. Lập bảng ta có:

$x+1$	1	3	-1	-3
$y+1$	3	1	-3	-1
x	0	2	-2	-4
y	2	0	-4	-2

Vậy các cặp (x, y) là: $(0, 2); (2, 0); (-2, -4); (-4, -2)$

b) Ta có:

$$Q = \frac{27 - 2x}{12 - x} = 2 + \frac{3}{12 - x}$$

A lớn nhất khi $\frac{3}{12 - x}$ lớn nhất

* Xét $x > 12$ thì $\frac{3}{12 - x} < 0$

* Xét $x < 12$ thì $\frac{3}{12 - x} > 0$. Vì phân số có tử và mẫu là các số dương, tử không đổi nên phân số có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất.

$$\text{Vậy để } \frac{3}{12 - x} \text{ lớn nhất thì } \begin{cases} 12 - x > 0 \\ x \in \mathbb{Z} \\ 12 - x \text{ nhỏ nhất} \end{cases} \Leftrightarrow x = 11$$

A có giá trị lớn nhất là 5 khi $x = 11$

Câu 4.

a) Ta có:

$$1 \text{ là nghiệm của } f(x) \Rightarrow f(1) = 0 \text{ hay } a + b + c = 0 \quad (1)$$

$$-1 \text{ là nghiệm của } f(x) \Rightarrow f(-1) = 0 \text{ hay } a - b + c = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 2a + 2c = 0 \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow a = -c$$

Vậy a và c là hai số đối nhau.

$$b) \text{ Ta có: } (|x - 3| + 2) \geq 2 \quad \forall x \Rightarrow (|x - 3| + 2)^2 \geq 4. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 3$$

$|y+3| \geq 0, \forall y$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = -3$

Vậy $P = (|x-3|+2)^2 + |y+3| + 2007 \geq 4 + 2007 = 2011$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$ và $y = -3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 2011 \Leftrightarrow x = 3$ và $y = -3$

Câu 5.

a) - Chứng minh $\triangle IBM = \triangle KCM \Rightarrow IM = MK$

- Chứng minh $\triangle IMC = \triangle KMB$

$\Rightarrow CI = BK$ và góc $MKB =$ góc $MIC \Rightarrow BK \parallel CI$

b) Chỉ ra được $AM = MC \Rightarrow \triangle AMC$ cân tại M

$\Rightarrow$ đường cao MN đồng thời là đường trung tuyến của $\triangle AMC$

$\Rightarrow N$ là trung điểm AC

$\triangle AKC$ vuông tại K có KN là trung tuyến $\Rightarrow KN =$

$$\frac{1}{2} AC$$

Mặt khác $MC = \frac{1}{2} BC$

Lại có $\triangle ABC$ vuông tại A $\Rightarrow BC > AC \Rightarrow \frac{1}{2} BC > \frac{1}{2} AC$ hay $MC > KN$

Vậy $MC > KN$ (ĐPCM)

c) Theo CM ý a $IM = MK$ mà $AM = MD$ (gt)

$\Rightarrow AI = KD$

Vậy để $AI = IM = MK = KD$ thì cần $AI = IM$

Mặt khác $BI \perp AM \Rightarrow$ khi đó BI vừa là trung tuyến, vừa là đường cao $\triangle ABM$

$\Rightarrow \triangle ABM$ cân tại B (1)

Mà $\triangle ABC$ vuông tại A, trung tuyến AM nên ta có $\triangle ABM$ cân tại M (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABM$ đều $\Rightarrow$ góc $ABM = 60^\circ$

Vậy vuông $\triangle ABC$ cần thêm điều kiện góc $ABM = 60^\circ$

d) Xảy ra 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu I thuộc đoạn AM $\Rightarrow H$ thuộc đoạn MC

$\Rightarrow BI$ và DH cắt tia MN.

Gọi O là giao điểm của BI và tia MN, O' là giao điểm của DH và tia MN

Dễ dàng chứng minh $\triangle AIO = \triangle MHO' \Rightarrow MO = MO' \Rightarrow O \equiv O'$

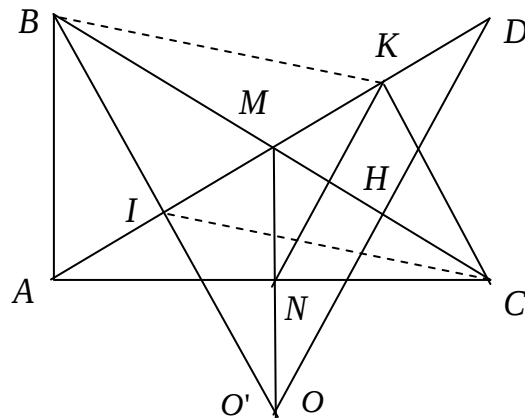
Suy ra BI, DH, MN đồng quy.

Trường hợp 2: Nếu I thuộc đoạn MD $\Rightarrow H$ thuộc đoạn MB

$\Rightarrow BI$ và BH cắt tia đối của tia MN. Chứng minh tương tự trường hợp 1

Vậy BI, DH, MN đồng quy.

(Học sinh có thể sử dụng các cách khác để CM: VD sử dụng tính chất đồng quy của 3 đường cao...)



Đề số 47

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^2 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^4 \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3+1)} - \frac{5^4 \cdot 7^3 \cdot (5^6-7)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot (1+2^3)} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 4} - \frac{5^4 \cdot 7^3 \cdot (5^6-7)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot 9} = \frac{1}{6} - \frac{5^6-7}{5^5 \cdot 9} \\ &= \frac{5^5 \cdot 3 - 2(5^6-7)}{2 \cdot 5^5 \cdot 9} = -\frac{2429}{6250} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \text{ Xét } A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$$

$$\text{Ta có: } 49A = 1 - \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{4n-4}} - \frac{1}{7^{4n-2}} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{50} \text{ (đpcm)}$$

$$\text{c)} B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 98^2 = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 98 \cdot 99) - (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98) = 318549$$

$$\text{d)} P^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

Vì $p > 3$ nên p lẻ $\Rightarrow (p-1)(p+1)$ là tích hai số chẵn nên chia hết cho 8.

Ta có $(p-1)p(p+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 3 mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3 vậy trong hai số $(p-1); (p+1)$ phải có 1 số chia hết cho 3 (**)

Vì $(8;3) = 1 \Rightarrow P^2 - 1$ chia hết cho 24

Câu 2.

a) Ta có:

$$\left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| (-3, 2) + \frac{2}{5} \right| \Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| \frac{-16}{5} + \frac{2}{5} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} = 2 \\ x - \frac{1}{3} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{b)} \text{ Cho } C = \frac{m^3 + 3m^2 + 2m + 5}{m(m+1)(m+2) + 6} = \frac{m^3 + 3m^2 + 2m + 5}{m^3 + 3m^2 + 2m} = 1 + \frac{5}{m^3 + 3m^2 + 2m} \text{ với } m \in \mathbb{N}$$

Vậy C là số hữu tỉ

c) Ta có bản xét dấu sau:

x	-2	1	3
(x - 1)	-	0	+
(x + 2)	-	0	+
(3 - x)	+	+	0
M = (x - 1)(x + 2)(3 - x)	+	0	+

Từ bảng xét dấu trên ta thấy $M < 0$ khi $-2 < x < 1$ và $x > 3$.

Câu 3.

a) Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ suy ra $c^2 = ab$

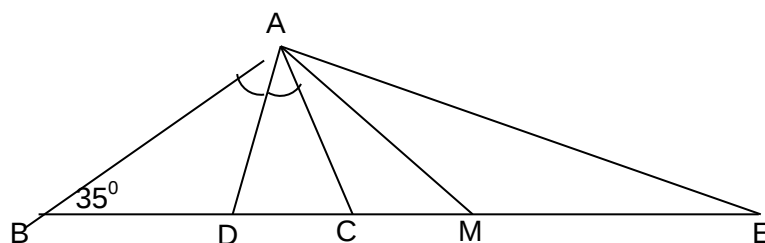
$$\text{khi đó } \frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$$

b) Ta có: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 5$

$x + y$	5	-5	1	-1
$x - y$	1	-1	5	-5
x	3	-3	3	-3
y	2	-2	-2	2

Vậy có 4 cặp (x, y) là $(3; 2)$, $(-3; -2)$, $(3; -2)$ và $(-3; 2)$

Câu 4.



a) Ta có: $BAD = CAD = \frac{75^\circ}{2} = 37^\circ 30' \Rightarrow ADM = ABD + BAD = 72^\circ 30'$

(Góc ngoài của tam giác ABD);

Tam giác DAE vuông có AM là đường trung tuyến nên $\triangle MAD$ cân tại M , do đó $AMD = 180^\circ - 2.ADM = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$ (1)

Trong tam giác ABC ta lại có: $BAC = 75^\circ, ABC = 35^\circ \Rightarrow ACB = 70^\circ$

$$\Rightarrow CAM = ACB - AMC = 35^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác ACM cân

b) Theo ý a, ta có: $ABM = AMB = 35^\circ \Rightarrow AB = AM$ (3)

Mặt khác: $AM = \frac{1}{2}DE$ (Trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông)

mà $DE < AD + AE \Rightarrow AM < \frac{AD + AE}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AB < \frac{AD + AE}{2}$ (đpcm)

c) Ta có: $AC = CM$ ($\triangle ACM$ cân), $MA = ME$ ($\triangle AME$ cân)
 $AM = AB$ ($\triangle ABM$ cân).

$$\text{Do đó: } BE = BC + CA + AB$$

Câu 5.

Gọi ba số cần tìm là a, b, c ; số đó chia hết cho 18 nên chia hết cho 9 $\Rightarrow a + b + c : 9$.

Lại có: $1 \leq a + b + c \leq 27$

Suy ra: $a + b + c$ nhận một trong các giá trị 9, 18, 27 (3)

Theo bài ra ta có: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6}$ mà $a \in N$ nên $\frac{a+b+c}{6} \in N$ (4).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow a + b + c = 18$

Vậy $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = 3$. Từ đó ta có: $a = 3, b = 6, c = 9$.

Do số cần tìm chia hết cho 18 nên tận cùng phải là số chẵn.

Vậy số cần tìm là: 396 hoặc 936

Đề số 48

I. Phần trắc nghiệm khách quan: (6 điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đ. án	A	C	C	A	B	D	B	A	C	D	B	C

II. Phần tự luận (14 điểm)

Câu 1.

a) $M = 75.(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$

$$\begin{aligned}
&= 25.(4-1)(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\
&= 25.[4(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) - (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1)] + 25 \\
&= 25.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) - 25(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\
&= 25.4^{2018} - 25 + 25 \\
&= 25.4^{2018} = 25.4.4^{2017} = 100.4^{2017} : 100
\end{aligned}$$

Vậy $M : 10^2$

b) Đặt $a.b = c^2$ (1)

Gọi $(a,c) = d$ nên $a : d, c : d$

Hay $a = m.d$ và $c = n.d$ với $(m,n) = 1$

Thay vào (1) ta được $m.d.b = n^2 . d^2$

$\Rightarrow m.b = n^2 . d \Rightarrow b : n^2$ vì $(a,b) = 1 = (b,d)$

Và $n^2 : b \Rightarrow b = n^2$

Thay vào (1) ta có $a = d^2 \Rightarrow đpcm$

Câu 2.

$$\begin{aligned}
1. \text{ Ta có } A &= 2x^2 - 6x - x^2 + 7x - 5x + 2015 \\
&= x^2 - 4x + 2015
\end{aligned}$$

A, Với $x = 4$ ta được $A = 2015$

$$B, A = 2015 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

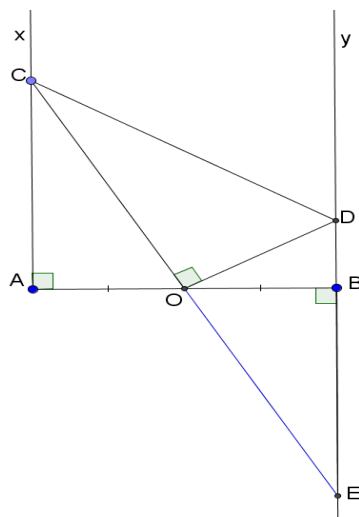
2. Gọi số cây ba lớp trồng lần lượt là a, b, c (cây, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo đề bài ta có $b : c = 1,5 : 1,2$ và $b - a = 120$

$$a = 32,5\%(a + b + c)$$

Vậy cả 3 lớp trồng được số cây là 2400 cây

Câu 3.



1. **a)** Vẽ tia CO cắt tia đối của tia By tại điểm E.

Chứng minh $\triangle AOC = \triangle BOE$ ($g - c - g$) $\Rightarrow AC = BE; CO = EO$

Chứng minh $\triangle DOC = \triangle DOE$ ($c - g - c$) $\Rightarrow CD = ED$

Mà $ED = EB + BD = AC + BD$.

Từ đó : $CD = AC + BD$ (đpcm)

b, Áp dụng định lí Pytago vào các tam giác vuông BOE và BOD ta có:

$$\begin{cases} OE^2 = OB^2 + EB^2 \\ OD^2 = OB^2 + DB^2 \end{cases} \Rightarrow OE^2 + OD^2 = 2OB^2 + EB^2 + DB^2$$

Mà $OE^2 + OD^2 = DE^2$; Nên

$$\begin{aligned} DE^2 &= 2OB^2 + EB^2 + DB^2 \\ &= 2OB^2 + EB.(DE - BD) + DB.(DE - BE) \\ &= 2OB^2 + EB.DE - EB.BD + DB.DE - DB.BE \\ &= 2OB^2 + (EB.DE + DB.DE) - 2BD.BE \\ &= 2OB^2 + DE.(EB + DB) - 2BD.BE \\ &= 2OB^2 + DE^2 - 2BD.BE \end{aligned}$$

Suy ra $2OB^2 - 2BD.BE = 0 \Rightarrow BD.BE = OB^2$

Mà $BE = AC$; $OB = \frac{AB}{2}$.

Vậy $AC.BD = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4}$ (đpcm)

2.

Qua H kẻ đường thẳng // với AB cắt AC tại D, kẻ đường thẳng // với AC cắt AB tại E

Ta có $\triangle AHD = \triangle HAE$ (g - c - g)

$$\Rightarrow AD = HE; AE = HD$$

$$\triangle AHD \text{ có } HA < HD + AD \text{ nên } HA < AE + AD \quad (1)$$

Từ đó $HE \perp BH$

$$\triangle HBE \text{ vuông nên } HB < BE \quad (2)$$

$$\text{Tương tự ta có } HC < DC \quad (3)$$

$$\text{Từ 1, 2, 3 } HA + HB + HC < AB + AC \quad (4)$$

$$\text{Tương tự } HA + HB + HC < AB + BC \quad (5)$$

$$HA + HB + HC < BC + AC \quad (6)$$

$$\text{Từ đó suy ra } HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC) \text{ đpcm}$$

Câu 4.

Ta có $|7x - 5y| \geq 0$; $|2z - 3x| \geq 0$ và $|xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

Nên $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

Mà $A = 0$ khi và chỉ khi

$$|7x - 5y| = |2z - 3x| = |xy + yz + zx - 2000| = 0$$

$$\text{Có: } |7x - 5y| = 0 \Leftrightarrow 7x = 5y \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{7}$$

$$|2z - 3x| = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{3}$$

$$|xy + yz + zx - 2000| = 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 2000$$

$$\text{Từ đó tìm được } \begin{cases} x = 20; y = 28; z = 30 \\ x = -20; y = -28; z = -30 \end{cases}$$

$$A \geq 0, \text{ mà } A = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (20; 28; 30) \text{ hoặc } (x, y, z) = (-20; -28; -30)$$

$$\text{Vậy } \min A = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (20; 28; 30) \text{ hoặc } (x, y, z) = (-20; -28; -30)$$

Đề số 49

Câu 1.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} + \frac{16^3 \cdot 3^{10} + 120 \cdot 6^9}{4^6 \cdot 3^{12} + 6^{12}} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - (2^2)^6 \cdot (3^2)^2}{(2^2)^6 \cdot 3^6 + (2^3)^4 \cdot 3^5} + \frac{(2^4)^3 \cdot 3^{10} + 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3)^9}{(2^2)^6 \cdot 3^{12} + (2 \cdot 3)^{12}} \\
 &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} + \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} + 2^{12} \cdot 3^{12}} \\
 &= \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3+1)} + \frac{2^{12} \cdot 3^{10} (1+5)}{2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 9} \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có } P(x) &= x^{2012} - 2011x^{2011} - 2011x^{2010} - \dots - 2011x^2 - 2011x + 1 \\
 &= x^{2012} - (2012-1)x^{2011} - (2012-1)x^{2010} - \dots - (2012-1)x^2 - (2012-1)x + 1 \\
 &= (x^{2012} - 2012x^{2011}) + (x^{2011} - 2012x^{2010}) + \dots + (x^2 - 2012x) + x + 1 \\
 &= x^{2011}(x - 2012) + x^{2010}(x - 2012) + \dots + x(x - 2012) + x + 1
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P(2012) = 2012 + 1 = 2013$$

Câu 2.

$$\text{a) } 2012 = |x - 2010| + |x - 2008| \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 + \text{ Nếu } x \leq 2008, \text{ từ (1)} &\Leftrightarrow 2012 = 2010 - x + 2008 - x \\
 &\Leftrightarrow x = 1003 \text{ (thỏa mãn)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \text{ Nếu } 2008 < x \leq 2010, \text{ từ (1)} &\Leftrightarrow 2012 = 2010 - x + x - 2008 \\
 &\Leftrightarrow 2012 = 2 \text{ (vô lý)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \text{ Nếu } x \geq 2010, \text{ từ (1)} &\Leftrightarrow 2012 = x - 2010 + x - 2008 \\
 &\Leftrightarrow x = 3015 \text{ (thỏa mãn)}
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị x cần tìm là : 1003 hoặc 3015

$$\text{b) } (x-3)^x - (x-3)^{x+2} = 0 \Leftrightarrow (x-3)^x [1 - (x-3)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^x = 0 \\ 1 - (x-3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 0 \\ x-3 = 1 \\ x-3 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Từ } \frac{3x-2y}{5} = \frac{2z-5x}{3} = \frac{5y-3z}{2} \Rightarrow \frac{15x-10y}{25} = \frac{6z-15x}{9} = \frac{10y-6z}{4}$$

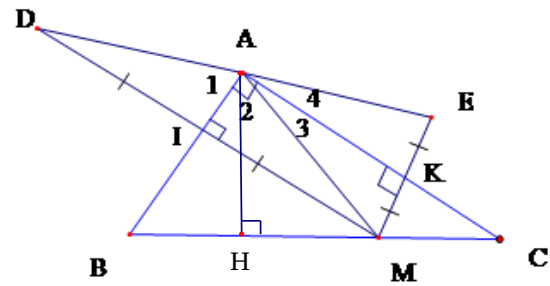
c) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{15x-10y}{25} = \frac{6z-15x}{9} = \frac{10y-6z}{4} = \frac{15x-10y+6z-15x+10y-6z}{38} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15x - 10y = 0 \\ 6z - 15x = 0 \\ 10y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 2z = 5x \\ 5y = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{5} \\ \frac{z}{5} = \frac{y}{3} \end{cases}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{50}{10} = 5$$

$$\Rightarrow x = 10, y = 15, z = 25$$



Câu 3.

$$\text{a) } \frac{2012a+b+c+d}{a} = \frac{a+2012b+c+d}{b} = \frac{a+b+2012c+d}{c} = \frac{a+b+c+2012d}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{2012a+b+c+d}{a} - 2011 = \frac{a+2012b+c+d}{b} - 2011 = \frac{a+b+2012c+d}{c} - 2011 = \frac{a+b+c+2012d}{d} - 2011$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \quad (*)$$

+ Nếu $a+b+c+d \neq 0$ Từ (*) suy ra $a=b=c=d$

$$\text{Vậy } M = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

+ Nếu $a+b+c+d = 0 \Rightarrow a+b = -(c+d); a+c = -(b+d);$
 $a+d = -(b+c)$. Vậy $M = -1 - 1 - 1 - 1 = -4$

b) Từ $(7a - 21b + 5)(a - 3b + 1) : 7 \Rightarrow (a - 3b + 1) : 7$ vì $(7a - 21b + 5)$ không chia hết cho 7 và 7 là số nguyên tố.

Từ $(a - 3b + 1) : 7 \Rightarrow (42a + 14b + 14) : 7 + (a - 3b + 1) : 7$
vì $(42a + 14b + 14) : 7$

$$\Rightarrow 43a + 11b + 15 : 7 \text{ (đpcm)}$$

Câu 4.

$$\text{Ta có: } A = |x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014|$$

$$= (|x - 2010| + |2014 - x|) + |x - 2012|$$

Áp dụng BĐT giá trị tuyệt đối: $|a| + |b| \geq |a+b|$ dấu '=' xảy ra khi $a, b \geq 0$, ta có

$$\text{Ta có } |x - 2010| + |2014 - x| \geq |x - 2010 + 2014 - x| = 4 \text{ với mọi } x \quad (1)$$

$$|x - 2012| \geq 0 \text{ với mọi } x \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A \geq 4$ với mọi x . Vậy A có giá trị nhỏ nhất = 4

$$\text{Khi (1) và (2) xảy ra dấu "=" hay: } \begin{cases} (x - 2010)(2014 - x) \geq 0 \\ x - 2012 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2012$$

Vậy $x = 2012$ thì A có giá trị nhỏ nhất là: 4

Câu 5.

a) Gọi I là giao điểm của MD và AB, K là giao điểm của ME và AC

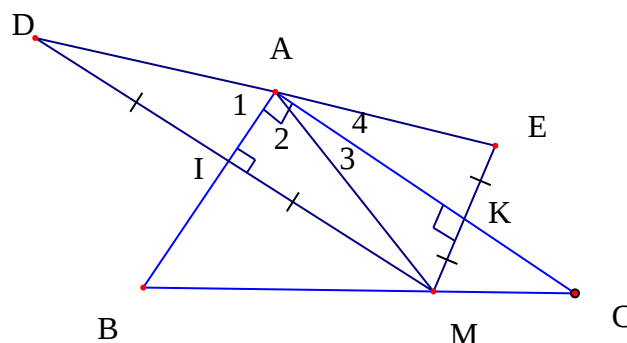
$$\Rightarrow IM = ID, MK = KE \text{ và } MIA = DIA = 90^\circ, MKA = EKA = 90^\circ$$

(Do AB là đường trung trực của MD,
AC là đường trung trực của ME)
 $\Rightarrow \triangle AIM = \triangle AID$ (c.g.c) và $\triangle AKM = \triangle AKE$ (c.g.c)

$\Rightarrow AM = AD$ và $AM = AE \Rightarrow AM = AD = AE$

b) + Nếu M trùng B (hoặc C) thì D (E) trùng B (C) và K trùng A (I trùng A)

$\Rightarrow$ 3 điểm A, D, E thẳng hàng



+ Nếu M không trùng B (hoặc C). Theo ý a ta có: $\triangle AIM = \triangle AID$ (c.g.c) và $\triangle AKM = \triangle AKE$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle_1 = \angle_2$ và $\angle_3 = \angle_4$

Mà $\angle_2 + \angle_3 = 90^\circ \Rightarrow \angle_1 + \angle_2 + \angle_3 + \angle_4 = 180^\circ$. suy ra 3 điểm A, D, E thẳng hàng

c) Theo chứng minh ý a, b ta có với M bất kỳ thì 3 điểm A, D, E thẳng hàng và $AM = AD = AE \Rightarrow DE = 2.AM$

Kẻ đường cao AH, ta có $AM \geq AH$ (Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

Suy ra $DE \geq AH$, do tam giác ABC không đổi nên AH không đổi

$\Rightarrow DE$ nhỏ nhất $= 2.AH$

Vậy DE nhỏ nhất khi M trùng với H

Đề số 50

Câu 1.

$$1) A = \left(\frac{15}{10} - \frac{4}{10} + \frac{1}{10} \right) : \left(\frac{18}{12} - \frac{8}{12} + \frac{1}{12} \right)$$

$$= \frac{12}{10} : \frac{11}{12}$$

$$= \frac{6}{5} \cdot \frac{12}{11} = \frac{72}{55}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{72}{55}.$$

$$2) P = |x - 2012| + |x - 2013|$$

+ Nếu $x = 2012$ hoặc $x = 2013$ thì $P = 1$

+ Nếu $x > 2013$ thì $P = |x - 2012| + |x - 2013| > 1 + |x - 2013| > 1$

+ Nếu $x < 2012$ thì $P = |x - 2012| + |x - 2013| > |x - 2012| + 1 > 1$

+ Do đó giá trị nhỏ nhất của P bằng 1, đạt được khi $x = 2012$ hoặc $x = 2013$.

Câu 2.

$$1) \text{ Ta có } 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800 \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^2 \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 5^x = 10800$$

$$\Leftrightarrow (2 \cdot 3 \cdot 5)^x = 900$$

$$\Leftrightarrow 30^x = 30^2 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$ là kết quả cần tìm.

2) + Gọi số viên bi của An, Bình, Cường lần lượt là a, b, c . Vì tổng số viên bi của ba bạn là 74 nên $a + b + c = 74$

+ Vì số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6 nên $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{12}$

+ Vì số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5 nên $\frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$

+ Từ đó ta có $\frac{a}{10} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{10+12+15} = \frac{74}{37} = 2$

+ Suy ra $a = 20; b = 24; c = 30$

Câu 3.

1) + Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $p = 3k \pm 1 (k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$

+Với $p = 3k + 1$

$$\text{suy ra } p^2 + 2012 = (3k+1)^2 + 2012 = 9k^2 + 6k + 2013 \Rightarrow (p^2 + 2012):3$$

+Với $p = 3k - 1$

$$\text{suy ra } p^2 + 2012 = (3k-1)^2 + 2012 = 9k^2 - 6k + 2013 \Rightarrow (p^2 + 2012):3$$

Vậy $p^2 + 2012$ là hợp số.

2) + Vì n là số có hai chữ số nên $9 < n < 100 \Rightarrow 18 < 2n < 200$

+ Mặt khác $2n$ là số chính phương chẵn nên $2n$ có thể nhận các giá trị: 36; 64; 100; 144; 196.

+ Với $2n = 36 \Rightarrow n = 18 \Rightarrow n + 4 = 22$ không là số chính phương

$2n = 64 \Rightarrow n = 32 \Rightarrow n + 4 = 36$ là số chính phương

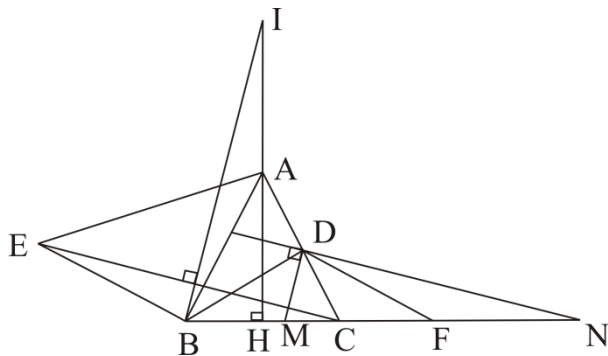
$2n = 100 \Rightarrow n = 50 \Rightarrow n + 4 = 54$ không là số chính phương

$2n=144 \Rightarrow n=72 \Rightarrow n+4=76$ không là số chính phương

$2n = 196 \Rightarrow n = 98 \Rightarrow n + 4 = 102$ không là số chính phương

+ Vậy số cần tìm là $n = 32$.

Câu 4.



1) + Xét hai tam giác AIB và BCE

Có $AI=BC$ (gt)

$$BE=BA(\text{gt})$$

+ Góc IAB là góc ngoài của tam giác ABH nên $IAB = ABH + AHB = ABH + 90^\circ$

+ Ta có $EBC = EBA + ABC = ABC + 90^\circ$. Do đó $IAB = EBC$.

+ Do đó $\triangle ABI = \triangle BEC(c - g - c)$

+ Do $\triangle ABI = \triangle BEC(c - g - c)$ nên $AIB = BCE$.

+ Trong tam giác vuông IHB vuông tại H có $AIB + IBH = 90^\circ$.

Do đó $BCE + IBH = 90^\circ$.

KL: CE vuông góc với BI .

2) + Do tính chất của đường phân giác, ta có $DM \perp DN$.

+ Gọi F là trung điểm của MN . Ta có $FM = FD = FN$.

+ Tam giác FDM cân tại F nên $FMD = MDF$.

$$FMD = MBD + BDM (\text{góc ngoài tam giác})$$

$$= MBD + CDM$$

$$\text{Suy ra } MBD = CDF \quad (1)$$

$$\text{Ta có } MCD = CDF + CFD \quad (2)$$

$$\text{Do tam giác } ABC \text{ cân tại } A \text{ nên } MCD = 2MBD \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $MBD = DFC$ hay tam giác DBF cân tại D . Do đó $BD = DF = \frac{1}{2}MN$

Câu 5.

+ Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} = S. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } (S - P)^{2013} = 0$$

Hết