

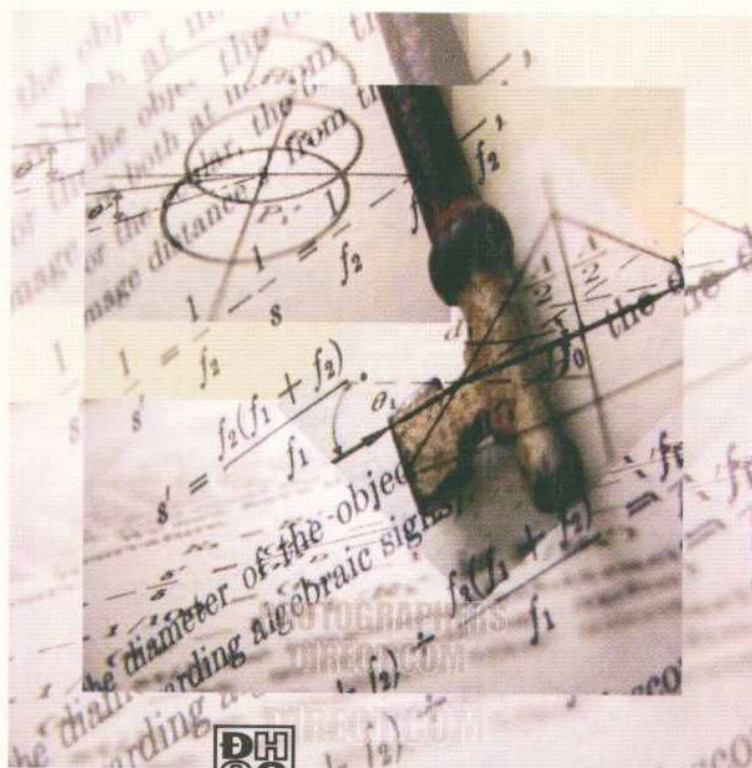
TRẦN THỊ VÂN ANH



BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN ĐẠI SỐ

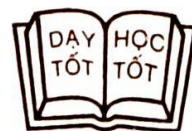
- Biên soạn theo chương trình SGK mới.
- Rèn kĩ năng giải toán từ cơ bản đến nâng cao.

9



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN THỊ VÂN ANH



Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán Đại số 9

- Biên soạn theo chương trình SGK mới.
- Rèn kĩ năng giải toán từ cơ bản đến nâng cao.



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 39714896; (04) 39724770. Fax: (04) 93714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc **PHÙNG QUỐC BẢO**
Tổng biên tập **PHẠM THỊ TRÂM**

Biên tập nội dung

THANH HOA

Sửa bài

LÊ HOÀ

Chế bản

CÔNG TI ANPHA

Trình bày bìa

SƠN KỲ

Đối tác liên kết xuất bản

CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN ĐẠI SỐ 9

Mã số: 1L-253DH2009

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại công ty TNHH in Bao bì Hưng Phú

Số xuất bản: 828-2009/CXB/09-147/DHQGHN, ngày 14/09/2009

Quyết định xuất bản số: 253LK-TN/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2009.

LỜI NÓI ĐẦU

Để đáp ứng nhu cầu học tập của học sinh, tài liệu tham khảo cho giáo viên, tác giả đã mạnh dạn viết quyển sách:

Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán Đại số 9.

Trong quyển sách này, tác giả đã phân chia thành 7 chuyên đề cơ bản sau, bao gồm:

Chương 1: Các phép biến đổi đại số

Chương 2: Phương trình bậc hai – Hệ thức Viet.

Chương 3: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số.

Chương 4: Phương trình nghiệm nguyên

Chương 5: Phương trình vô tỷ.

Chương 6: Phương trình, bất phương trình qui về bậc nhất, bậc hai.

Chương 7: Bất đẳng thức.

Trong mỗi phần, sách được cấu trúc gồm 4 nội dung chính như sau:

1. Phương pháp chung.

2. Các ví dụ minh họa.

3. Bài tập vận dụng.

4. Hướng dẫn và đáp số.

Với mỗi dạng bài tập cơ bản đều có phương pháp giải cụ thể và ví dụ minh họa. Ngoài ra, các bài tập đều có hướng dẫn giải chi tiết, dễ hiểu. Nhiều ví dụ có lời nhận xét để giúp học sinh tránh các sai lầm cơ bản. Các bài tập được lựa chọn từ dễ đến khó, có những bài tác giả đã đưa ra nhiều phương pháp khác nhau để bạn đọc tham khảo. Ngoài ra tác giả đã đưa thêm phần: *Các bài toán tổng hợp và một số đề thi học sinh giỏi của các tỉnh, thành phố trên toàn quốc*, để bạn đọc tham khảo thêm. Mặc dù đã hết sức cố gắng, song lời giải các bài toán trong quyển sách này có khi chưa phải là phương án giải hay nhất và cũng có thể còn thiếu sót. Tuy vậy, tác giả hi vọng rằng quyển sách này sẽ giúp ích cho các bạn trong quá trình học tập và giảng dạy, đặc biệt là quá trình tự học.

Rất mong nhận được sự góp ý chân thành của các em học sinh và các thầy cô giáo, tác giả xin chân thành cảm ơn.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ:

- **Trung tâm sách giáo dục Anpha**

225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.

- **Công ti sách - thiết bị giáo dục ANPHA**

50 Nguyễn Văn Sáng, Quận Tân Phú, TP.HCM

ĐT: 08.62676463, 38547464.

Email: alphabookcenter@yahoo.com

Xin trân trọng cảm ơn!

ABC

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- ◆ Đề thi học sinh giỏi lớp 9 của một số tỉnh, thành phố trên toàn quốc .
- ◆ Các đề thi vô địch Toán các nước – Nhà xuất bản Hải Phòng – 1993
- ◆ Các đề thi học sinh giỏi Toán ở Mỹ – Nhà xuất bản Giáo dục – 2003
- ◆ Các bài giảng luyện thi môn Toán – Phan Đức Chính – Nhà xuất bản Giáo dục – 1997
- ◆ Đề thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng trong toàn quốc – Nguyễn Trọng Bá – NXB Hà Nội các năm 1998, 1999, 2000, 2001.
- ◆ Toán nâng cao lớp 9 – Vũ Thế Hựu
- ◆ Toán học và Tuổi trẻ các năm 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008.
- ◆ Các đề thi học sinh giỏi lớp 9 ở địa chỉ www.thuathienhue.edu.vn.
- ◆ Tạp chí Kbahm các năm 1990 đến 1997.
- ◆ Tuyển tập 35 đề toán chọn lọc – Mai Phương – NXB Giáo dục năm 1996.
- ◆ Các dạng toán Đại số 9 – Lê Hải Châu – Nguyễn Xuân Quỳnh – NXB ĐHQG Hà Nội –1998.

Chương 1. Các phép toán về căn thức

Một số kiến thức cơ bản

1. Hằng đẳng thức đáng nhớ

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

2. Một số phép biến đổi căn thức bậc hai

$$a. \sqrt{A^2} = |A|;$$

$$b. \sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} (A \geq 0; B \geq 0);$$

$$c. \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} (A \geq 0; B > 0);$$

$$d. \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} (B \geq 0);$$

$$e. \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB} (A \geq 0; B > 0);$$

$$f. \frac{1}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A} - \sqrt{B}}{A - B};$$

$$g. \frac{1}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{A - B};$$

$$h. (\sqrt{A} - \sqrt{B})(A + \sqrt{AB} + B) = A - B;$$

$$k. (\sqrt{A} + \sqrt{B})(A - \sqrt{AB} + B) = A + B.$$

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức

Dạng 2: Rút gọn biểu thức

Dạng 3: Chứng minh đẳng thức

Dạng 4: Các bài toán tổng hợp

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức

Ví dụ 1: Tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{97} + \sqrt{99}}$$

$$B = 35 + 335 + 3335 + \dots + \underbrace{3333\dots35}_{99 \text{ số } 3}$$

Giải

$$\begin{aligned} 1. A &= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{97} + \sqrt{99}} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{9} - \sqrt{7} \dots + \sqrt{99} - \sqrt{97}) = \frac{1}{2}(\sqrt{99} - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. B &= 35 + 335 + 3335 + \dots + \underbrace{3333\dots35}_{99 \text{ số } 3} \\
&= 33 + 2 + 333 + 2 + 3333 + 2 + \dots + 333\dots33 + 2 \\
&= 2.99 + (33 + 333 + 3333 + \dots + 333\dots33) \\
&= 198 + \frac{1}{3}(99 + 999 + 9999 + \dots + 999\dots99) \\
&= 198 + \frac{1}{3}(10^2 - 1 + 10^3 - 1 + 10^4 - 1 + \dots + 10^{100} - 1) \\
B &= \left(\frac{10^{101} - 10^2}{27} \right) + 165.
\end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho $(x + \sqrt{x^2 + 2007})(y + \sqrt{y^2 + 2007}) = 2007$. Tính $S = x + y$

Giải

$$\text{Ta có: } (x + \sqrt{x^2 + 2007})(-x + \sqrt{x^2 + 2007}) = 2007 \quad (a)$$

$$(y + \sqrt{y^2 + 2007})(-y + \sqrt{y^2 + 2007}) = 2007 \quad (b)$$

Nhân theo vế của (a) và (b) ta được và ta kết hợp với giả thiết ta được:

$$2007(-x + \sqrt{x^2 + 2007})(-y + \sqrt{y^2 + 2007}) = 2007^2$$

$$\Rightarrow (-x + \sqrt{x^2 + 2007})(-y + \sqrt{y^2 + 2007}) = 2007 \text{ suy ra}$$

$$xy - x\sqrt{y^2 + 2007} - y\sqrt{x^2 + 2007} + \sqrt{(x^2 + 2007)(y^2 + 2007)} = 2007 \quad (c)$$

Giả thiết

$$xy + x\sqrt{y^2 + 2007} + y\sqrt{x^2 + 2007} + \sqrt{(x^2 + 2007)(y^2 + 2007)} = 2007 \quad (d)$$

Cộng theo vế (c) và (d) ta được:

$$xy + \sqrt{(x^2 + 2007)(y^2 + 2007)} = 2007$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 + 2007)(y^2 + 2007)} = 2007 - xy$$

$$\Rightarrow x^2 y^2 + 2007(x^2 + y^2) + 2007^2 = 2007^2 - 2.2007xy + x^2 y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = -2xy \Rightarrow (x + y)^2 = 0 \Rightarrow S^2 = 0 \Rightarrow S = 0$$

Ví dụ 3: Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{3}{4} + (x^8 - y^8)(y^9 + z^9)(z^{10} - x^{10})$

Giải

$$\text{Từ: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x + y + z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x + y}{xy} + \frac{x + y + z - z}{z(x + y + z)} = 0 \Rightarrow (x + y) \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{z(x + y + z)} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (x+y) \left(\frac{zx + zy + z^2 + xy}{xyz(x+y+z)} \right) = 0 \Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0.$$

Ta có:

$$x^8 - y^8 = (x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$$

$$y^9 + z^9 = (y+z)(y^8 - y^7z + y^6z^2 - \dots + z^8)$$

$$z^{10} - x^{10} = (z+x)(z^4 - z^3x + z^2x^2 - zx^3 + x^4)(z^5 - x^5)$$

Vậy $M = \frac{3}{4} + (x+y)(y+z)(z+x) \cdot A = \frac{3}{4}.$

Ví dụ 4: Cho $a^3 + 3ab^2 = 2006$; $b^3 + 3a^2b = 2005$. Tính $P = a^2 - b^2$

Giải

Ta có: $(a^3 + 3ab^2)^2 = a^6 + 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 2006^2$

$$(b^3 + 3a^2b)^2 = b^6 + 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 2005^2$$

$$\Rightarrow (a^3 + 3ab^2)^2 - (b^3 + 3a^2b)^2 = a^6 - 3a^4b + 3a^2b^4 - b^6 = 2006^2 - 2005^2$$

Hay $(a^2 - b^2)^3 = 4011$. Vậy $P = a^2 - b^2 = \sqrt[3]{4011}.$

Ví dụ 5: Cho a ; b ; c là các số thực khác 0 và $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1$

Tính giá trị của biểu thức: $P = (a^{2004} - b^{2004})(b^{2005} + c^{2005})(c^{2006} - a^{2006})$

Giải

Từ giả thiết suy ra: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} \right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = 0 \Rightarrow (a+b)[c(a+b+c) + ab] = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)(ac + ab + bc + c^2) = 0 \Rightarrow (a+b)(b+c)(a+c) = 0$$

$$P = (a^{2004} - b^{2004})(b^{2005} + c^{2005})(c^{2006} - a^{2006})$$

$$= (a+b)(b+c)(a+c) \cdot M = 0$$

Ví dụ 6: Cho ba số a , b , c khác 0 thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$

Hãy tính $P = \frac{ac}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2}$

Giải

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$; $x+y+z=0$ (vì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$)

$$x = -(y+z); \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = -(y+z)^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$-(y^3 + 3y^2z + 3y^2z^2 + z^3) + y^3 + z^3 - 3xyz = -3yz(y + z + x) = -3yz \cdot 0 = 0$$

$$\text{Từ } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\text{Do đó } P = \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} = abc \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) = abc \cdot \frac{3}{abc} = 3$$

$$\text{Nếu } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \text{ thì } P = \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} = 3.$$

Ví dụ 7: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \sqrt{a^2 + 4ab^2 + 4b^4} - \sqrt{a^2 - 12ab^2 + 9b^4} \text{ với } a = \sqrt{2}; b = 1.$$

Giải

$$A = \sqrt{(a + 2b^2)^2} - \sqrt{(2a - 3b^2)^2} = |a + 2b^2| - |2a - 3b^2|$$

$$\text{Với } a = \sqrt{2}; b = 1 \text{ thì } A = |\sqrt{2} + 2| - |2\sqrt{2} - 3| = \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} - 3 = 3\sqrt{2} - 1$$

Ví dụ 8: Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}.$

Giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2}}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ví dụ 9: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau:

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{4 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8}}.$$

Giải

Trước hết ta biến đổi mẫu số của vế trái:

$$\begin{aligned} 4 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} &= 2 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8} = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) + (\sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8}) \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) + (\sqrt{2 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \sqrt{2 \cdot 4}) \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) + \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta có } \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{4 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})(1 + \sqrt{2})} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

Ví dụ 10: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}.$$

Giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } A^2 &= \left(\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \right)^2 \\&= 4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 2\sqrt{(4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})(4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})} + 4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \\&= 8 + 2\sqrt{16 - 10 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \\&= 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2 \Rightarrow A = \sqrt{5} + 1.\end{aligned}$$

Ví dụ 11: Cho $(x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3$.

Tính giá trị biểu thức $E = x + y$

Giải

$$\text{Ta có: } (x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3.$$

Nhân hai vế của đẳng thức với $(\sqrt{x^2 + 3} - x)$, ta có:

$$\begin{aligned}(x + \sqrt{x^2 + 3})(\sqrt{x^2 + 3} - x)(y + \sqrt{y^2 + 3}) &= 3(\sqrt{x^2 + 3} - x) \\ \Leftrightarrow 3(y + \sqrt{y^2 + 3}) &= 3(\sqrt{x^2 + 3} - x) \Leftrightarrow x + y = \sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{y^2 + 3}\end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác: } (x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3.$$

Nhân hai vế của đẳng thức với $(\sqrt{y^2 + 3} - y)$, ta có:

$$\begin{aligned}(x + \sqrt{x^2 + 3})(\sqrt{y^2 + 3} - y)(y + \sqrt{y^2 + 3}) &= 3(\sqrt{y^2 + 3} - y) \\ \Leftrightarrow 3(x + \sqrt{x^2 + 3}) &= 3(\sqrt{y^2 + 3} - y) \Leftrightarrow x + y = \sqrt{y^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 3}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $E = x + y = 0$.

Ví dụ 12: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau

$$A = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$$

Giải

$$\text{Ta có } \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2(2 + \sqrt{3})}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2(2 - \sqrt{3})}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}, \text{ nên}$$

$$\begin{aligned}A &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \\&= \frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}} - \frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}}\end{aligned}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)} - \frac{(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ngoài ra bạn đọc có thể sử dụng phương pháp trục căn thức ở mẫu số, sau đó quy đồng mẫu số ta cũng có kết quả như trên.

Ví dụ 13: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau:

$$A = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A^3 &= (\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}})^3 \\ &= 20 + 14\sqrt{2} + 3A\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + 20 - 14\sqrt{2} = 40 + 6A \\ &\Leftrightarrow A^3 - 6A - 40 = 0 \\ &\Leftrightarrow A^3 - 4A^2 + 4A^2 - 16A + 10A - 40 = 0 \\ &\Leftrightarrow A^2(A - 4) + 4A(A - 4) + 10(A - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (A - 4)(A^2 + 4A + 10) = 0 \end{aligned}$$

Do $A^2 + 4A + 10 = (A + 2)^2 + 6 > 0$, nên $A = 4$.

Ví dụ 14: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau:

$$A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - |2\sqrt{5} - 3|}}, \text{ do } 2\sqrt{5} > 3 \\ &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - 2\sqrt{5} + 3}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5 - 2\sqrt{5} + 1}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)} = 1 \text{ (do } \sqrt{5} > 1). \text{ Vậy } A = 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 15: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau:

$$A = \frac{20}{3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}$$

Giải

$$A = \frac{20}{3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}.$$

Quy đồng mẫu số ta có:

$$A(3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}) = 20 \Leftrightarrow A(3 + \sqrt{5}) - 20 = -A\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}.$$

Bình phương hai vế ta có

$$(3 + \sqrt{5})A^2 - 10(3 + \sqrt{5})A + 100 = 0 \Leftrightarrow A^2 - 10A + 75 - 25\sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow A_1 = 5 + 5\sqrt{\sqrt{5} - 2}; \quad A_2 = 5 - 5\sqrt{\sqrt{5} - 2}. \text{ Ta có: } 3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}} > 4$$

$$\text{nên } A = \frac{20}{3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}} < 5, \text{ do đó } A = 5 - 5\sqrt{\sqrt{5} - 2}.$$

Ví dụ 16: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau

$$A = \frac{\sqrt{15 - 10\sqrt{2}} + \sqrt{13 + 4\sqrt{10}} - \sqrt{11 + 2\sqrt{10}}}{2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{12 + 8\sqrt{2}}}$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{\sqrt{15 - 10\sqrt{2}} + \sqrt{13 + 4\sqrt{10}} - \sqrt{11 + 2\sqrt{10}}}{2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{12 + 8\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{15 - 2\sqrt{50}} + \sqrt{13 + 2\sqrt{40}} - \sqrt{11 + 2\sqrt{10}}}{\sqrt{12 + 8\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{8}} + \sqrt{12 + 4\sqrt{8}}} \\ &= \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{50}} + 5 + \sqrt{8 + 2\sqrt{40}} + 5 - \sqrt{10 + 2\sqrt{10}} + 1}{2\sqrt{8 + 4\sqrt{8}} + 4 + \sqrt{8 - 2\sqrt{8}} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{10} - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{8} + \sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{10} + 1)^2}}{2\sqrt{(\sqrt{8} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{8} - 1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{10} - \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{5} - \sqrt{10} - 1}{2(\sqrt{8} + 2) + \sqrt{8} - 1} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3(2\sqrt{2} + 1)} = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{21}. \end{aligned}$$

Ví dụ 17: Tính giá trị biểu thức P, với $x = 2\sqrt{2}$.

$$P = \frac{\sqrt{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} - 2 \cdot (2x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^2}}$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} &= \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}} + \sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}} \\ &= \sqrt{x^2 - 1} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \text{ từ đó suy ra} \\ \sqrt{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} - 2 &= \sqrt{\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}} - 2 = \sqrt{\frac{2x - 2\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}} \\ &= \sqrt{\frac{x+1 - 2\sqrt{x^2 - 1} + x-1}{\sqrt{x^2 - 1}}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

ABC

Do đó

$$P = \frac{\sqrt{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} - 2 \cdot (2x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x^2 - 1}} \right) \cdot (2x + \sqrt{x^2 + 1})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(2x + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 1}} \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt[4]{(2\sqrt{2})^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{7}}.$$

Ví dụ 18: Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị biểu thức:

a. $A = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

b. $\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}}}$

Giải

a. $A = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| - |2 + \sqrt{3}|$

Mà $2 - \sqrt{3} > 0$ và $2 + \sqrt{3} > 0$ nên $A = 2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$.

b. $\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}}} = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{12 - 4\sqrt{3} + 1}}}$

$$= \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{(2\sqrt{3} - 1)^2}}} = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3 - |2\sqrt{3} - 1|}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1}} = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{3} - |\sqrt{3} - 1|} = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1} = 1$$

Dạng 2: Rút gọn biểu thức

Ví dụ 1: a. Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$ với $a > 0$.

b. Tính giá trị của tổng:

$$B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$$

Giải

a. Bình phương 2 vế $\Rightarrow A = \frac{a^2 + a + 1}{a(a+1)}$ (với $a > 0$).

b. Áp dụng câu a.

$$A = 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} \Rightarrow B = 100 - \frac{1}{100} = \frac{9999}{100}.$$

Ví dụ 2 : Rút gọn biểu thức: $P = \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + x + x\sqrt{x}}$

Giải

$$P = \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + x + x\sqrt{x}} \quad P \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{x} \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \text{ và } x \neq 1.$$

$$P = \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + x + x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x} + x)}{(\sqrt{x}^4 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x} + x)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3 - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{x - 1}$$

Ví dụ 3 : Cho $Q = \frac{3}{x^4 - x^3 + x - 1} - \frac{1}{x^4 + x^3 - x - 1} - \frac{4}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$

Rút gọn biểu thức, suy ra $0 < Q < \frac{32}{9}$ với $x \neq \pm 1$.

Giải

$$Q = \frac{3}{(x^2 - 1)(x^2 - x + 1)} - \frac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)} - \frac{4}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{2}{x^4 + x^2 + 1} > 0$$

$$Q < \frac{32}{9} \Leftrightarrow \frac{2}{x^4 + x^2 + 1} < \frac{32}{9} \Leftrightarrow 16x^4 + 16x^2 + 7 > 0; \forall x \neq \pm 1.$$

Vậy $0 < Q < \frac{32}{9}$ với $x \neq \pm 1$.

Ví dụ 4 : Rút gọn biểu thức sau: $P = \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}} \quad (x \geq 2)$

Giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}} = \frac{\sqrt{2} \left[\sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} \right]}{\sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} - \sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \left[|\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1| \right]}{\sqrt{(\sqrt{2x-1} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2x-1} - 1)^2}} = \frac{\sqrt{2} \left[|\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1| \right]}{|\sqrt{2x-1} + 1| - |\sqrt{2x-1} - 1|} \\ &= \frac{\sqrt{2} \left[\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 \right]}{\sqrt{2x-1} + 1 - (\sqrt{2x-1} - 1)} \quad (\text{vì } x \geq 2 \text{ nên } \sqrt{x-1} \geq 1 \text{ và } \sqrt{2x-1} \geq 1) \\ &= \sqrt{2}\sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức sau:

$$B = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{x - 4} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 4\sqrt{x} + 4} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x} + 2x - 4\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x}} \quad (x > 0; x \neq 4).$$

Giải

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{x - 4} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 4\sqrt{x} + 4} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x} + 2x - 4\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x})^2 - 2^2} - \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} + 2)^2} \right) \cdot \frac{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2) - (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)}{[(\sqrt{x})^2 - 2^2](\sqrt{x} + 2)} \right) \cdot \frac{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2 - (x - 3\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}} = \frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 6. \end{aligned}$$

Ví dụ 6: Rút gọn biểu thức sau: $B = \frac{(a - b)^3}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} + \frac{2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} + \frac{3(\sqrt{ab} - b)}{a - b}$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{(a - b)^3}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2)^3}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \\ &= \left[\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right]^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \\ &= a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} \\ \text{Vậy } &\frac{(a - b)^3}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} + \frac{2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} + \frac{3(\sqrt{ab} - b)}{a - b} \\ &= \frac{3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} + \frac{3\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + 3\sqrt{b}(a - \sqrt{ab} + b)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} = \frac{3a\sqrt{a} + 3b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} = 3. \end{aligned}$$

Dạng 3: Chứng minh đẳng thức

Ví dụ 1: Cho các số a, b, c, x, y, z thỏa mãn: $x = by + cz, y = ax + cz,$

$$z = ax + by, x + y + z \neq 0. \text{ Chứng minh } \frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b} + \frac{1}{1 + c} = 2.$$

Giải

Cộng vế với vế các đẳng thức ta được: $x + y + z = 2(ax + by + cz)$

Do $x + y + z \neq 0$ nên $ax + by + cz \neq 0$

Cộng hai vế của các đẳng thức lần lượt cho ax , by , cz ta được:

$$(a + 1)x = ax + by + cz; \quad (b + 1)y = ax + by + cz; \quad (c + 1)z = ax + by + cz$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$$

$$= \frac{x}{ax + by + cz} + \frac{y}{ax + by + cz} + \frac{z}{ax + by + cz} = \frac{x + y + z}{ax + by + cz} = 2$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}} = 7$.

Giải

$$u = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$$

$$u^3 = 182 + \sqrt{33125} + 182 - \sqrt{33125} + 3\sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} \cdot \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}} \cdot u$$

Suy ra $u^3 + 3u - 164 = 0 \Leftrightarrow (u - 7)(u^2 + 7u + 52) = 0$. Vì biệt thức $\Delta < 0$ nên ta có $u = 7$.

Ví dụ 3: Chứng minh: $\left(\frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}{x - \sqrt{3x} + 3} - 2\sqrt{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3 - x} \right) = 1$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 3$).

Giải

+ Với giả thiết đã cho: $x \geq 0$ và $x \neq 3$, ta có:

$$\frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}{x - \sqrt{3x} + 3} - 2\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{3})^3}{(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{x} = \sqrt{3} - \sqrt{x}$$

$$+ \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3 - x} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{(\sqrt{3} - \sqrt{x})(\sqrt{3} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{x}}$$

$$+ \text{Vậy: } \left(\frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}{x - \sqrt{3x} + 3} - 2\sqrt{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3 - x} \right) = (\sqrt{3} - \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{x}} = 1$$

Ví dụ 4: Đặt $\sqrt{2} = p$; $\sqrt[3]{2} = q$.

$$\text{Chứng tỏ rằng } \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = p + q + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} + 1$$

Giải

$$\text{Chúng ta cần chứng minh } \frac{1}{p - q} - \frac{1}{q} = p + q + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} + 1.$$

Hay: $1 = (p - q) \left(p + q + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{1}{q} + 1 \right). (*)$

Vế phải của (*): $p^2 + pq + \frac{p^2}{q} + q + \frac{p}{q} + p - qp - q^2 - p - \frac{q^2}{p} - 1 - q$

Do: $p^2 = 2; q^3 = 2; \frac{p^2}{q} = \frac{2}{q} = q^2; \frac{p}{q} = \frac{q^2}{p}$ nên (*) đúng.

Chú ý: Có thể trực căn thức ở mẫu số của $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}}$ để chứng minh đẳng thức trên.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng: $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{2}.$

Giải

Chúng ta đưa bài toán cần chứng minh về bài toán sau

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})} = 1$$

Ta có $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1; \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1.$

(Do $\sqrt{3} > 1$). Từ đó ta có: $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3} + 1} = \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{(3 + \sqrt{3})}{6}$$

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3} + 1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{(3 - \sqrt{3})}{6}. \text{ Từ đó suy ra:}$$

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})} = \frac{(3 + \sqrt{3})}{6} + \frac{(3 - \sqrt{3})}{6} = 1.$$

Dạng 4: Các bài toán tổng hợp

Ví dụ 1: Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}}$

a. Tìm điều kiện của x để M có nghĩa và rút gọn M.

b. Tìm x để $M = 5$.

c. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $M \in \mathbb{Z}$.

Giải

$$M = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}}$$

a. Điều kiện $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

$$\text{Rút gọn } M = \frac{2\sqrt{x} - 9 - (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3) + (2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$\text{Biến đổi ta có kết quả: } M = \frac{x - \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$$

b. $M = 5 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = 5$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + 1 = 5(\sqrt{x} - 3) \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 5\sqrt{x} - 15$$

$$\Leftrightarrow 16 = 4\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{16}{4} = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

c. $M = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = \frac{\sqrt{x} - 3 + 4}{\sqrt{x} - 3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 3}$

Do $M \in \mathbb{Z}$ nên $\sqrt{x} - 3$ là ước của 4 $\Rightarrow \sqrt{x} - 3$ nhận các giá trị: $-4; -2; -1; 1; 2; 4$

$$\Rightarrow x \in \{1; 4; 16; 25; 49\} \text{ do } x \neq 4 \Rightarrow x \in \{1; 16; 25; 49\}$$

Ví dụ 2: Cho biểu thức $D = \left[\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1 - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}} \right] : \left[1 + \frac{a + b + 2ab}{1 - ab} \right]$

a. Tìm điều kiện xác định của D và rút gọn D.

b. Tính giá trị của D với $a = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$

c. Tìm giá trị lớn nhất của D.

Giải

a. Điều kiện xác định của D là:
$$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ ab \neq 1 \end{cases}$$

- Rút gọn D:
$$D = \left[\frac{2\sqrt{a} + 2b\sqrt{a}}{1 - ab} \right] : \left[\frac{a + b + ab}{1 - ab} \right] = \frac{2\sqrt{a}}{a + 1}$$

b. $a = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{1} = (\sqrt{3} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{3} + 1$

Vậy $D = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 1} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{4 - \sqrt{3}}$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN

LC/02660

c. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $2\sqrt{a} \leq a + 1 \Rightarrow D \leq 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của D là 1.

Ví dụ 3 : Cho biểu thức:

$$P = \frac{x}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})} - \frac{y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)} - \frac{xy}{(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{y})}$$

a. Tìm điều kiện của x và y để P xác định. Rút gọn P.

b. Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình $P = 2$.

Giải

a. Điều kiện để P xác định là: $x \geq 0; y \geq 0; y \neq 1; x + y \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Rút gọn: } P &= \frac{x(1 + \sqrt{x}) - y(1 - \sqrt{y}) - xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\ &= \frac{(x - y) + (x\sqrt{x} + y\sqrt{y}) - xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y} + x - \sqrt{xy} + y - xy)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - \sqrt{y}(\sqrt{x} + 1) + y(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + y - y\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{y})(1 + \sqrt{y}) - \sqrt{y}(1 - \sqrt{y})}{(1 - \sqrt{y})} = \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}$$

$$\text{b. } P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(1 + \sqrt{y}) - (\sqrt{y} + 1) = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{y}) = 1$$

$$\text{Ta có: } 1 + \sqrt{y} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = 0; 1; 2; 3; 4.$$

Thay vào ta có các cặp giá trị (4; 0) và (2; 2) thỏa mãn.

$$\text{Ví dụ 4 : Cho biểu thức: } A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a}.$$

1. Tìm điều kiện đối với a, b để biểu thức A được xác định.

2. Rút gọn biểu thức A.

Giải

1. Điều kiện: $ab \geq 0; a \neq 0$.

2. Từ điều kiện trên, ta có hai trường hợp:

$$+ b \geq 0, a > 0 \text{ hoặc } + b \leq 0, a < 0$$

* Nếu $b \geq 0, a > 0$ thì:

$$A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} - \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a}} + 1 = 1$$

* Nếu $b \leq 0, a < 0$ thì:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} - \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a}}{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a}} = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{-b} - \sqrt{-a}}{-\sqrt{-a}} \\ &= \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{-b}{-a}} - \sqrt{\frac{-a}{-a}} = 2\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{3 + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 3}{x\sqrt{x} - 1} \right) \cdot \frac{x^2 + x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$

- Tìm điều kiện đối với biến x để biểu thức A được xác định.
- Rút gọn biểu thức A .

Giải

- Điều kiện để A được xác định là:

$$x \geq 0, x + \sqrt{x} + 1 \neq 0, x\sqrt{x} - 1 \neq 0, x \neq 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ và } x \neq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } & \frac{3 + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 3}{x\sqrt{x} - 1} = \frac{3 + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{(3 + \sqrt{x})(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} - 3)}{(x + \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{x\sqrt{x} - 1} \\ & \frac{x^2 + x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(x\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}} \\ \text{Suy ra } & A = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{x\sqrt{x} - 1} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x} + 1)(x\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}} = (\sqrt{x} + 1)^2. \end{aligned}$$

Ví dụ 6: Cho biểu thức: $B = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right]$

$$C = \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$$

- Tìm điều kiện để $A = B : C$ xác định.
- Rút gọn A
- Cho $xy = 6$. Xác định x, y để A có giá trị nhỏ nhất.

Giải

- Điều kiện để biểu thức A xác định là điều kiện các biểu thức B, C cùng xác định hay A xác định khi và chỉ khi $x > 0; y > 0$.

b. Ta có: $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{xy}}{xy}$.

Suy ra $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
 $= \frac{2\sqrt{xy}}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + 2\sqrt{xy} + y}{xy} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy}$

$C = \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy}}$
 $= \frac{\sqrt{x}(x+y) + \sqrt{y}(x+y)}{\sqrt{xy}(x+y)} = \frac{(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}(x+y)} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$

Vậy $A = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} : \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$

c. Vì $xy = 16 \Rightarrow \sqrt{xy} = 4 \Rightarrow \sqrt{x}\sqrt{y} = 4$.

Hai số dương $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ có tích $\sqrt{x}\sqrt{y} = 4$ không đổi nên tổng $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

có giá trị nhỏ nhất khi $\sqrt{x} = \sqrt{y} = 2 \Rightarrow A = \frac{2+2}{4} = 1$.

Ví dụ 7: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{4 - x}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$.

a. Rút gọn P

b. Tìm giá trị x để $P = -1$.

c. Tìm m để với mọi $x > 9$ ta có $m(\sqrt{x} - 3)P > x + 1$.

Giải

a. Điều kiện để P có nghĩa: $x > 0, x \neq 4, x \neq 1$.

Ta có $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{4 - x}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$
 $= \left[\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})}\right] : \left[\frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 2)\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right]$
 $= \left[\frac{4\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})}\right] : \left[\frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 2)\sqrt{x}} - \frac{2(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x}}\right]$
 $= \left[\frac{8\sqrt{x} + 4x}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})}\right] : \left[\frac{\sqrt{x} - 1 - 2\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 2)\sqrt{x}}\right]$
 $= \left[\frac{(\sqrt{x} + 2)4\sqrt{x}}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})}\right] : \left[\frac{(\sqrt{x} - 2)\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}\right] = \frac{4x}{\sqrt{x} - 3} (x \neq 9)$

b. Tìm giá trị x để $P = -1$.

$$P = \frac{4x}{\sqrt{x}-3} = -1 \Leftrightarrow 4x = 3 - \sqrt{x} \Leftrightarrow 4x + \sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(4\sqrt{x} - 3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{16} \text{ (Do } x > 0).$$

c. Tìm m để với mọi $x > 9$ ta có $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$.

$$\text{Ta có } m(\sqrt{x}-3)P > x+1 \Leftrightarrow m(\sqrt{x}-3) \frac{4x}{\sqrt{x}-3} > x+1$$

$$\Leftrightarrow m.4x > x+1 \Leftrightarrow x(4m-1) > 1. \text{ Vì } x > 9 > 0 \text{ nên } 4m-1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{4}$$

$$\text{Suy ra } x > \frac{1}{4m-1}. \text{ Do đó } \frac{1}{4m-1} \leq 9 \Leftrightarrow m \geq \frac{5}{18}.$$

Vậy giá trị m để với mọi $x > 9$ ta có $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$ là $m \geq \frac{5}{18}$.

Ví dụ 8 : Cho biểu thức: $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right)$.

a. Chứng minh rằng $P > 0$ với $\forall x > 0; x \neq 1$

b. Tính giá trị của P biết $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$.

c. Tìm giá trị x thỏa mãn: $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

Giải

a. Điều kiện để P có nghĩa: $x > 0, x \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) : \left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right] = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{x-1+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} > 0, \text{ với } \forall x > 0; x \neq 1. \end{aligned}$$

b. Tính giá trị của P biết $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$.

$$\text{Ta có } x = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 4-2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}-1.$$

$$\text{Do đó } P = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{3}-1+1)^2}{\sqrt{3}-1} = \frac{3}{\sqrt{3}-1} = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

c. Tìm giá trị x thỏa mãn: $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

Điều kiện $x \geq 4$.

$$P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$$

$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} + 1 - 6\sqrt{x} + 3 + \sqrt{x-4} = 0 \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 + \sqrt{x-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 + \sqrt{x-4} = 0. \text{ Vì } (\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0; \sqrt{x-4} \geq 0, \text{ với mọi } x \geq 4, \text{ nên}$$

$$\text{ta có phương trình có nghiệm khi và chỉ khi } \begin{cases} (\sqrt{x} - 2)^2 = 0 \\ \sqrt{x-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Ví dụ 9 : So sánh các số sau:

$$A = 2\sqrt{1} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \dots + 2\sqrt{19} \text{ và } B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{4} + 2\sqrt{6} + \dots + 2\sqrt{18} + \sqrt{20}$$

Giải

$$\text{Ta có } \sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{3} > \sqrt{4} + \sqrt{2}, \text{ tương}$$

tự $2\sqrt{5} > \sqrt{6} + \sqrt{4}; 2\sqrt{7} > \sqrt{8} + \sqrt{6} \dots; 2\sqrt{19} > \sqrt{20} + \sqrt{18}$. Cộng từng vế các bất đẳng thức cùng chiều trên ta có:

$$2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \dots + 2\sqrt{19} > 2\sqrt{4} + 2\sqrt{6} + \dots + 2\sqrt{18} + \sqrt{20}$$

$$\Rightarrow A - 2\sqrt{1} > B - \sqrt{2} \Leftrightarrow A - B > 2\sqrt{1} - \sqrt{2} > 0 \Rightarrow A > B. \text{ Vậy } A > B.$$

Ví dụ 10 : Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1 - x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} \right)$$

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tính giá trị của P biết $x = 7 - 4\sqrt{3}$.

c. Tìm giá trị lớn nhất của a để $P > a$.

Giải

Điều kiện P có nghĩa là: $\forall x > 0; x \neq 1$

a. Rút gọn biểu thức P.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1 - x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} \right) \\ &= \left[\frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} \right] : \left[\frac{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + x)} \right] \\ &= \left[\frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} \right] : \left[\frac{(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x} + x)} \right] \\ &= \frac{(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} : \left[(2\sqrt{x} - 1) \frac{1 - \sqrt{x} + x + \sqrt{x} - x}{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + x)} \right] \\ &= \frac{(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} \cdot \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + x)}{(2\sqrt{x} - 1)} = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

b. Tính giá trị của P biết $x = 7 - 4\sqrt{3}$.

Ta có $x = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$, do đó

$$P = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} = \frac{1 - (2 - \sqrt{3}) + 7 - 4\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 3.$$

c. Tìm giá trị lớn nhất của a để $P > a$.

$$P = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{x}} - 1 = 1 \Rightarrow P \geq 1. \text{ Đẳng thức xảy}$$

ra khi và chỉ khi $\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$, không thỏa mãn. Vậy $P > 1$. Do đó

giá trị lớn nhất của a để $P > a$ là $a = 1$.

Ví dụ 11 : Cho biểu thức: $P = \frac{8\sqrt{x} - x - 31}{x - 8\sqrt{x} + 15} - \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 1}{5 - \sqrt{x}}$.

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tính giá trị của x để $P < 1$.

c. Tìm giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Giải

a. Rút gọn biểu thức P: Điều kiện P có nghĩa $x \neq 9; x \neq 25; x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{8\sqrt{x} - x - 31}{x - 8\sqrt{x} + 15} - \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 1}{5 - \sqrt{x}} \\ &= \frac{8\sqrt{x} - x - 31}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 5)} - \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 5} \\ &= \frac{8\sqrt{x} - x - 31 - (\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5) + (3\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 5)} \\ &= \frac{8\sqrt{x} - x - 31 - x + 25 + 3x - 10\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 5)} = \frac{x - 2\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 5)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 5)} = \frac{(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 5)}. \end{aligned}$$

b. Tính giá trị của x để $P < 1$. Điều kiện P có nghĩa $x \neq 9; x \neq 25; x \geq 0$.

$$P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5} < 1 \Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{x} - 5} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 5 < 0 \Leftrightarrow x < 25. \text{ Kết hợp với điều}$$

$$\text{kiện ta có } P < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 9 \\ 0 \leq x < 25 \end{cases}.$$

c. Tìm giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

$$P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5} = 1 + \frac{6}{\sqrt{x} - 5} \quad (x \neq 9; x \neq 25; x \geq 0).$$

P có giá trị nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x} - 5$ là ước của 6 hay
 $\sqrt{x} - 5 = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6 \Rightarrow x = \{4; 16; 36; 49; 64; 121\}$

Bài tập vận dụng

1. Cho $(x + \sqrt{x^2 + 5})(y + \sqrt{y^2 + 5}) = 5$. Tính giá trị biểu thức $E = x + y$.

2. Cho $A = \frac{1}{2(1 + \sqrt{a+2})} + \frac{1}{2(1 - \sqrt{a+2})}$; $B = A + \frac{a^2 - 2a}{1 + a^3}$;

a. Tìm a để A, B có nghĩa

b. Rút gọn A, B

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của B.

3. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \sqrt{a^2 + 4ab^2 + 4b^4} - \sqrt{4a^2 - 12ab^2 + 9b^4} \quad \text{với } a = \sqrt{2}; b = 1.$$

4. Chứng minh: $\left(\frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}{x - \sqrt{3x} + 3} - 2\sqrt{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3 - x} \right) = 1$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 3$).

5. Rút gọn biểu thức: $P = \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + x + x\sqrt{x}}$.

6. Cho biểu thức: $M = \frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x}-1}} - \frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x}-1}}$.

a. Tìm điều kiện đối với x để biểu thức M xác định.

b. Rút gọn biểu thức M.

c. Tìm những giá trị x nguyên ($x > 2$) để M có giá trị nguyên.

7. Giải phương trình: $\sqrt{x+2} + 3\sqrt{2x-5} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x-5} = 2\sqrt{2}$

8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{1+4x+4x^2} + \sqrt{4x^2-12x+9}$

9. Xét biểu thức: $A = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$

a. Rút gọn A.

b. Biết $a > 1$, hãy so sánh A với $|A|$.

c. Tìm a để $A = 2$.

d. Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

10. Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào các biến:

a. $\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a} \right)$ với $a > 0, a \neq 1$.

b. $\left(\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}$ với $x > 0, y > 0, x \neq y$

11. Rút gọn rồi tính giá trị của từng biểu thức sau:

a. $A = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{a - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{a + \sqrt{2}} \right) : \frac{a - \sqrt{6}}{a^2 - 2}$, với $a = -1$.

b. $B = 1 + \frac{3m^2}{m - 2} \sqrt{\frac{m^2 - 4m + 4}{m^2}}$, với $m = \frac{3}{2}$.

c. $C = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}} - \frac{x + y}{y - x}$ với $x = 16, y = 25$.

12. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x} - 4x}{1 - 4x} - 1 \right) : \left(\frac{1 + 2x}{1 - 4x} - \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1} - 1 \right)$

a. Rút gọn A

b. Tìm các giá trị của x để $A > A^2$.

c. Tìm các giá trị của x để $|A| > \frac{1}{4}$.

13. Xét biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$

a. Rút gọn A.

b. Tìm các giá trị của x để $A < 1$.

c. Tìm các giá trị nguyên của x sao cho A cũng là số nguyên.

14. Cho biểu thức: $P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} - 1 \right)$

a. Rút gọn P.

b. Tìm các giá trị nguyên của x để P nguyên.

c. Tìm các giá trị của x để $P = \sqrt{x}$.

15. Hãy tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a - b}{1 + ab}$, biết:

$$a = \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{x - \sqrt{1 - x^2}}; b = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}; \left(\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1 \right)$$

16. Xét biểu thức: $P = \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} - \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} - \frac{4x}{x - 4} \right) : \frac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} - x}$

a. Rút gọn P.

b. Tìm các giá trị của x để $P > 0, P < 0$.

c. Tìm các giá trị của x sao cho $|P| = 1$.

17. Cho biểu thức: $A = (x - x^2 - 1) : \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2} - 3$ với $x \neq 0$.

a. Rút gọn A.

b. Tìm x để A có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

ABC

18. Cho $S = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$.

Hãy tính giá trị của S biết rằng $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = a$.

19. Xét biểu thức: $A = \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a}-a-1}\right)$.

a. Rút gọn A .

b. Tìm các giá trị của a sao cho $A > 1$.

c. Tính giá trị của A nếu $a = 1995 - 2\sqrt{1994}$.

20. Cho các biểu thức: $A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$; $B = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x} + 2x + 2}{\sqrt{x} + 2}$

a. Rút gọn A và B .

b. Tìm x sao cho $A = B$.

21. a. Chứng minh giá trị biểu thức B không phụ thuộc vào a :

$$B = \left(\frac{2 + \sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1}\right) \frac{a\sqrt{a} + a - \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}} \quad \text{với } a > 0, a \neq 1.$$

b. Chứng minh giá trị biểu thức C không phụ thuộc vào x, y :

$$C = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} - \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)^2} - \frac{x+y}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{(x+y)^4}}{4xy}.$$

22. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a}\right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$.

a. Rút gọn A .

b. Tìm giá trị của A nếu $a = \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}}$.

c. Tìm giá trị của a để $\sqrt{A} > A$.

23. Xét biểu thức $A = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{y}}{y-x}\right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

a. Rút gọn A .

b. Chứng minh $A \geq 0$.

c. So sánh A với $\sqrt{A}$.

24. Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1 - \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2}}}$

Rút gọn rồi tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

25. Cho $M = \sqrt{\frac{a+x^2}{x}} - 2\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a+x^2}{x}} + 2\sqrt{a}$

a. Rút gọn M .

b. Tìm các giá trị của x và a để $M < M^2$.

c. Tìm các giá trị của x và a để $|M| < \frac{1}{4}$.

26. Rút gọn các biểu thức:

a. $A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$

b. $B = \frac{x^8 + 3x^4 + 4}{x^4 + x^2 + 2}$

27. Cho $\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

Tính giá trị của $M = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{z+y}$

28.a. Cho $\sqrt{16 - 2x + x^2} - \sqrt{9 - 2x + x^2} = 1$.

Tính: $A = \sqrt{16 - 2x + x^2} + \sqrt{9 - 2x + x^2}$.

b. Cho $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = a$. Tính $S = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$.

29. Rút gọn các biểu thức:

a. $\left(\frac{m + \sqrt{m^2 - n^2}}{m - \sqrt{m^2 - n^2}} - \frac{m - \sqrt{m^2 - n^2}}{m + \sqrt{m^2 - n^2}} \right) : \frac{4m\sqrt{m^2 - n^2}}{n^2}$

b. $\left(\frac{\sqrt{c+d} - \sqrt{c-d}}{\sqrt{c+d} + \sqrt{c-d}} - \frac{\sqrt{c+d} + \sqrt{c-d}}{\sqrt{c+d} - \sqrt{c-d}} \right) \cdot \frac{d\sqrt{c^2 - d^2}}{4}$

c. $\left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) : (a-b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

d. $\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2} - 1+a} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} - \frac{1}{a} \right)$ với $0 < a < 1$.

30. Tính giá trị của biểu thức:

a. $M = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2} - x}$ với $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right)$

b. $N = \frac{m^5 + \sqrt[3]{2m^{12}} + \sqrt[3]{4m^9}}{m^3 - 2}$ với $m = 2\sqrt[3]{2}$

c. $P = \frac{x^3y + xy^3 + 6\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}}$ với $x = \frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1}$; $y = \frac{4\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}$

Hướng dẫn và đáp số

1. Ta có: $(x + \sqrt{x^2 + 5})(y + \sqrt{y^2 + 5}) = 5$

$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 5})(\sqrt{x^2 + 5} - x)(y + \sqrt{y^2 + 5}) = 5(\sqrt{x^2 + 5} - x)$

$\Leftrightarrow 5(y + \sqrt{y^2 + 5}) = 5(\sqrt{x^2 + 5} - x) \Leftrightarrow x + y = \sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{y^2 + 5} \quad (1)$

Mặt khác: $(x + \sqrt{x^2 + 5})(y + \sqrt{y^2 + 5}) = 5$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 5})(\sqrt{y^2 + 5} - y)(y + \sqrt{y^2 + 5}) = 5(\sqrt{y^2 + 5} - y)$$

$$\Leftrightarrow 5(x + \sqrt{x^2 + 5}) = 5(\sqrt{y^2 + 5} - y) \Leftrightarrow x + y = \sqrt{y^2 + 5} - \sqrt{x^2 + 5} \quad (2).$$

Cộng (1) và (2) về theo về ta có: $E = x + y = 0$.

2. a. Tìm a để A, B có nghĩa: Để A, B có nghĩa thì phải có điều kiện

$$\begin{cases} a + 2 \geq 0 \\ 1 - \sqrt{a + 2} \neq 0 \\ 1 + a^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a \geq 2; a \neq -1 \\ a \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a \neq -1 \end{cases}$$

b. Rút gọn A, B

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2(1 + \sqrt{a + 2})} + \frac{1}{2(1 - \sqrt{a + 2})} = \frac{1 - \sqrt{a + 2}}{2(1 - (a + 2))} + \frac{1 + \sqrt{a + 2}}{2(1 - (a + 2))} \\ &= \frac{1 - \sqrt{a + 2}}{2[1 - (a + 2)]} + \frac{1 + \sqrt{a + 2}}{2[1 - (a + 2)]} = \frac{2}{2[1 - (a + 2)]} = \frac{-1}{a + 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= A + \frac{a^2 - 2a}{1 + a^3} = \frac{-1}{a + 1} + \frac{a^2 - 2a}{1 + a^3} = \frac{-1}{a + 1} + \frac{a^2 - 2a}{(a + 1)(a^2 - a + 1)} \\ &= \frac{-a^2 + a - 1 + a^2 - 2a}{(a + 1)(a^2 - a + 1)} = \frac{-(a + 1)}{(a + 1)(a^2 - a + 1)} = \frac{-1}{(a^2 - a + 1)} \quad (\text{vì } a \neq -1). \end{aligned}$$

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của B

Ta có $B = \frac{-1}{(a^2 - a + 1)}$, mà $a^2 - a + 1 = a^2 - a + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2 - a + 1} \leq \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{-1}{a^2 - a + 1} \geq \frac{-4}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $\frac{-4}{3}$ khi $a = \frac{1}{2}$.

3. $A = \sqrt{(a + 2b^2)^2} - \sqrt{(2a - 3b^2)^2} = |a + 2b^2| - |2a - 3b^2|$

Với $a = \sqrt{2}$; $b = 1$ thì $A = |\sqrt{2} + 2| - |2\sqrt{2} - 3| = \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} - 3 = 3\sqrt{2} - 1$

4. Với giả thiết đã cho: $x \geq 0$ và $x \neq 3$, ta có:

$$\begin{aligned} &+ \frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}{x - \sqrt{3x} + 3} - 2\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{3})^3}{(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{x} = \sqrt{3} - \sqrt{x} \\ &+ \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3 - x} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{(\sqrt{3} - \sqrt{x})(\sqrt{3} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Vậy: $\left(\frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}{x - \sqrt{3x} + 3} - 2\sqrt{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3 - x} \right) = (\sqrt{3} - \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{x}} = 1.$

5. $P = \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + x + x\sqrt{x}}$ P có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{x} \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \text{ và } x \neq 1.$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + x + x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x} + x)}{(\sqrt{x^4} - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x} + x)}{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{(1 + \sqrt{x} + x)}{(\sqrt{x^3} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{x + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{x - 1}. \end{aligned}$$

6. a. M có nghĩa khi: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 2\sqrt{x-1} > 0 \\ x - 2\sqrt{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 2\sqrt{x-1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 > 4(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

b. $M = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{1}{|\sqrt{x-1}-1|}$

• Nếu $\sqrt{x-1}-1 > 0$, hay $x > 2$ thì: $M = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{2}{2-x}$

• Nếu $\sqrt{x-1}-1 < 0$, hay $1 \leq x < 2$ thì: $M = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}$

Vậy: $M = \begin{cases} \frac{2}{2-x} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2} & \text{khi } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

c. Với $x > 2$ ta có $M = \frac{2}{2-x}$. Muốn M nguyên khi $x > 2$, $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2$ chia hết $2-x \Rightarrow 2-x = \pm 1$; $2-x = \pm 2$.

* $2-x=1 \Leftrightarrow x=1$ (loại)

* $2-x=-1 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow M=-2$

* $2-x=2 \Leftrightarrow x=0$ (loại)

* $2-x=-2 \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow M=-1$

Vậy, với $x=3$; $x=4$ biểu thức M có giá trị nguyên.

7. ♦ Điều kiện: $x \geq \frac{5}{2}$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương với phương

$$\text{trình: } \sqrt{(\sqrt{2x-5}+3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-5}-1)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5} + 3 + |\sqrt{2x-5}-1| = 4 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2x-5} = |\sqrt{2x-5}-1|$$

$$\text{♦ Do đó: } 1 - \sqrt{2x-5} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$$

$$\text{♦ Kết hợp với điều kiện ban đầu ta có: } \frac{5}{2} \leq x \leq 3$$

$$\text{♦ Vậy tập nghiệm của phương trình là mọi } x: \frac{5}{2} \leq x \leq 3$$

8. ♦ Ta có: $P = |1+2x| + |3-2x|$

$$\text{♦ Mà: } |1+2x| + |3-2x| \geq |1+2x+3-2x| = 4. \text{ Nên } P \geq 4$$

$$\text{♦ Vậy: } P \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 khi } (1+2x)(3-2x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

9. $a - \sqrt{a} + 1 = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên điều kiện để A có nghĩa là $a > 0$.

$$\text{a. } A = \frac{\sqrt{a}[(\sqrt{a})^3 + 1]}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a}(2\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}} + 1$$

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)(a - \sqrt{a} + 1)}{a - \sqrt{a} + 1} - (2\sqrt{a} + 1) + 1$$

$$= \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1) - (2\sqrt{a} + 1) + 1 = a + \sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 1 + 1 = a - \sqrt{a}.$$

b. Với $a > 1$ thì $a > \sqrt{a}$, do đó $A = a - \sqrt{a} > 0$, suy ra $|A| = A$.

c. $a - \sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow a - \sqrt{a} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 2) = 0$

$$\text{Vì } \sqrt{a} + 1 > 0 \text{ nên } \sqrt{a} - 2 = 0, \text{ suy ra } a = 4.$$

d. $A = a - \sqrt{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$. Vậy A nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$ khi và chỉ khi

$$\sqrt{a} = \frac{1}{2} \text{ hay } a = \frac{1}{4}.$$

10.a. $\left[\frac{1}{2(1+\sqrt{a})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{a})} - \frac{a^2+1}{(1-a)(1+a)} \right] \cdot \left(\frac{a+1}{a} \right)$

$$= \left[\frac{1-\sqrt{a}+1+\sqrt{a}}{2(1-a)} - \frac{a^2+1}{(1-a)(1+a)} \right] \cdot \frac{a+1}{a}$$

$$= \left[\frac{1}{1-a} - \frac{a^2+1}{(1-a)(1+a)} \right] \cdot \frac{a+1}{a} = \frac{1+a-a^2-1}{(1-a)(1+a)} \cdot \frac{a+1}{a}$$

$$= \frac{a-a^2}{1-a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a(1-a)}{(1-a)a} = 1.$$

b. Mẫu số chung là: $2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, do đó ta có

$$\frac{4\sqrt{xy} + (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \cdot 2\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 1.$$

11.a $A = \left[1 - \frac{\sqrt{2}(a+\sqrt{2})}{(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{2}(a-\sqrt{2})}{(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})} \right] : \frac{a-\sqrt{6}}{a^2-2}$

$$= \left(1 - \frac{a\sqrt{2}+2}{a^2-2} + \frac{a\sqrt{2}-2}{a^2-2} \right) : \frac{a-\sqrt{6}}{a^2-2}$$

$$= \frac{a^2-2-a\sqrt{2}-2+a\sqrt{2}-2}{a^2-2} \cdot \frac{a^2-2}{a-\sqrt{6}} = \frac{a^2-6}{a-\sqrt{6}} = a + \sqrt{6}. \text{ (Chú ý điều kiện}$$

$a \neq \pm\sqrt{2}, a \neq \sqrt{6}$). Với $a = -1$ thì $A = \sqrt{6} - 1$.

b. $B = 1 + \frac{3m^2}{m-2} \sqrt{\frac{(m-2)^2}{m^2}} = 1 + \frac{3m^2}{m-2} \cdot \frac{|m-2|}{|m|}.$

Điều kiện: $m \neq 0; m \neq 2$. Với $m = \frac{3}{2}$, ta có:

$$B = 1 + \frac{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{3}{2}-2} \cdot \frac{\left|\frac{3}{2}-2\right|}{\left|\frac{3}{2}\right|} = 1 + \frac{3 \cdot \frac{9}{4}}{\frac{3}{2}-2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{9}{2} = -\frac{7}{2}.$$

c. $C = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \frac{x+y}{x-y} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 - (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \frac{x+y}{x-y}$

$$= \frac{x+y+2\sqrt{xy}-x-y+2\sqrt{xy}}{2(x-y)} + \frac{x+y}{x-y} = \frac{2\sqrt{xy}}{x-y} + \frac{x+y}{x-y}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

Với $x=16, y=25$ thì $C = \frac{\sqrt{16}+\sqrt{25}}{\sqrt{16}-\sqrt{25}} = \frac{4+5}{4-5} = -9.$

$$12. a. \text{Ta có: } \frac{\sqrt{x} - 4x}{1 - 4x} - 1 = \frac{\sqrt{x} - 4x - 1 + 4x}{1 - 4x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{1 - 4x}$$

$$\frac{1 + 2x}{1 - 4x} - \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1} - 1 = \frac{1 + 2x}{1 - 4x} + \frac{2\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)}{1 - 4x} - 1$$

$$= \frac{1 + 2x + 4x + 2\sqrt{x} - 1 + 4x}{1 - 4x} = \frac{10x + 2\sqrt{x}}{1 - 4x}$$

$$\text{Do đó: } A = \frac{\sqrt{x} - 1}{1 - 4x} : \frac{10x + 2\sqrt{x}}{1 - 4x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{10x + 2\sqrt{x}}.$$

Chú ý: Điều kiện để biểu thức A xác định là: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - 4x \neq 0 \\ 10 + 2\sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{4} \end{cases}$

$$b. \text{Ta có: } A > A^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{10x + 2\sqrt{x}} \right)^2 < \frac{\sqrt{x} - 1}{10x + 2\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 < (\sqrt{x} - 1)(10x + 2\sqrt{x}) \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(10x + 2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1) \underbrace{(10 + \sqrt{x} + 1)}_0 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{4} \end{cases} \text{)}. \text{ Vậy: } A > A^2 \Leftrightarrow x > 1.$$

$$c. \text{Ta có: } |A| > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{x} - 1}{10x + 2\sqrt{x}} \right| > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4|\sqrt{x} - 1| > 10x + 2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(\sqrt{x} - 1) > 10x + 2\sqrt{x} \\ 4(\sqrt{x} - 1) < -(10x + 2\sqrt{x}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 2\sqrt{x} + 4 < 0 \\ 10x + 6\sqrt{x} - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \sqrt{x} + 2 < 0 \quad (1) \\ 5x + 3\sqrt{x} - 2 < 0 \quad (2) \end{cases}$$

Giải bất phương trình (1): Đặt $\sqrt{x} = t$ ($t > 0, t \neq \frac{1}{2}$).

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 5t^2 - t + 2 < 0 \Leftrightarrow 5(t - \frac{1}{10})^2 + \frac{39}{20} < 0$. Bất phương trình này

vô nghiệm. Giải bất phương trình (2): Đặt $\sqrt{x} = t$ ($t > 0, t \neq \frac{1}{2}$).

$$\text{Ta có: } (2) \Leftrightarrow 5t^2 + 3t - 2 < 0 \Leftrightarrow (5t - 2)(t + 1) < 0$$

$$\Rightarrow \left(t - \frac{2}{5} \right) \underbrace{(t + 1)}_{> 0} < 0 \Leftrightarrow t - \frac{2}{5} < 0 \Leftrightarrow t < \frac{2}{5} \Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{2}{5} \Leftrightarrow x < \frac{4}{25}.$$

Kết hợp với điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{4} \end{cases}$, ta có: $0 < x < \frac{4}{25}$.

Vậy $|A| > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{4}{25}$.

13.a. Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{(x-9) - (2x+\sqrt{x}-4\sqrt{x}-2)}{x-5\sqrt{x}+6} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9+x-3\sqrt{x}+7}{x-5\sqrt{x}+6} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{x-5\sqrt{x}+6} = \frac{(x+\sqrt{x})-2(\sqrt{x}+1)}{(x-2\sqrt{x})-3(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

b. $A < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-3} < 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$

Kết hợp điều kiện ta có: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$

c. Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$

Đặt $a = \frac{4}{\sqrt{x}-3}$. Ta có: $a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{a} + 3 \in \mathbb{Q}$ (1)

Đặt $\frac{4}{a} + 3 = \frac{p}{q}$ (2) với $\begin{cases} p, q \in \mathbb{Z} \\ (p, q) = 1, q > 0 \end{cases}$. Từ (1) và (2) ta có:

$\sqrt{x} = \frac{p}{q} \Rightarrow x = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow xq^2 = p^2 \Rightarrow p^2 : q^2 \Rightarrow p : q, m \quad (p; q) = 1$

$\Rightarrow q = 1 \Rightarrow \frac{p}{q} = p \Rightarrow \sqrt{x} = p \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Z}$.

Do vậy $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}-3$ là ước của 4

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3$ nhận các giá trị là $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$\Leftrightarrow x$ nhận các giá trị là 1, 4, 16, 25, 49.

14.a. Điều kiện: $x > 0$ và $x \neq 1$

$$P = \frac{(3x + 3\sqrt{x} - 3) - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} + \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$= \frac{(2x + 3\sqrt{x} - 2) - (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

b. $P = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$. Làm tương tự như bài 13, để $\frac{2}{\sqrt{x} - 1} \in \mathbb{Z}$ trước hết phải chứng minh $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$. Sau đó P nhận giá trị nguyên khi $(\sqrt{x} - 1)$ là ước số của 2, nghĩa là $(\sqrt{x} - 1)$ nhận các giá trị $\pm 1, \pm 2$.

Giải ra ta được $x = 4; 9$ (thỏa mãn điều kiện).

c. $P = \sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0$.

Giải ra ta được $x = 3 + 2\sqrt{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

15. Xét: $a - b = \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{x - \sqrt{1 - x^2}} - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = \frac{x(x + \sqrt{1 - x^2}) - \sqrt{1 - x^2}(x - \sqrt{1 - x^2})}{x(x - \sqrt{1 - x^2})}$

$$= \frac{x^2 + x\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - x^2} + 1 - x^2}{x(x - \sqrt{1 - x^2})} = \frac{1}{x(x - \sqrt{1 - x^2})}$$

$$1 + ab = 1 + \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{x - \sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = 1 + \frac{x\sqrt{1 - x^2} + 1 - x^2}{x(x - \sqrt{1 - x^2})}$$

$$= \frac{x^2 - x\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - x^2} + 1 - x^2}{x^2 - x\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{x(x - \sqrt{1 - x^2})}$$

Vậy $P = \frac{a - b}{1 + ab} = \frac{1}{x(x - \sqrt{1 - x^2})} : \frac{1}{x(x - \sqrt{1 - x^2})} = 1$.

16. a. $P = \frac{(2 + \sqrt{x})^2 - (2 - \sqrt{x})^2 + 4x}{4 - x} : \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}$

$$= \frac{8\sqrt{x} + 4x}{4 - x} \cdot \frac{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}{\sqrt{x} - 3} = \frac{4\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2) \cdot \sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{4x}{\sqrt{x} - 3}$$

(Chú ý điều kiện $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$).

b. $P > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x} - 3} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$

$$P < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x} - 3} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

c. $|P| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{4x}{\sqrt{x} - 3} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{\sqrt{x} - 3} = \pm 1$

• Với $\frac{4x}{\sqrt{x}-3} = 1 \Leftrightarrow 4x - \sqrt{x} + 3 = 0 \quad (1)$

Dễ thấy $4x - \sqrt{x} + 3 > 0$ nên (1) là vô nghiệm.

• Với $\frac{4x}{\sqrt{x}-3} = -1 \Leftrightarrow 4x + \sqrt{x} - 3 = 0 \quad (2)$. Đặt $\sqrt{x} = t > 0$, ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 4t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(4t-3) = 0 \Leftrightarrow 4t-3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{9}{16} \text{ thỏa mãn điều kiện } x > 0, x \neq 4, x \neq 9.$$

17. a. Ta có: $(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 + 2(x + \frac{1}{x})^2 - 3 = (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 + 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 4 - 3$
 $= (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 + 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 1 = (x^2 + \frac{1}{x^2} + 1)^2$. Do $x \neq 0$ nên $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 > 0$.

Vì thế: $A = (x - x^2 - 1) : \sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1)^2} = -\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} = -\frac{x^2(x^2 - x + 1)}{x^4 + x^2 + 1}$

$$A = -\frac{x^2(x^2 - x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} = -\frac{x^2}{x^2 + x + 1}$$

$$\left(\text{Vì } x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \right).$$

b. Vì $x \neq 0$ nên $A = -\frac{1}{t^2 + t + 1} = -\frac{1}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} < 0$

Vậy A nhỏ nhất khi $|A|$ lớn nhất hay $(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2, \text{ khi đó } A = -\frac{4}{3}.$$

18. a $= xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$

$$a^2 = x^2y^2 + (1+x^2)(1+y^2) + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$= x^2y^2 + 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$\Rightarrow a^2 - 1 = x^2 + y^2 + 2x^2y^2 + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$S^2 = \left[x\sqrt{(1+y^2)} + y\sqrt{(1+x^2)} \right]^2$$

$$= x^2(1+y^2) + y^2(1+x^2) + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$S^2 = x^2 + y^2 + 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = a^2 - 1$$

Suy ra: $S = \pm\sqrt{a^2 - 1}$.

$$19.a. \text{ Điều kiện: } a \geq 0; a \neq 1. A = \frac{a+1+\sqrt{a}}{a+1} : \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(\sqrt{a}-1)} \right)$$

$$= \frac{a+\sqrt{a}+1}{a+1} \cdot \frac{(a+1)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)^2} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$$

$$b. A > 1 \Leftrightarrow \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{a+2}{\sqrt{a}-1} > 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } a+2 > 0 \text{ nên } (1) \Leftrightarrow \sqrt{a}-1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > 1$$

$$\Leftrightarrow a > 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $A > 1$ với

$$c. a = 1995 - 2\sqrt{1994} = (\sqrt{1994} - 1)^2; A = \frac{1995 - \sqrt{1994}}{\sqrt{1994} - 2}.$$

$$20. a. \text{ Ta có: } A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} \text{ xác định } x \geq 0, x \neq 4$$

$$\text{Rõ ràng: } A = \frac{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 2} = 2\sqrt{x} + 1$$

$$\text{Ta có: } B = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x} + 2x + 2}{\sqrt{x} + 2} \text{ xác định } \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2x + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(x+1)(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} + 2} = x + 1.$$

$$b. \text{ Ta có: } A = B \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}, \text{ ta có } x = 0. \text{ Vậy } A = B \Leftrightarrow x = 0.$$

$$21. a. B = \left[\frac{2+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2} - \frac{\sqrt{a}-2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \right] \cdot \frac{a(\sqrt{a}+1) - (\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{a})(\sqrt{a}-1) - (\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{2\sqrt{a} - 2 + a - \sqrt{a} - a - \sqrt{a} + 2\sqrt{a} + 2}{(a-1)(\sqrt{a}+1)} \cdot \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2.$$

Vậy giá trị của biểu thức B không phụ thuộc vào a.

$$\begin{aligned}
\text{b. } C &= \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} - \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)^2} - \frac{x+y}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{(x+y)^4}}{4xy} \\
&= \frac{1}{\left[\frac{x + 2\sqrt{xy} + y - x - y}{\sqrt{x+y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right]^2} - \frac{x+y}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} - \frac{(x+y)^2}{4xy} \\
&= \left[\frac{\sqrt{x+y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} \right]^2 - \frac{x+y}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} - \frac{(x+y)^2}{4xy} \\
&= \frac{(x+y)(x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y)}{4xy} - \frac{2\sqrt{x}\sqrt{y}(x+y)}{4xy} - \frac{(x+y)^2}{4xy} \\
&= \frac{(x+y)(x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} - x - y)}{4xy} = 0
\end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức C không phụ thuộc vào x, y.

$$\begin{aligned}
\text{22. a. } A &= \frac{(\sqrt{a} + 1)^2 - (\sqrt{a} - 1)^2 + 4\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a}} \\
&= \frac{a + 2\sqrt{a} + 1 - (a - 2\sqrt{a} + 1) + 4\sqrt{a}(a-1)}{a-1} \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a}} \\
&= \frac{a + 2\sqrt{a} + 1 - a + 2\sqrt{a} - 1 + 4a\sqrt{a} - 4\sqrt{a}}{a-1} \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a}} \\
&= \frac{4a\sqrt{a}}{a-1} \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a}} = 4a \quad (\text{điều kiện } a > 0, a \neq 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b. } A &= 4a. \text{ Với } a = \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}} \text{ thì } A = \frac{4\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}(2 - \sqrt{6})}{4 - 6} \\
&= -2\sqrt{6}(2 - \sqrt{6}) = 12 - 4\sqrt{6}
\end{aligned}$$

$$\text{c. } \sqrt{A} > A \Leftrightarrow \sqrt{A} > \sqrt{A^2} \Leftrightarrow \sqrt{A} - \sqrt{A^2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{A}(1 - \sqrt{A}) > 0$$

$$\text{Vì } \sqrt{A} > 0 \text{ nên } 1 - \sqrt{A} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{A} < 1 \text{ hay } A < 1.$$

$$\text{Mà } A = 4a \text{ nên } 4a < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{4}.$$

$$\text{23. a. Điều kiện: } x \geq 0, y \geq 0; x \neq y: A = \frac{\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y}.$$

$$\text{b. Ta có: } \sqrt{xy} \geq 0 \text{ và } x - \sqrt{xy} + y = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2 + \frac{3y}{4} > 0$$

với mọi x, y không đồng thời bằng 0 nên $A \geq 0$.

c. Xét $A^2 - A = A(A - 1)$. Vì $A \geq 0$ nên chỉ xét hiệu

$$\begin{aligned} A - 1 &= \frac{\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y} - 1 = \frac{\sqrt{xy} - x + \sqrt{xy} - y}{x - \sqrt{xy} + y} \\ &= \frac{-(x - 2\sqrt{xy} + y)}{x - \sqrt{xy} + y} = \frac{-(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{x - \sqrt{xy} + y} \end{aligned}$$

Thấy $A - 1 < 0$ (vì $x \neq y$), do vậy $A^2 \leq A$ nên $A \leq \sqrt{A}$.

$$24. A = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}}{\sqrt{(1-\frac{4}{x})^2}}$$

- Nếu $4 \leq x \leq 8$ thì $A = \frac{4x}{x-4}$
- Nếu $x > 8$ thì $A = \frac{2x}{\sqrt{4-x}}$.

Bây giờ ta đi tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $A \in \mathbb{Z}$.

+ Xét $A = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$: $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-4$ là ước số của 16, nhưng $4 \leq x \leq 8$ nên $x = 5; 6; 8$.

+ Xét $A = \frac{2x}{\sqrt{4-x}}$: $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x-4}$ phải là số nguyên

$$\Leftrightarrow x-4 = m^2 (0 \leq m \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow m^2 + 4 = x.$$

Vậy $A = \frac{2(m^2+4)}{m} = 2m + \frac{8}{m}$, từ đó $m = 4; 8$ (vì $x \geq 9$ nên $m \geq 2$).

Vì thế $x = 20; 68$.

$$\begin{aligned} 25. a. M &= \sqrt{\frac{a+x^2}{x}} - 2\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a+x^2}{x}} + 2\sqrt{a} \\ &= \sqrt{\frac{a+x^2-2\sqrt{ax}}{x}} + \sqrt{\frac{a+x^2+2\sqrt{ax}}{x}} = \frac{|\sqrt{a}-x|}{\sqrt{x}} + \frac{|\sqrt{a}+x|}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

- Nếu $a \geq 0$ và $x > \sqrt{a}$ thì $M = \frac{x - \sqrt{a} + \sqrt{a} + x}{\sqrt{x}} = \frac{2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$.
- Nếu $a \geq 0$ và $0 < x < \sqrt{a}$ thì $M = \frac{\sqrt{a} - x + \sqrt{a} + x}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$.

b. Nếu $a \geq 0$ và $x > \sqrt{a}$: $M < M^2 \Rightarrow M > 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$.

Nếu $0 \leq a < \frac{1}{16}$ thì $M > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$.

Nếu $a \geq \frac{1}{16}$ thì $M > 1 \Leftrightarrow x > \sqrt{a}$.

• Nếu $a \geq 0$ và $0 < x < \sqrt{a} : M^2 < M \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x}} > 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{a} > \sqrt{x}$.

Vậy $4a > x$. Nếu $a > \frac{1}{16}$ thì $4a > \sqrt{a}$. Vậy $x < \sqrt{a}$.

Nếu $a < \frac{1}{16}$ thì $4a > \sqrt{a}$. Vậy $x > \sqrt{a}$.

c. Nếu $a \geq 0$ và $x > \sqrt{a}$ thì $M = 2\sqrt{x}$.

Ta có: $|M| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |2\sqrt{x}| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow x < \frac{1}{64}$.

Nếu $\sqrt{a} < \frac{1}{64} \Leftrightarrow 0 \leq a < (\frac{1}{64})^2$ thì $|M| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{a} < x < \frac{1}{64}$.

Nếu $\sqrt{a} \geq \frac{1}{64} \Leftrightarrow a \geq (\frac{1}{64})^2$ thì BPT $|M| < \frac{1}{4}$ là vô nghiệm.

• Nếu $a \geq 0$ và $0 < x < \sqrt{a} : |M| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x}} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{4a}{x} < \frac{1}{16}$

$\Leftrightarrow \frac{64a}{x} < 1 \Leftrightarrow x > 64a$.

Nếu $64a < \sqrt{a} \Leftrightarrow 64^2 a^2 < a \Leftrightarrow (64a)^2 - a < 0 \Leftrightarrow a[(64)^2 a - 1] < 0$

$\Leftrightarrow 4069a - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 \leq a < \frac{1}{4069}$ thì $|M| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 64a < x < \sqrt{a}$

Nếu $64 \geq \sqrt{a} \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{4069}$ thì bất phương trình $|M| < \frac{1}{4}$ là vô nghiệm.

26. a) $A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 3 + 3^2}}}$
 $= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - |2\sqrt{5} - 3|}}$
 $= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - (2\sqrt{5} - 3)}} \text{ (Vì } 2\sqrt{5} > 3 \Leftrightarrow (2\sqrt{5})^2 > 3^2 \Leftrightarrow 20 > 9)$
 $= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - 2\sqrt{5} + 3}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \cdot 1 + 1^2}}$
 $= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - |\sqrt{5} - 1|} = \sqrt{\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)}$
 $= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5} + 1} = \sqrt{1} = 1 \text{ (vì } \sqrt{5} > 1 \Leftrightarrow 5 > 1)$

ABC

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{x^8 + 3x^4 + 4}{x^4 + x^2 + 2} = \frac{(x^8 + 4x^4 + 4) - x^4}{x^4 + x^2 + 2} \\ &= \frac{(x^4 + 2)^2 - (x^2)^2}{x^4 + x^2 + 2} = \frac{(x^4 + 2 + x^2)(x^4 + 2 - x^2)}{x^4 + x^2 + 2} = x^4 + 2 - x^2. \end{aligned}$$

27. Từ giả thiết suy ra:

$$\frac{x}{y+z+t} + 1 = \frac{y}{z+t+x} + 1 = \frac{z}{t+x+y} + 1 = \frac{t}{x+y+z} + 1$$

$$\text{Hay } \frac{x+y+z+t}{y+z+t} = \frac{y+z+t+x}{z+t+x} = \frac{z+t+x+y}{t+x+y} = \frac{t+x+y+z}{x+y+z}$$

a) Nếu $x + y + z + t = 0$ thì $M = -4$

b) Nếu $x + y + z + t \neq 0$ thì suy ra $x = y = z = t$ nên $M = 4$.

28. a) $A = A.1$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow A &= (\sqrt{16 - 2x + x^2} + \sqrt{9 - 2x + x^2})(\sqrt{16 - 2x + x^2} - \sqrt{9 - 2x + x^2}) \\ &= (16 - 2x + x^2) - (9 - 2x + x^2) = 7. \end{aligned}$$

b) Ta có: $S^2 = x^2(1 + y^2) + y^2(1 + x^2) + 2xy\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}$

$$S^2 = x^2 + y^2 + 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} a^2 &= (xy)^2 + (1 + x^2)(1 + y^2) + 2xy\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)} \\ &= 1 + x^2 + y^2 + 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)} \quad (**) \end{aligned}$$

So sánh (*) và (**) ta được: $S^2 = a^2 - 1$.

Vậy: $S = \pm\sqrt{a^2 - 1}$.

$$\begin{aligned} \text{29. a) } &\left(\frac{m + \sqrt{m^2 - n^2}}{m - \sqrt{m^2 - n^2}} - \frac{m - \sqrt{m^2 - n^2}}{m + \sqrt{m^2 - n^2}} \right) : \frac{4m\sqrt{m^2 - n^2}}{n^2} \\ &= \left(\frac{(m + \sqrt{m^2 - n^2})^2 - (m - \sqrt{m^2 - n^2})^2}{m^2 - (m^2 - n^2)} \right) : \frac{4m\sqrt{m^2 - n^2}}{n^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } &\left(\frac{\sqrt{c+d} - \sqrt{c-d}}{\sqrt{c+d} + \sqrt{c-d}} - \frac{\sqrt{c+d} + \sqrt{c-d}}{\sqrt{c+d} - \sqrt{c-d}} \right) \cdot \frac{d\sqrt{c^2 - d^2}}{4} \\ &= \left(\frac{(\sqrt{c+d} - \sqrt{c-d})^2 - (\sqrt{c+d} + \sqrt{c-d})^2}{(c+d) - (c-d)} \right) \cdot \frac{d\sqrt{c^2 - d^2}}{4} = \frac{d^2 - c^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) : (a-b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\
 &= \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) : (a-b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\
 &= \frac{(a-b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a-b)} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } & \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2} - 1+a} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} - \frac{1}{a} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a})} \right) \left(\frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a} \right) \\
 &= \frac{(\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a})^2}{(1+a) - (1-a)} \cdot \frac{(\sqrt{1-a^2} - 1)}{a} = -1
 \end{aligned}$$

30. a) Điều kiện để biểu thức của x có nghĩa là: $a(1-a) > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$

$$\text{Khi đó: } x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right) = \frac{1-2a}{2\sqrt{a(1-a)}}$$

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1 + \frac{(1-2a)^2}{4a(1-a)}} = \frac{1}{2\sqrt{a(1-a)}}$$

$$\text{Thay vào biểu thức của M, ta được: } M = \frac{2a \cdot \frac{1}{2\sqrt{a(1-a)}}}{\frac{1}{2\sqrt{a(1-a)}} - \frac{1-2a}{2\sqrt{a(1-a)}}} = 1.$$

$$\text{b) } N = \frac{m^5 + \sqrt[3]{2m^{12}} + \sqrt[3]{4m^9}}{m^3 - 2} = \frac{m^3(m^2 + m\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}{(m - \sqrt[3]{2})(m^2 + m\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})} = \frac{m^3}{(m - \sqrt[3]{2})}$$

Thay $m = 2\sqrt[3]{2}$ thì ta được: $N = 8\sqrt[3]{4}$.

c) Khử căn ở mẫu thức của biểu thức x và y:

$$x = \frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} = \sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3} - 1); y = \frac{4\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1} = \sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3} + 1)$$

Thay vào biểu thức của P thì ta được:

$$P = \frac{3\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3} - 1)^3(\sqrt[3]{3} + 1) + 3\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{3} + 1)^3 + 6\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}}$$

$$P = \frac{3\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{9} - 1)[(\sqrt[3]{3} - 1)^2 + (\sqrt[3]{3} + 1)^2] + 6\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{6\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{81} - 1) + 6\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}} = 18$$

ABC

Chương 2. Phương trình bậc hai-Hệ thức Viet

Một số kiến thức cơ bản

Trước hết ta nhớ lại những định nghĩa cơ bản:

1. Cho phương trình $f(x) = g(x)$. Nghiệm của phương trình xét trên tập A là số $\alpha \in A$ sao cho $f(\alpha) = g(\alpha)$. Chẳng hạn phương trình $2x^2 - x - 1 = 0$ xét trên tập Z có một nghiệm $x = 1$, xét trên tập Q, R có thêm nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.
2. Hai phương trình (1) và (2) gọi là tương đương trên tập số A nếu tập nghiệm của (1) và (2) như nhau trong A (kể cả trường hợp (1) và (2) cùng vô nghiệm trong A). Chẳng hạn: phương trình $x^2 - 1 = 0$ và phương trình $2x^2 - x - 1 = 0$ là tương đương trên Z^+ , nhưng không tương đương trên Q, R .
3. Các phép biến đổi phương trình mà không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình gọi là các phép biến đổi tương đương. Chẳng hạn các phép biến đổi sau đây:
 - a) $f(x) = g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = h(x)$.
 - b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + c = g(x) + c$.
 - c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^{2k+1} = [g(x)]^{2k+1}; k \in N$.
 - d) $f(x) = g(x)$ (với $f(x) \geq 0; g(x) \geq 0$)
 $\Leftrightarrow [f(x)]^{2k} = [g(x)]^{2k}; k \in N$

Sau này trong từng loại phương trình, ta sẽ đề cập thêm nhiều phép biến đổi tương đương khác.

4. Các phép biến đổi phương trình mà làm mở rộng thêm tập nghiệm gọi là các phép biến đổi hệ quả.

Chẳng hạn: $x = \sqrt{2x+3} \Rightarrow x^2 = 2x+3$. Khi sử dụng các phép biến đổi hệ quả phải chú ý đặt thêm điều kiện để phép biến đổi trở thành tương đương hoặc phải kiểm tra các nghiệm của phương trình hệ quả để phát hiện ra các nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu (nghiệm ngoại lai).

5. Phương trình bậc hai

Định nghĩa: Phương trình bậc hai là phương trình có dạng

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Công thức nghiệm: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac$. Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nếu $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ thì phương trình có hai nghiệm trùng nhau hay phương trình có nghiệm kép $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$.

Hệ thức Viet: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Nếu phương trình

có nghiệm x_1, x_2 thì $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Ta có thể sử dụng định lý Viet để tính các biểu thức của x_1, x_2 theo a, b, c .

$$+ S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

$$+ S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

$$+ S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \frac{3abc - b^3}{a^3}.$$

$$+ |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}.$$

Ứng dụng của hệ thức Viet

1. **Nhận nghiệm:** Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

$$\text{Nếu } a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}.$$

$$\text{Nếu } a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}.$$

2. **Tìm hai số khi biết tổng và tích**

Cho hai số x, y . Biết rằng $x + y = S, x \cdot y = P$ thì x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + SX + P = 0$.

3. **Phân tích thành nhân tử**

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

4. Xác định dấu các nghiệm số

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Giả sử phương trình có nghiệm x_1, x_2 thì $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Nếu $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Nếu $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu. Khi đó, nếu $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} > 0$ thì phương trình có hai nghiệm dương. Nếu $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0$ thì phương trình có hai nghiệm âm.

Chú ý: Ở đây, cần nhấn mạnh với bạn đọc, giả thiết của hệ thức Viet là $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. Nhiều học sinh khi sử dụng hệ thức Viet mà quên kiểm tra giả thiết. Trong nhiều bài toán, việc lãng quên đó sẽ dẫn đến những kết quả sai lạc.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Phương trình bậc hai

a. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì phương trình vô nghiệm

* Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có a và c trái dấu, tức là $ac < 0$, thì $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Vì thế phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Đối với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) mà $b = -2b'$,

$\Delta' = b'^2 - ac$ thì:

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta'}}{a} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}$
- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Công thức này được gọi là công thức nghiệm thu gọn.

Dạng 2: Ứng dụng của hệ thức Viet

a. Nhắm nghiệm

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Nếu $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -\frac{c}{a}$.

Nếu $a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$.

b. Tìm hai số khi biết tổng và tích

Bước 1: Cho hai số x, y . Biết rằng $x + y = S, x \cdot y = P$ thì x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + SX + P = 0$.

Bước 2: Giải phương trình $X^2 + SX + P = 0$.

Bước 3: Kết luận.

c. Phân tích thành nhân tử

d. Tìm tham số m thỏa biểu thức đối xứng của hai nghiệm

Cách giải:

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Bước 2: Tính $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, theo m .

Bước 3: Biểu diễn hệ thức đề bài theo S, P , với chú ý rằng

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P; x_1^3 + x_2^3 = S(S^2 - 3P); \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P}; \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}.$$

Bước 4: Lập phương trình theo m . Giải phương trình, đối chiếu với điều kiện và kết luận nghiệm

e. Tìm hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số m

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Bước 2: Tính $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, theo m .

Bước 3: Khử m để lập hệ thức giữa S và P , từ đó ta suy ra hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số m .

f. Xác định dấu các nghiệm số

Bước 1: Nếu $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu

Bước 2: Nếu $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

Khi đó, nếu $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} > 0$ thì phương trình có hai nghiệm dương.

Nếu $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0$ thì phương trình có hai nghiệm âm.

Bước 3: Kết luận

Dạng 3: Phương trình chứa tham số $ax^2 + bx + c \neq 0$

Bước 1: Xét $a = 0$.

Bước 2: Xét $a \neq 0$: trong trường hợp này, phương trình đã cho trở thành phương trình bậc hai.

Bước 3: Kết luận

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Phương trình bậc hai

Ví dụ 1: Cho phương trình: $x^2 + px + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt a_1, a_2 và phương trình $x^2 + qx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt b_1, b_2 . Chứng minh: $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = q^2 - p^2$

Giải

Theo định lý Viet ta có: $a_1 + a_2 = -p, a_1 a_2 = 1, b_1 + b_2 = -q, b_1 b_2 = 1$

$$\begin{aligned} & (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \\ &= [a_1 a_2 - (a_1 + a_2)b_1 + b_1^2][a_1 a_2 + (a_1 + a_2)b_2 + b_2^2] \\ &= (1 + pb_1 + b_1^2)(1 - pb_2 + b_2^2) = (pb_1 - qb_1)(-qb_2 - pb_2) \\ &= (p - q)b_1(-p - q)b_2 = q^2 - p^2 \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 . Chứng minh:

- Phương trình $ct^2 + bt + a = 0$ cũng có hai nghiệm dương phân biệt t_1 và t_2
- Chứng minh: $x_1 + x_2 + t_1 + t_2 \geq 4$.

Giải

- Vì x_1 là nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ nên $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$.

Vì $x_1 > 0 \Rightarrow c \cdot \left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{x_1} + a = 0$. Chứng tỏ $\frac{1}{x_1}$ là một nghiệm dương

của phương trình: $ct^2 + bt + a = 0; t_1 = \frac{1}{x_1}$. Vì x_2 là nghiệm của phương

trình: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax_2^2 + bx_2 + c = 0$.

Vì $x_2 > 0$ nên $c.\left(\frac{1}{x_2}\right)^2 + b.\left(\frac{1}{x_2}\right) + a = 0$ điều này chứng tỏ $\frac{1}{x_2}$ là một nghiệm dương của phương trình $ct^2 + bt + a = 0$; $t_2 = \frac{1}{x_2}$.

Vậy nếu phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$ thì phương trình: $ct^2 + bt + a = 0$ cũng có hai nghiệm dương phân biệt $t_1; t_2$. $t_1 = \frac{1}{x_1}$; $t_2 = \frac{1}{x_2}$.

b. Do x_1, x_2, t_1, t_2 đều là những nghiệm dương nên $t_1 + x_1 = \frac{1}{x_1} + x_1 \geq 2$;
 $t_2 + x_2 = \frac{1}{x_2} + x_2 \geq 2$. Do đó $x_1 + x_2 + t_1 + t_2 \geq 4$.

Ví dụ 3: Cho phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m-1 = 0$. Không giải phương trình, tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn: $3x_1 - 4x_2 = 11$.

Giải

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta > 0$

$$\Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4.2.(m-1) > 0. \text{ Từ đó suy ra } m \neq 1,5 \quad (1)$$

Mặt khác, theo định lý Viet và giả thiết ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2m-1}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-1}{2} \\ 3x_1 - 4x_2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13-4m}{7} \\ x_1 = \frac{7m-7}{26-8m} \\ 3\frac{13-4m}{7} - 4\frac{7m-7}{26-8m} = 11 \end{cases}$$

Giải phương trình $3\frac{13-4m}{7} - 4\frac{7m-7}{26-8m} = 11$ ta được: $m = -2$ và $m = 4,125$

(2). Đối chiếu điều kiện (1) và (2) ta có:

Với $m = -2$ hoặc $m = 4,125$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 + x_2 = 11$.

Ví dụ 4: Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$

a. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

b. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm sao cho nghiệm này bằng ba lần nghiệm kia.

Giải

- a. Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0$.

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 - m^2 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2.$$

- b. Với $m \leq 2$ thì (1) có 2 nghiệm.

Gọi một nghiệm của (1) là a thì nghiệm kia là $3a$.

$$\text{Theo Viet, ta có: } \begin{cases} a + 3a = 2m - 2 \\ a \cdot 3a = m^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{m-1}{2} \Rightarrow 3\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 = m^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m - 15 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \pm 2\sqrt{6} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Ví dụ 5: Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$

- a. Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có nghiệm với $\forall m$

- b. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$

Giải

- a. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với $\forall m$

Ta có $\Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 \geq 0, \forall m$, suy ra phương trình đã cho luôn có nghiệm với $\forall m$

- b. Áp dụng hệ thức Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{2m+1}{m^2+2} (1)$. Tìm điều

kiện để phương trình (1) có nghiệm theo ẩn $m \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq P \leq 1$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2$, giá trị lớn nhất của P bằng $1 \Leftrightarrow m = 1$.

Ví dụ 6: Cho phương trình $\frac{2}{2-\sqrt{3}}x^2 - mx + \frac{2}{2-\sqrt{3}}m^2 + 4m - 1 = 0 (1)$

- a. Giải phương trình (1) với $m = -1$.

- b. Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 + x_2$

Giải

- a. Khi $m = -1$, ta có phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{10} \\ x_2 = -1 + \sqrt{10} \end{cases}$$

b. Để phương trình (1) có 2 nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -8m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$ (*)

+ Để phương trình có nghiệm khác 0

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m^2 + 4m - 1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 \neq -4 - 3\sqrt{2} \\ m_2 \neq -4 + 3\sqrt{2} \end{cases} \quad (**)$$

$$+ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 + x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 x_2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 0 \\ m^2 + 8m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 - \sqrt{19} \\ m = -4 + \sqrt{19} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (*) và (**) ta được $m = 0$ và $m = -4 - \sqrt{19}$

Ví dụ 7: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ (1)

a. Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

b. Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình (1) mà không phụ thuộc vào m.

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x_1^2 + x_2^2$ (với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1))

Giải

a. Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } \Delta = m^2 - 3m + 4 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall m.$$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{b. Theo Viet: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-2 \\ 2x_1 x_2 = 2m-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 - 4 = 0 \text{ không phụ thuộc vào } m$$

$$\begin{aligned} \text{c. } P = x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4(m-1)^2 - 2(m-3) \\ &= \left(2m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq \frac{15}{4}, \forall m. \text{ Vậy } P_{\min} = \frac{15}{4} \text{ với } m = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Ví dụ 8: Tìm giá trị của m để phương trình sau có nghiệm và tính các nghiệm ấy theo m: $x + |x^2 - 2x + m| = 0$

Giải

$$\text{Ta có } x + |x^2 - 2x + m| = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| = -x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 - 2x + m = -x \\ x^2 - 2x + m = x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \begin{cases} x^2 - x + m = 0 \\ x^2 - 3x + m = 0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

+ Xét $m > 0$: Nếu (1), (2) có nghiệm thì các nghiệm đều dương ($S > 0$, $P > 0$) không thỏa mãn $x \leq 0$.

+ Xét $m = 0$: (1) có nghiệm 0 và 1; (2) có nghiệm 0 và 3. Nhận $x = 0$.

+ Xét $m < 0$: phương trình đã cho có bốn nghiệm, hai nghiệm dương, hai nghiệm âm (do $P < 0$) thỏa mãn điều kiện $x \leq 0$.

Hai nghiệm âm là: $x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}$; $x = \frac{3 - \sqrt{9 - 4m}}{2}$

Tóm lại $m \leq 0$ thì phương trình có nghiệm:

$$x = 0; x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}; x = \frac{3 - \sqrt{9 - 4m}}{2}$$

Ví dụ 9: Chứng minh rằng nếu $a + b \geq 2$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm: $x^2 + 2ax + b = 0$; $x^2 + 2bx + a = 0$

Giải

$$\Delta'_1 = a^2 - b; \Delta'_2 = b^2 - a$$

$$\begin{aligned} \Delta'_1 + \Delta'_2 &= a^2 - b + b^2 - a = (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (a + b - 2) \\ &= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a + b - 2) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } (a - 1)^2 \geq 0; (b - 1)^2 \geq 0; a + b - 2 \geq 0 \text{ (gt)}$$

Do đó trong hai số $\Delta'_1; \Delta'_2$ có ít nhất một số không âm

Vậy ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 10: Cho hai phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1), $a \neq 0$

$mx^2 + nx + p = 0$ (2), $m \neq 0$. Chứng minh rằng nếu ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm thì phương trình sau luôn luôn có nghiệm: $(an - mb)x^2 + 2(ap - mc)x + bp - nc = 0$

Giải

$$\text{Xét các phương trình: } ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

$$mx^2 + nx + p = 0 \quad (2) \quad (a, m \neq 0)$$

$$\text{Và } (an - bm)x^2 + 2(ap - mc)x + bp - nc = 0 \quad (3)$$

Do giả thiết bài toán ít nhất một trong hai phương trình (1) hoặc (2) vô nghiệm, giả sử (1) vô nghiệm như vậy $b^2 - 4ac < 0$

Đặt $A = an - bm, B = ap - mc, C = bp - cn$, ta có:

$$cA - bB - aC = acn - bmc - abp + bmc + abp - anc = 0 \quad (*)$$

$$(3) \text{ trở thành } Ax^2 + 2Bx + C = 0 \quad (4)$$

1. Nếu $A = 0$ từ (*) có $aC - bB = 0 \Leftrightarrow C = \frac{b}{a}B$

(4) trở thành $2Bx + C = 0 \Leftrightarrow 2Bx + \frac{b}{a}B = 0$

$B = 0$ ta có x tùy ý $\Rightarrow$ (3) có nghiệm

$B \neq 0$ ta có $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow$ (3) có nghiệm.

2. Nếu $A \neq 0$. Ta có $\Delta' = B^2 - AC$

* $AC \leq 0 \Rightarrow \Delta' \geq 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm

* $AC > 0$ do $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow b^2 < 4ac \Rightarrow b^2AC < 4acAC$

Từ (*) có $bB = cA + aC$ $b^2B = (cA + aC)^2 \geq 4acAC > b^2AC$

Suy ra $b^2(B^2 - AC) > 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 > 0 \\ B^2 - AC > 0 \end{cases}$

Như vậy $\Delta' > 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm

Trường hợp phương trình (2) vô nghiệm, chứng minh tương tự như các bước giải trên cũng được (3) có nghiệm.

Kết luận: Với giả thiết bài toán thì phương trình (3) luôn luôn có nghiệm.

Ví dụ 11: Cho $f(x) = x^2 - 2(m+2)x + 6m + 1$

a. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm với mọi m .

b. Đặt $x = t + 2$; tính $f(x)$ theo t . Từ đó tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm lớn hơn 2.

Giải

a. $f(x) = x^2 - 2(m+2)x + 6m + 1 = 0$

$\Delta' = (m+2)^2 - 6m - 1 = m^2 - 2m + 3 = (m-1)^2 + 2 > 0$ với mọi m

b. Với $x = t + 2 \Rightarrow f(x) = t^2 - 2mt + 2m - 3$. Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm lớn hơn 2 $\Leftrightarrow t^2 - 2mt + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm lớn hơn 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 3 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 12: Cho ba số $a; b; c$ thỏa mãn $a > b > c > 0$ và $a + b + c = 12$. Chứng minh rằng một trong ba phương trình sau: $x^2 + ax + b = 0$ (1); $x^2 + bx + c = 0$ (2); $x^2 + cx + a = 0$ (3), có một phương trình có nghiệm, một phương trình vô nghiệm.

Giải

Từ $a > b > c > 0$ và $a + b + c = 12 \Rightarrow 3a > a + b + c = 12 > 3c \Rightarrow a > 4 > c$;
 $\Delta_1 = a^2 - 4b > 4a - 4b = 4(a - b) > 0 \Rightarrow$ phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có nghiệm;
 $\Delta_2 = c^2 - 4a > 4c - 4a = 4(c - a) < 0 \Rightarrow$ phương trình $x^2 + cx + a = 0$ vô nghiệm.

Ví dụ 13: Xác định m để hai phương trình: $x^2 - mx + 2m + 1 = 0$ và $mx^2 - (2m + 1)x - 1 = 0$, có nghiệm chung.

Giải

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, ta có:

$$\begin{cases} x_0^2 - mx_0 + (2m + 1) = 0 & (1) \\ mx_0^2 - (2m + 1)x_0 - 1 = 0 & (2) \end{cases} \text{ . Từ (2) suy ra } x_0 \neq 0 \text{ . Nhân cả hai vế}$$

của (1) với x_0 rồi cộng với (2) ta được: $x_0^3 = 1 \Rightarrow x_0 = 1$

$$\text{Thay } x_0 = 1 \text{ vào hệ phương trình ta được: } \begin{cases} m + 2 = 0 \\ -m - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -2$$

Vậy với $m = -2$ thì hai phương trình có nghiệm chung.

Dạng 2: Ứng dụng của hệ thức Viet

a. Tìm hai số khi biết tổng và tích

Ví dụ : Cho a, b là hai số thực thỏa $5a + b = 22$. Biết phương trình $x^2 + ax - b = 0$ có hai nghiệm là hai số nguyên dương. Hãy tìm hai nghiệm đó.

Giải

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên dương của phương trình ($0 < x_1 < x_2$)

Để phương trình có nghiệm $\Delta = a^2 - 4b > 0$. Áp dụng hệ thức Viet, ta có $a = -x_1 - x_2$ và $b = x_1x_2$ nên theo giả thiết $5(-x_1 - x_2) + x_1x_2 = 22$

$\Leftrightarrow x_1(x_2 - 5) - 5(x_2 - 5) = 47 \Leftrightarrow (x_1 - 5)(x_2 - 5) = 47$ (*). Do phương trình có hai nghiệm là hai số nguyên dương nên: $-4 \leq x_1 - 5 \leq x_2 - 5$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5 = 1 \\ x_2 - 5 = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 52 \end{cases}.$$

Khi đó: $a = -58$ và $b = 312$ thỏa mãn $5a + b = 22$.

Vậy hai nghiệm cần tìm là $x_1 = 6; x_2 = 52$.

b. Biểu thức đối xứng của hai nghiệm

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 + 5x + 2 = 0$. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm. Tính giá trị các biểu thức sau :

a. $x_1^2 + x_2^2; x_1^3 + x_2^3; x_1^4 + x_2^4$

b. $x_1^2 \cdot x_2^3 + x_1^3 \cdot x_2^2; |x_1 - x_2|$

Giải

Trước hết ta có $\Delta = 17 > 0$, nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Áp dụng hệ thức Viet ta có: $S = x_1 + x_2 = -5$; $P = x_1 \cdot x_2 = 2$.

a. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = S^2 - 2P = 25 - 4 = 21$.

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2 \right] \\ = S(S^2 - 3P) = -5(25 - 6) = -95$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = 21^2 - 8 = 433.$$

b. $x_1^2 \cdot x_2^3 + x_1^3 \cdot x_2^2 = x_1^2 \cdot x_2^2 (x_1 + x_2) = P^2 S = -20$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{S^2 - 4P} = \sqrt{17}$$

Chú ý : Nếu bạn đọc tính trực tiếp x_1, x_2 rồi thay vào các biểu thức cần tính, chúng ta cũng có đáp số tương tự, nhưng việc tính toán sẽ phức tạp hơn nhiều.

Ví dụ 2: Cho $f(x) = 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3$. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của $f(x)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = |x_1 \cdot x_2 - 2x_1 - 2x_2|$.

Giải

Ta có: $f(x) = 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)(-m-5) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1$$

Áp dụng hệ thức Viet ta có :

$$S = x_1 + x_2 = -m - 1; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2 + 4m + 3}{2}.$$

$$\text{Do đó } A = |x_1 \cdot x_2 - 2x_1 - 2x_2| = \left| \frac{m^2 + 4m + 3}{2} + 2m + 2 \right| = \left| \frac{m^2 + 8m + 7}{2} \right|$$

Ta có : $m^2 + 8m + 7 = (m+1)(m+7)$, nên với điều kiện $-5 \leq m \leq -1$, thì

$$m^2 + 8m + 7 \leq 0 \Rightarrow A = \frac{-m^2 - 8m - 7}{2} = \frac{9 - (m+4)^2}{2} \leq \frac{9}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = -4$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là $\frac{9}{2}$.

Chú ý : Nếu chúng ta không đặt điều kiện $\Delta \geq 0$ thì việc khử dấu giá trị tuyệt đối trong bài này tương đối phức tạp.

Ví dụ 3 : Tìm m để phương trình $3x^2 + 4(m-1)x + m^2 - 4m + 1 = 0$, có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

ABC

Giải

Trước hết, ta phải tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 \text{ khác không, tức là } \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \Delta' = 4(m-1)^2 - 3(m^2 - 4m + 1) = m^2 + 4m + 1 = (m+2)^2 - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 \geq 3 \Leftrightarrow |m+2| \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 + \sqrt{3} \\ m < -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}(m^2 - 4m + 1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2) \left(\frac{1}{x_1 \cdot x_2} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

$$\text{Áp dụng hệ thức Viet ta có: } S = x_1 + x_2 = \frac{4(m-1)}{3}; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2 - 4m + 1}{3},$$

thế vào biểu thức sau, ta có:

$$(x_1 + x_2) \left(\frac{1}{x_1 \cdot x_2} - \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(m-1)}{3} \left[\frac{3}{m^2 - 4m + 1} - \frac{1}{2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m-1)(m^2 - 4m - 5)}{3(m^2 - 4m + 1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1. \text{ Kết hợp với các điều kiện ở} \\ m = 5 \end{cases}$$

trên ta có $m = 1; m = 5$.

Ví dụ 4: Cho phương trình $x^2 - mx - \frac{1}{m^2} = 0$. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x_1^4 + x_2^4$ và nêu rõ khi đó m lấy giá trị nào.

Giải

Từ phương trình đã cho, ta có $a \cdot c = -\frac{1}{m^2} < 0$, nên phương trình đã cho luôn có nghiệm. Áp dụng hệ thức Viet, ta có

$$x_1 + x_2 = m; \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{m^2} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = m^2 + \frac{1}{m^2}$$

$$\text{Và } x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2 \cdot (x_1 \cdot x_2)^2 = \left(\frac{m^4 + 2}{m^2} \right)^2 - \frac{2}{m^4} = \frac{m^8 + 4m^4 + 2}{m^4}.$$

$$\text{Đặt } S = x_1^4 + x_2^4 = \frac{m^8 + 4m^4 + 2}{m^4}, \text{ và đặt } t = m^4 \Rightarrow t > 0.$$

Từ đó ta có $S = \frac{t^2 + 4t + 2}{t}$ với $t > 0$. Ta biến đổi

$$S = \frac{t^2 - 2\sqrt{2}t + 2 + (4 + 2\sqrt{2})t}{t} = \frac{(t - \sqrt{2})^2}{t} + 4 + 2\sqrt{2}.$$

Do $t > 0$, nên $S \geq 4 + 2\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = \sqrt{2} \Rightarrow m = \pm\sqrt[4]{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S = 4 + 2\sqrt{2}$ khi $m = \pm\sqrt[4]{2}$.

c. Hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc m

Giải

Trước hết, ta phải tìm điều kiện để phương trình có nghiệm. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 \geq 0 \Leftrightarrow (m - 4)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |m - 4| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình, áp dụng hệ thức Viet

$$S = x_1 + x_2 = m \quad (1); P = x_1 \cdot x_2 = 2m - 3 \quad (2)$$

Cách 1: Thế m từ hệ thức (1) vào hệ thức (2) ta có $x_1 \cdot x_2 = 2(x_1 + x_2) - 3 = 0$.

Cách 2: Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 = m & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 3 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_1 + x_2) = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 3 \end{cases}$

Trừ vế theo vế ta có $x_1 \cdot x_2 = 2(x_1 + x_2) - 3 = 0$.

Ví dụ 2: Cho phương trình $mx^2 - (2m + 3)x + m - 4 = 0$.

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc m .

Giải

a. Phương trình: $mx^2 - (2m + 3)x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (2m + 3)^2 - 4m(m - 4) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 28m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{9}{28} \end{cases}$$

b. Với điều kiện phương trình có nghiệm ở trên, áp dụng hệ thức Viet:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{2m + 3}{m} = 2 + \frac{3}{m} \quad (1); P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m - 4}{m} = 1 - \frac{4}{m} \quad (2)$$

ABC

Nhân hai vế của (1) với 4 và nhân hai vế của (2) với 3 ta được

$$\begin{cases} 4(x_1 + x_2) = 8 + \frac{12}{m} \\ 3x_1 \cdot x_2 = 3 - \frac{12}{m} \end{cases} \text{ . Cộng vế theo vế ta có } 4(x_1 + x_2) + 3x_1 \cdot x_2 = 11$$

d. Điều kiện để hai nghiệm liên hệ với nhau bởi một hệ thức cho trước

Ví dụ 1 : Cho phương trình: $mx^2 - 2mx + 1 = 0$ (m là tham số).

a. Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm và tính các nghiệm của phương trình theo m .

b. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm sao cho một nghiệm gấp đôi nghiệm kia.

Giải

a. + Nếu $m = 0$ thì phương trình trở thành $1 = 0$, nên phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m \neq 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm khi:

$\Delta' = m^2 - m = m(m - 1) \geq 0$. Suy ra $m < 0$ hoặc $m \geq 1$ (*). Khi đó các

nghiệm của phương trình là: $x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - m}}{m}$; $x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - m}}{m}$.

b. Với điều kiện (*), phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

Theo hệ thức Viet: $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1 x_2 = \frac{1}{m}$.

Theo giả thiết, ta có: $x_1 = 2x_2$ (hoặc $x_2 = 2x_1$), suy ra $x_1 = \frac{4}{3}$; $x_2 = \frac{2}{3}$

(hoặc $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{4}{3}$). Suy ra: $x_1 x_2 = \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{8}{9} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = \frac{9}{8} > 1$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy với $m = \frac{9}{8}$ thì phương trình có một nghiệm gấp đôi nghiệm kia.

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình $x^2 + (4m + 1)x + 2(m - 4) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $|x_1 - x_2| = 17$.

Giải

Ta có $\Delta = (4m + 1)^2 - 8(m - 4) = 16m^2 + 33 > 0$ với mọi m , nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Áp dụng hệ thức Viet, ta có:

$S = -4m - 1$ và $P = 2m - 8$. Do đó: $|x_1 - x_2| = 17$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 289 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 289 \Leftrightarrow (-4m - 1)^2 - 4(2m - 8) = 289$

$\Leftrightarrow 16m^2 + 33 = 289 \Leftrightarrow 16m^2 = 256 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Vậy m thỏa mãn điều kiện của bài toán $\Leftrightarrow m = \pm 4$.

Ví dụ 3 : Cho phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (m là tham số)

- Chứng minh phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt.
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên.

Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

Giải

- Chứng minh phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Cách 1: Ta có: $\Delta' = m^2 + 1 > 0$ với mọi m nên phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt.

Cách 2: Ta thấy với mọi m , a và c trái dấu nhau nên phương trình luôn có hai phân biệt.

- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

Theo trên ta có với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Khi đó ta có $S = x_1 + x_2 = 2m$ và $P = x_1x_2 = -1$.

$$\text{Do đó } x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow S^2 - 3P = 7 \Leftrightarrow (2m)^2 + 3 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1. \text{ Vậy giá trị } m \text{ để } x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \text{ là } m = \pm 1.$$

Ví dụ 4: Tìm m sao cho phương trình $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 = 2x_2$.

Giải

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 4(m^2 + 1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{4}.$$

Áp dụng hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + 1 & (2) \end{cases}$. Do $x_1 = 2x_2$ nên

$$\begin{cases} 3x_2 = 2m + 1 & (1) \\ 2x_2^2 = m^2 + 1 & (2) \end{cases} \text{ Từ phương trình (1) ta có } x_2 = \frac{2m + 1}{3}, \text{ thay vào (2)}$$

ta được

$$2\left(\frac{2m + 1}{3}\right)^2 = m^2 + 1 \Leftrightarrow 2(2m + 1)^2 = 9m^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 + 8m + 2 = 9m^2 + 9 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 7 \end{cases}$$

Vậy giá trị m sao cho phương trình $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 = 2x_2$ là $m = 1, m = 7$.

Ví dụ 5: Tìm m sao cho phương trình $mx^2 - 2(m - 1)x + 3(m - 2) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $x_1 + 2x_2 = 1$.

Giải

Phương trình: $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2m^2 - 4m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{2-\sqrt{6}}{2} < m < \frac{2+\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức Viet ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases}$$

Do $x_1 = 1 - 2x_2$ nên

$$\begin{cases} 1 - x_2 = \frac{2(m-1)}{m} & (1) \\ (1 - 2x_2) \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có: $x_2 = 1 - \frac{2(m-1)}{m} = \frac{2-m}{m}$, thay vào (2) ta được

$$\left[1 - \frac{2(2-m)}{m}\right] \cdot \frac{(2-m)}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \Leftrightarrow \frac{(2-m)}{m} \left[-\frac{2(2-m)}{m} + 4\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(2-m)(6m-4)}{m^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy giá trị m sao cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $x_1 + 2x_2 = 1$ là $m = 2; m = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 6: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ với m là tham số và x là ẩn số.

a. Giải phương trình khi $m = 1$

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

c. Với điều kiện của câu b hãy tìm m để biểu thức $A = x_1x_2 - x_1 - x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ (1)

a. Khi $m = 1$ thì phương trình (1) trở thành:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

b. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

c. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $m > 1$. Áp dụng định lý Viet, ta có: $S = x_1 + x_2 = 2m$ và $P = x_1 \cdot x_2 = m^2 - m + 1$

$$\text{Do đó : } A = P - S = m^2 - m + 1 - 2m = m^2 - 3m + 1 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $m > 1$)

Vậy khi $m = \frac{3}{2}$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất là $-\frac{5}{4}$.

Ví dụ 7: Cho phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m - 3 = 0$ (1).

a. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

b. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$$

Giải

a. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm;

* Xét trường hợp $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $-2x-4=0 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=-2$. Vậy khi $m=-1$ thì phương trình (1) có nghiệm $x=-2$.

* Xét trường hợp $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$, ta có:

$$\Delta' = (m+2)^2 - (m+1)(m-3) = m^2 + 4m + 4 - m^2 + 2m + 3 = 6m + 7$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 6m + 7 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{6}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -\frac{7}{6}$.

b. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$. Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

x_1, x_2 thì $m \geq -\frac{7}{6}; m \neq -1$.

$$\text{Áp dụng hệ thức Viet ta có } S = x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m+1}; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m+1}.$$

Do đó, từ giả thiết ta có;

$$(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18 \Leftrightarrow 16x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 + 1 = 18$$

$$\Leftrightarrow 16x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) - 17 = 0 \Rightarrow \frac{16(m-3)}{m+1} + \frac{8(m+2)}{m+1} - 17 = 0$$

$$16(m-3) + 8(m+2) - 17(m+1) = 0 \Leftrightarrow 7m = 49 \Leftrightarrow m = 7.$$

Ta thấy $m = 7$ thỏa mãn điều kiện $m \geq -\frac{7}{6}; m \neq -1$.

ABC

Vậy giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$ là $m = 7$.

e. Xác định dấu các nghiệm số

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m + 5)x + m^2 - 4m + 47 = 0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 3.

Giải

$$x^2 - 2(m + 5)x + m^2 - 4m + 47 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + 6x - 9 - 2(m + 5)x + m^2 - 4m + 47 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 - 2(m + 2)(x - 3) + m^2 - 10m + 26 = 0$$

Đặt $t = x - 3$, bài toán trở thành: Tìm m để phương trình sau đây có hai nghiệm dương phân biệt: $t^2 - 2(m + 2)t + (m^2 - 10m + 26) = 0$

$$\text{Nhu vậy ta phải có: } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14m - 22 > 0 \\ m^2 - 10m + 26 > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{4}{7}.$$

Ví dụ 2: Cho phương trình: $x^2 + \sqrt{2}mx - m^2 + m - 1 = 0$ (1).

- Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị m .
Xác định dấu các nghiệm số của phương trình.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

- Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị m .
Xác định dấu các nghiệm số của phương trình.

Ta có hệ số $a = 1 > 0$, $c = -m^2 + m - 1 = -(m - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} < 0$, từ đó suy

ra $ac < 0$, nên phương trình đã cho có nghiệm và hai nghiệm của phương trình trái dấu nhau.

- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Do phương trình đã cho luôn có nghiệm nên áp dụng hệ thức Viet ta có

$$S = x_1 + x_2 = -\sqrt{2}m; \quad P = x_1 \cdot x_2 = -m^2 + m - 1$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 2m^2 + 2m^2 - 2m + 2$$

$$= 4m^2 - 2m + 2 = (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $x_1^2 + x_2^2$ là $\frac{7}{4}$ khi $m = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 3: Tìm các giá trị của m để phương trình sau có ít nhất một nghiệm không âm: $x^2 + mx + (2m - 4) = 0$ (1)

Giải

Cách 1. $\Delta = m^2 - 4(2m - 4) = (m - 4)^2 \geq 0$, $P = 2m - 4$, $S = -m$.

Phương trình (1) có nghiệm với mọi m . Trước hết ta tìm điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm (phân biệt hoặc nghiệm kép) đều âm.

$$\text{Điều kiện đó là: } \begin{cases} P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4 > 0 \\ -m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Vậy điều kiện để phương trình (1) có ít nhất một nghiệm không âm là $m \leq 2$.

Cách 2: $\Delta = m^2 - 4(2m - 4) = (m - 4)^2 \geq 0$, $P = 2m - 4$, $S = -m$.

Nếu $P \leq 0$, tức là $m \leq 2$, thì phương trình (1) tồn tại nghiệm không âm.

Nếu $P > 0$ (đã có $\Delta \geq 0$) thì phương trình (1) có hai nghiệm cùng dấu. Để thỏa mãn đề bài, phải có $S > 0$. Giải điều kiện $P > 0$, $S > 0$ được $m > 2$ và $-m > 0$, không xảy ra. Kết luận: $m \leq 2$.

Cách 3: Giải phương trình (1): $\Delta = m^2 - 4(2m - 4) = (m - 4)^2 \geq 0$

$$\text{Ta có: } x_1 = \frac{-m - (m - 4)}{2} = 2 - m, x_2 = \frac{-m + (m - 4)}{2} = -2$$

Phải có $x_1 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Ví dụ 4: Tìm các giá trị của m để phương trình sau có ít nhất một nghiệm lớn hơn hay bằng 2: $x^2 + mx - 1 = 0$ (1)

Giải

Cách 1. Đặt $y = x - 2$. Thay $x = y + 2$ vào (1) và rút gọn ta được:

$$y^2 + (m + 4)y + (2m + 3) = 0. \quad (2)$$

Ta cần tìm m để phương trình (2) có ít nhất một nghiệm không âm.

$$\Delta = (m + 4)^2 - 4(2m + 3) = m^2 + 4 > 0, \quad P = 2m + 3, \quad S = -(m + 4)$$

Điều kiện để phương trình (2) có hai nghiệm (phân biệt hoặc nghiệm

$$\text{kép) đều âm là: } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3 > 0 \\ -(m + 4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m > -4 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2}.$$

Vậy với $m \leq -\frac{3}{2}$ thì (2) có ít nhất một nghiệm không âm, tức là (1) có ít nhất một nghiệm lớn hơn hay bằng 2.

Cách 2. Giải phương trình (1) được $x_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}$, $x_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}$

Ta thấy $x_1 > x_2$ nên chỉ cần tìm m để $x_1 \geq 2$.

Ta có: $\frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \geq 2$ khi và chỉ khi $\sqrt{m^2 + 4} \geq m + 4$ (3)

Nếu $m \leq -4$ thì (3) có vế trái dương, vế phải âm nên (3) đúng.

Nếu $m > -4$ thì (3) $\Leftrightarrow m^2 + 4 \geq m^2 + 8m + 16 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}$.

Ta được $-4 < m \leq -\frac{3}{2}$,

Gộp $m \neq -4$ và $-4 < m \leq -\frac{3}{2}$ ta được giá trị phải tìm của m là $m \leq -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 5: Tìm các giá trị của m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2: $3x^2 - 4x + 2(m-1) = 0$ (1)

Giải

Cách 1: Đặt $x - 2 = y$. Thay $x = y + 2$ vào (1) và rút gọn ta được:

$3y^2 + 8 + (2m + 2) = 0$ (2). Cần tìm m để phương trình (2) có hai nghiệm

âm phân biệt. Ta giải điều kiện $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 6m > 0 \\ 2m + 2 > 0 \\ -\frac{8}{3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{3}$.

Cách 2: Xét phương trình (1). Giải điều kiện:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \\ (x_2 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \end{cases} \begin{matrix} (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Giải (2) được $m < \frac{5}{3}$.

Giải (3): $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{3} - 2 \cdot \frac{4}{3} + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Giải (4): $x_1 + x_2 - 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} - 4 < 0$, luôn đúng. Vậy ta được $-1 < m < \frac{5}{3}$,

Cách 3: Giải phương trình (1): $\Delta' = 4 - 6(m-1) = 10 - 6m$.

Nếu $\Delta' > 0$ (tức là $m < \frac{5}{3}$) thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{10 - 6m}}{3}, x_2 = \frac{2 + \sqrt{10 - 6m}}{3}. \text{ Do } x_1 < x_2 \text{ nên điều kiện để}$$

phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 là:

$$x_2 < 2 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{10 - 6m} < 6 \Leftrightarrow \sqrt{10 - 6m} < 4 \Leftrightarrow 10 - 6m < 16 \Leftrightarrow m > -1.$$

Vậy ta được: $-1 < m < \frac{5}{3}$.

Dạng 3: Phương trình có chứa tham số

Ví dụ 1 : Cho phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m + 2)x + 1 = 0$.

- Tìm m để phương trình có nghiệm.
- Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải

- a. Xét $(m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$, thử trực tiếp ta thấy phương trình chỉ có nghiệm khi $m = 2$. Xét $(m^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ 4m + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > -2 \end{cases}.$$

Tóm lại phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m > -2$.

- b. Phương trình chỉ có thể có nghiệm duy nhất trong các trường hợp sau

Trường hợp 1: $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 2(m + 2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 \neq 0 \\ 4(m + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ m = -2 \end{cases}.$

Trường hợp này không xảy ra. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = 2$.

Ví dụ 2: Tìm a để phương trình $3|x| + 2ax = 3a - 1$ có nghiệm duy nhất.

Đề thi HSG lớp 9 tỉnh Phú Thọ năm 2003–2004

Giải

Từ phương trình đã cho $3|x| + 2ax = 3a - 1$ (1), ta có

+ Nếu $x \geq 0$ thì phương trình (1) $\Leftrightarrow 3x + 2ax = 3a - 1$

$$\Leftrightarrow x(2a + 3) = 3a - 1 \quad (2)$$

Với $a = -\frac{3}{2}$, ta có phương trình (2) vô nghiệm

Với $a \neq -\frac{3}{2}$, nghiệm của phương trình (2) là: $\frac{3a - 1}{2a + 3}$ và sẽ là nghiệm của

phương trình (1) nếu $\frac{3a - 1}{2a + 3} \geq 0$.

+ Nếu $x \leq 0$ thì phương trình (1) $\Leftrightarrow -3x + 2ax = 3a - 1$

$$\Leftrightarrow x(2a - 3) = 3a - 1.$$

Với $a = -\frac{3}{2}$, ta có phương trình (2) vô nghiệm

Với $a \neq -\frac{3}{2}$, ta có nghiệm của phương trình (2) là $x_2 = \frac{3a - 1}{2a - 3}$ và x_2 sẽ là

nghiệm của phương trình (1) nếu $\frac{3a - 1}{2a - 3} \leq 0$

+ Như vậy , phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1, x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3a-1}{2a+3} \cdot \frac{3a-1}{2a-3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3a-1)^2}{4a^2-9} \geq 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \text{ hoặc } a > \frac{3}{2} \text{ hoặc } a < -\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 3: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \leq 1$ với mọi $x \in \{-1; 1\}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = 4a^2 + 3b^2$.

Đề thi HSG lớp 9 tỉnh Phú Thọ năm 2003–2004

Giải

Từ điều kiện $|f(x)| \leq 1$, với mọi $x \in \{-1; 1\}$, ta có

$$|f(0) - f(1)| \leq 2 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 4; |f(0) - f(-1)| \leq 2 \Rightarrow (a-b)^2 \leq 4.$$

$$\text{Mặt khác } 4a^2 + 3b^2 = 2(a+b)^2 + 2(a-b)^2 - b^2 \leq 16$$

Vậy $4a^2 + 3b^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng 16, khi và chỉ khi: $(a; b; c)$ nhận giá trị là $(2; 0; -1)$ hoặc $(-2; 0; 1)$.

Ví dụ 4: Cho hai số a và b khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng

phương trình ẩn x sau luôn có nghiệm $(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a) = 0$

Đề thi TS lớp 10 tỉnh Bắc Giang năm 2003–2004

Giải

Ta có phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a) = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi một trong hai phương trình sau có nghiệm: $(x^2 + ax + b) = 0(1); (x^2 + bx + a) = 0(2)$.

Xét phương trình (1) ta có $\Delta_1 = a^2 - 4b$. Xét phương trình (2) ta có:

$$\Delta_2 = b^2 - 4a, \text{ từ đó suy ra}$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 - 4b + b^2 - 4a = a^2 + b^2 - 4(a+b).$$

$$\text{Mà } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(a+b) = ab, \text{ nên}$$

$\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 4(a+b) = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$. Do đó có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

Do đó phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a) = 0$ luôn luôn có nghiệm.

Ví dụ 5: Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$.

Đặt $M = \max \left\{ \left| \frac{b}{a} \right|, \left| \frac{c}{a} \right| \right\}$. Chứng minh rằng : $|x_0| \leq 1 + M$.

Giải

Nếu $|x_0| \leq 1$ thì hiển nhiên. Nếu $|x_0| > 1$: Ta có: $bx_0 + c = -ax_0^2$

Do đó: $|x_0|^2 = \left| \frac{b}{a} x_0 + \frac{c}{a} \right| \leq \left| \frac{b}{a} \right| |x_0| + \left| \frac{c}{a} \right| \leq M(|x_0| + 1)$

Suy ra: $|x_0|^2 - 1 \leq |x_0| \leq M(|x_0| + 1)$

Nên: $|x_0| - 1 \leq M$ Hay: $|x_0| \leq 1 + M$.

Bài tập vận dụng

1. Tìm k sao cho phương trình $3x^2 - (3k - 2)x - (3k + 1) = 0$, có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 - 5x_2 = 6$.
2. Cho phương trình $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$.
 - a. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
 - b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:
$$1 < x_1 < x_2 < 6.$$
 - c. Xác định m để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
3. Phân tích đa thức $A = x^4 + x^3 + 2(m - 1)x^2 + mx + m^2$ thành tích.
4. Giải phương trình: $x^2 - |x| - 20 = 0$.
5. Viết các phương trình bậc hai dạng $x^2 + px + q = 0$. Biết rằng, phương trình có nghiệm nguyên, các hệ số p, q đều là những số nguyên và $p + q + 1 = 2003$.
6. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 7 = 0$ (1)
 - a. Tìm m để phương trình có nghiệm kép
 - b. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm và nghiệm này gấp k lần nghiệm kia.
7. Cho phương trình $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2 = 0$ (1)
 - a. Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $(x_1^2 + x_2^2)$ nhỏ nhất.
 - b. Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 + 2x_2 = 4$.

8. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) và $cx^2 + bx + a = 0$ (2)

với $a \neq 0$ và $c \neq 0$.

- Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có 2 nghiệm dương thì phương trình (2) cũng có 2 nghiệm dương.
- Chứng minh rằng nếu phương trình (1) vô nghiệm thì phương trình (2) cũng vô nghiệm.
- Nếu phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu thì phương trình (2) cũng có 2 nghiệm trái dấu.

9. Giả sử phương trình $x^2 + 3x + 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 .

Chứng minh rằng: $\frac{x_1^2 + 2x_1}{(x_1 + 1)^2} + \frac{x_2^2 + 2x_2}{(x_2 + 1)^2} = -1$.

10. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x - m^4 + m^2 - 1 = 0$ (1)

- Giải phương trình với $m = 1$.
- Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).
Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = -x_1x_2 + 5$.

11. Cho phương trình $(x + 1)^4 - (m - 1)(x + 1)^2 - m^2 + m - 1 = 0$ (1)

- Giải phương trình với $m = -1$.
- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị tham số của m .
- Tìm các giá trị của m để $|x_1| + |x_2| = 2$.

(Đề thi vào lớp 10 trường Hà Nội – Amsterdam, 1998-1999)

12. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) ($a \neq 0$) và $cx^2 + bx + a = 0$ (2) ($c \neq 0$).

Biết rằng phương trình (1) có 2 nghiệm dương x_1, x_2 . Chứng minh rằng phương trình (2) cũng có 2 nghiệm dương; gọi 2 nghiệm đó là x_3, x_4 .
Chứng minh rằng: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$

13. Cho phương trình $x^2 - (m - 1)x - m^2 + m - 2 = 0$ (1)

- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu.
- Gọi 2 nghiệm của (1) là x_1, x_2 . Tìm m để $(x_1^2 + x_2^2)$ là nhỏ nhất.

14. Cho phương trình $2x^2 - 3mx - 2 = 0$.

- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị của m để $S = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị đó.

c. Tính $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$ theo m .

15. Cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ (1) và $cy^2 + by + a = 0$ (2)

a. Chứng minh rằng nếu α là nghiệm của phương trình (1) thì $\frac{1}{\alpha}$ là nghiệm của phương trình (2).

b. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1); y_1, y_2 là nghiệm của phương trình (2). Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$ khi a, b, c thay đổi.

16. Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ với m là tham số.

a. Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi $m \neq 1$.

b. Xác định giá trị của m để phương trình có tích 2 nghiệm bằng 5. Từ đó tính tổng 2 nghiệm của phương trình.

c. Tìm một hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm không phụ thuộc m .

d. Tìm m để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{5}{2} = 0$.

17. Cho phương trình $2x^2 - 2mx + m^2 - 2 = 0$.

a. Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt.

b. Giả sử phương trình có 2 nghiệm không âm. Tìm nghiệm dương lớn nhất của phương trình.

18. Tìm giá trị nguyên của a để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung: $2x^2 + (3a-1)x - 3 = 0$ (1); $6x^2 - (2a-3)x - 1 = 0$ (2)

19. Cho phương trình: $mx^2 - 6(m-1)x + 9(m-3) = 0$

Tìm giá trị của tham số m để 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$$

20. Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$

Tìm m để 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức: $3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$

21. Xác định tham số m sao cho phương trình:

$2x^2 - (3m+1)x + m^2 - m - 6 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu.

22. Cho phương trình: $x^2 + (2m-1)x - m = 0$. Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm m để: $A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$ có giá trị lớn nhất.

23. Cho phương trình: $x^2 - mx + m - 1 = 0$. Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$$

ABC

Hướng dẫn và đáp số

1. Điều kiện phương trình có nghiệm là $\Delta = (3k - 2)^2 + 4 \cdot 3(3k + 1)$
 $= 9k^2 - 12k + 4 + 24k + 12 = 9k^2 + 12k + 16 = (3k + 2)^2 + 12 > 0; \forall k.$

Áp dụng hệ thức Viet, ta có

$$x_1 + x_2 = \frac{3k - 2}{3} = k - \frac{2}{3}; \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{3k + 1}{3} = -k - \frac{1}{3}.$$

Theo giả thiết, ta có $3x_1 - 5x_2 = 6$, từ đây ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = k - \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5k}{8} + \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{3k}{8} - 1 \end{cases}.$$

Thế vào biểu thức $x_1 \cdot x_2 = -k - \frac{1}{3}$.

$$\text{Ta có } \left(\frac{5k}{8} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{3k}{8} - 1\right) = -k - \frac{1}{3} \Leftrightarrow k\left(k + \frac{32}{15}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{32}{15} \end{cases}.$$

$$\text{Khi } k = 0, \text{ phương trình trở thành: } 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Khi } k = -\frac{32}{15}, \text{ phương trình trở thành: } 3x^2 + 8,4x + 5,4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1,8 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Vậy giá trị k sao cho phương trình $3x^2 - (3k - 2)x - (3k + 1) = 0$, có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 - 5x_2 = 6$ là $k = 0; k = -\frac{32}{15}$.

2. Cho phương trình $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$.

- a. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } \Delta = (2m - 3)^2 - 4(m^2 - 3m) = 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 12m = 9 > 0, \forall m.$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

- b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$1 < x_1 < x_2 < 6.$$

$$\text{Do phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\text{Nên } x_1 = m - 3; x_2 = m.$$

Theo giả thiết $1 < x_1 < x_2 < 6$, do đó $1 < m - 3 < m < 6 \Leftrightarrow 4 < m < 6$.

Vậy m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$1 < x_1 < x_2 < 6 \text{ là } 4 < m < 6.$$

- c. Xác định m để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Do phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt, áp dụng hệ thức

$$\text{Viet, ta có } x_1 + x_2 = 2m - 3; \quad x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3m$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (2m - 3)^2 - 2(m^2 - 3m)$$

$$= 4m^2 - 12m + 9 - 2m^2 + 6m = 2m^2 - 6m + 9 = 2\left(m^2 - 3m + \frac{9}{2}\right)$$

$$= 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } m = \frac{3}{2}.$$

Vậy giá trị m để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là $m = \frac{3}{2}$.

3. $A = x^4 + x^3 + 2(m - 1)x^2 + mx + m^2$

Viết lại A thành tam thức theo m : $A = m^2 + (2x^2 + x)m + x^4 + x^3 - 2x^2$.

Ta tính được: $\Delta = 9x^2$. Vậy $A = 0$ có hai nghiệm: $m = -x^2 - 2x$ và $m = -x^2 + x$.

$$\text{Do đó: } A = (m + x^2 + 2x)(m + x^2 - x).$$

4. Phương trình $x^2 - |x| - 20 = 0$ tương đương với các hệ phương trình:

$$(1) \begin{cases} x^2 - x - 20 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} x^2 + x - 20 = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Hệ (1) có hai nghiệm là $x_1 = 5, x_2 = -4, x_2 = -4 < 0$ không thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$ nên bị loại. Vậy (1) chỉ có một nghiệm là: $x_1 = 5$.

Hệ (2) có hai nghiệm là $x_3 = 4, x_4 = -5, x_3 = 4 > 0$ không thỏa mãn điều kiện $x \leq 0$ nên bị loại. Vậy (2) chỉ có một nghiệm là: $x_4 = -5$.

Vậy, phương trình đã cho chỉ có hai nghiệm: $x_1 = 5, x_4 = -5$.

5. Giả sử phương trình $x^2 + px + q = 0$ có hai nghiệm nguyên x_1, x_2 . Theo định lý Viet, ta có: $x_1 + x_2 = -p; x_1 x_2 = q$

$$\text{Do đó } p + q + 1 = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 2003 \text{ hay } (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2003.$$

Vì 2003 là số nguyên tố, giả sử $x_1 > x_2$, ta nhận được:

$$+ x_1 - 1 = 2003 \Rightarrow x_1 = 2004; x_2 - 1 = 1 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$\Rightarrow p = -2006, q = 4008$$

$$+ x_1 - 1 = -1 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x_2 - 1 = -2003 \Rightarrow x_2 = -2002 \Rightarrow p = 2002, q = 0$$

Từ đó, ta có các phương trình bậc hai dạng $x^2 + px + q = 0$ thỏa mãn điều kiện bài toán: $x^2 - 2006x + 4008 = 0$; $x^2 + 2002x = 0$.

6. a. Phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0$.

$$\Delta' = (m+1)^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{7}.$$

b. Phương trình (1) có 2 nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \sqrt{7} - 1 \\ m \leq -\sqrt{7} - 1 \end{cases}$

Gọi 2 nghiệm của phương trình là x_1, x_2 . Phương trình (1) có nghiệm này gấp k lần nghiệm kia $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = kx_2 \\ x_2 = kx_1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = 0 \Leftrightarrow (k^2 + 1)x_1x_2 - k(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (k+1)^2 x_1x_2 - k(x_1 + x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow (k+1)^2 \cdot 7 - k[2(m+1)]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4k(m+1)^2 = 7 \cdot (k+1)^2 \quad (*)$$

Nếu $k \leq 0$ thì phương trình (*) vô nghiệm.

Nếu $k > 0$ thì phương trình (*) có 2 nghiệm là: $m = -1 \pm \sqrt{\frac{7(k+1)^2}{4k}}$

7. a. Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$$\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 + 2) = 4m - 7$$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4m - 7 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{7}{4}.$$

Có

$$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2m+1)^2 - 2(m^2 + 2) = 2m^2 + 4m - 3$$

$$m \geq \frac{7}{4} \Rightarrow A = 2m^2 + 4m - 3 \geq 2 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 + 4 \cdot \frac{7}{4} - 3 = \frac{81}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi $m = \frac{7}{4}$.

b. Với $m \geq \frac{7}{4}$ theo hệ thức Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 & (1') \\ x_1x_2 = m^2 + 2 & (2') \end{cases}$

Vậy ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 - 2m \\ x_1 = 2m + 1 - (3 - 2m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 - 2m \\ x_1 = 4m - 2 \end{cases}$$

Theo (2') ta có: $x_1 x_2 = m^2 + 2 \Leftrightarrow (3 - 2m)(4m - 2) = m^2 + 2$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 16m + 8 = 0 : \text{phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy không có giá trị m nào để (1) và (2) có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1 + 2x_2 = 4.$$

8. a. Phương trình (1) có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$

Ta có: $\Delta_{(1)} = \Delta_{(2)} = b^2 - 4ac \geq 0$

Suy ra phương trình (2) cũng có 2 nghiệm. Gọi $\alpha > 0, \beta > 0$ là 2 nghiệm của (1). Do $\alpha > 0$ là nghiệm của (1) nên $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0(*)$

Chia 2 vế của (*) cho α^2 , ta có: $a + b(\frac{1}{\alpha}) + c(\frac{1}{\alpha})^2 = 0$, suy ra $\frac{1}{\alpha}$ là nghiệm

của phương trình (2). Tương tự $\frac{1}{\beta}$ cũng là nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình (2) cũng có 2 nghiệm dương.

b. $\Delta_{(1)} = \Delta_{(2)} = b^2 - 4ac$. Nếu $\Delta_{(1)} < 0$ thì $\Delta_{(2)} < 0$, suy ra nếu phương trình (1) vô nghiệm thì (2) cũng vô nghiệm.

c. (1) có 2 nghiệm trái dấu nên $\frac{c}{a} < 0$, do đó $\frac{a}{c} < 0$, vậy (2) cũng có 2 nghiệm trái dấu (đpcm).

9. Do x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + 3x + 1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + 3x_1 + 1 = 0 \\ x_2^2 + 3x_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 + 1)^2 = -x_1 \text{ và } x_1^2 + 2x_1 = -(1 + x_1) \\ (x_2 + 1)^2 = -x_2 \text{ và } x_2^2 + 2x_2 = -(1 + x_2) \end{cases}$$

Theo Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$

$$\text{Vậy } \frac{x_1^2 + 2x_1}{(x_1 + 1)^2} \cdot \frac{x_2^2 + 2x_2}{(x_2 + 1)^2} = \frac{-(1 + x_1)}{-x_1} \cdot \frac{-(1 + x_2)}{-x_2} = \frac{1 + (x_1 + x_2) + x_1 x_2}{x_1 x_2}$$

$$= 1 - 3 + 1 = -1.$$

10. a. Học sinh tự giải.

b. Có $a = 1 > 0, c = -(m^4 - m^2 + 1) < 0$ suy ra $ac < 0$. Vậy (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị.

c. Do phương trình (1) luôn có 2 nghiệm x_1, x_2 nên theo Viét ta có:

$$x_1 x_2 = -m^4 + m^2 - 1.$$

$$\text{Suy ra } A = -x_1 x_2 + 5 = m^4 - m^2 + 1 + 5 = m^4 - m^2 + 6 = \left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 5\frac{3}{4} \geq 5\frac{3}{4}.$$

Vậy A nhỏ nhất bằng $5\frac{3}{4}$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } m^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

11. a. Đặt $(x+1)^2 = t, t \geq 0$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow t^2 - (m-1)t - m^2 + m - 1 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Với } m = -1, \text{ ta có: (1)} \Leftrightarrow t^2 + 2t - (-1)^2 - 1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 \\ x+1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

b. Trong phương trình (2) có $a = 1, c = -(m^2 - m + 1) < 0$ nên (2) có 2 nghiệm trái dấu $t_1 < 0 < t_2$. Vì vậy phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$$x_2 = \sqrt{t_2} - 1; x_1 = -\sqrt{t_2} - 1 \quad |x_1| + |x_2| = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{t_2} - 1| + |\sqrt{t_2} + 1| = 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq |1 - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_2} + 1| = 2. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:}$$

$$(1 - \sqrt{t_2})(1 + \sqrt{t_2}) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{t_2} \geq 0 \Leftrightarrow t_2 \leq 1. \quad t_2 \text{ là nghiệm dương của phương trình (2) nên: } t_2 = (m-1) + \sqrt{(m-1)^2 - 4(-m^2 + m - 1)} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5m^2 - 6m + 5} \leq 1 - (m-1) = 2 - m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 - 6m + 5 \leq (2-m)^2 \\ 2-m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 2m + 1 \leq 0 \\ m \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$12. \text{ Phương trình (1) có 2 nghiệm dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \geq 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Ta có: $\Delta_{(1)} = b^2 - 4ac = \Delta_{(2)} > 0$ do đó phương trình (2) cũng có 2 nghiệm.

Giả sử $x_1 > 0$ là nghiệm của (1). Thế thì: $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ (3)

Chia 2 vế của (3) cho x_1^2 , ta có: $\frac{ax_1^2}{x_1^2} + \frac{bx_1}{x_1^2} + \frac{c}{x_1^2} = 0$, tức là

$$a + b\left(\frac{1}{x_1}\right) + c\left(\frac{c}{x_1^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1} \text{ là nghiệm của (2).}$$

Tương tự $\frac{1}{x_2}$ cũng là nghiệm của (2), mà x_3, x_4 là nghiệm của (2).

Không mất tổng quát, giả sử: $x_3 = \frac{1}{x_1}, x_4 = \frac{1}{x_2}$

$$\text{Suy ra: } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \geq 4$$

(do $x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2$ với $x_1 > 0$ và $x_2 + \frac{1}{x_2} \geq 2$ với $x_2 > 0$).

$$13. a. \text{ Ta có: } \begin{cases} ac = 1 \cdot (-m^2 + m - 2) < 0 \\ \Delta = (m-1)^2 + 4(m^2 - m + 2) > 0 \quad \forall m \end{cases}$$

Do đó phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu.

$$b. \text{ Theo Viét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 \\ x_1 x_2 = -m^2 + m - 2 \end{cases}$$

$$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3m^2 - 4m + 5 = 3\left(m - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} \geq \frac{11}{3}, \quad \forall m$$

Vậy A nhỏ nhất $= \frac{11}{3}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$.

14. a. $ac = 2(-2) = -4 < 0$, phương trình luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m. Theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{3m}{2}$; $x_1 x_2 = -1$

$$b. S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{3m}{2}\right)^2 - 2(-1) = \frac{9m^2}{4} + 2 \geq 2$$

Vậy $\min S = 2$ khi $m = 0$.

$$c. \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 x_2)^3} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{(x_1 x_2)^3} = \frac{\left(\frac{3m}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{3m}{2}}{-1} = \frac{-9m(3m^2 + 4)}{8}$$

ABC

15. a. Từ giả thiết các phương trình (1) và (2) là phương trình bậc 2 nên $a \neq 0$, $c \neq 0$ do đó $x \neq 0$.

Ta có: $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2(c \cdot \frac{1}{x^2} + b \cdot \frac{1}{x} + a) = 0$. Vì vậy nếu $x = \alpha$ là nghiệm của (1) thì $\alpha \neq 0$ và $\frac{1}{\alpha}$ là nghiệm của phương trình (2).

- b. x_1, x_2 là nghiệm của (1) thì $\frac{1}{x_1} = y_1$; $\frac{1}{x_2} = y_2$ là nghiệm của (2)

$$\text{Vậy } M = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = (x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}) + (x_2^2 + \frac{1}{x_2^2}) \geq 2 + 2 = 4$$

Suy ra M nhỏ nhất là bằng 4.

- 16.a. Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình bậc hai: $m \neq 1$.

$$\Delta' = m^2 - (m-1)(m+1) = 1 > 0.$$

Vậy phương trình luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi $m \neq 1$.

$$\text{b. } x_1 x_2 = \frac{m+1}{m-1} = 5 \Rightarrow m = \frac{3}{2}; \quad x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 1} = 6$$

$$\text{c. Áp dụng định lý Viét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} & (1) \\ x_1 x_2 = \frac{m+1}{m-1} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} - 1 + 1 = \frac{2m - (m-1)}{m-1} + 1 = \frac{m+1}{m-1} + 1 = x_1 x_2 + 1$$

Vậy hệ thức phải tìm là: $x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 0$.

- d. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{5}{2} = 0$ (chú ý rằng trong phương trình đã cho không có nghiệm bằng 0)

$$\Leftrightarrow 2(x_1^2 + x_2^2) = -5x_1 x_2 \Leftrightarrow 2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = -5x_1 x_2$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 = -x_1 x_2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{4m^2}{(m-1)^2} = -\frac{m+1}{m-1} \Leftrightarrow 9m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{3}$$

17. a. Điều kiện:
$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ m > 0 \\ m^2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} < m < 2$$

b. Từ giả thiết có $\sqrt{2} \leq m \leq 2$

Ta có $x_1 = \frac{m - \sqrt{4 - m^2}}{2}$; $x_2 = \frac{m + \sqrt{4 - m^2}}{2}$. Dễ thấy $x_1 \leq x_2$

$$x_2^2 = \frac{1}{4}(m + \sqrt{4 - m^2})^2 = \frac{1}{4}(m^2 + 4 - m^2 + 2\sqrt{m^2(4 - m^2)})$$

Chú ý rằng $2\sqrt{m^2(4 - m^2)} \leq m^2 + 4 - m^2 = 4$ nên $x_2^2 \leq \frac{1}{4}(4 + 4) = 2$

Vì $x_2 > 0$ nên $x_2 \leq \sqrt{2}$.

Vậy nghiệm dương lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ khi $m = \sqrt{2}$.

18. Gọi x_0 là nghiệm chung của (1) và (2). Thay vào hai phương trình ta tính được: $(11a - 6)x_0 = 8$.

Với $a = \frac{6}{11}$, cả 2 phương trình (1) và (2) vô nghiệm.

Với $a \neq \frac{6}{11}$ thì $x_0 = \frac{8}{11a - 6}$.

Thay vào (1), rút gọn: $99a^2 - 164a - 68 = 0$. Nghiệm nguyên của phương trình này là $a = 2$.

Với $a = 2$: (1) tương đương với $2x^2 + 5x - 3 = 0$, nghiệm là $\frac{1}{2}$ và -3 .

(2) tương đương với $6x^2 - x - 1 = 0$, nghiệm là $\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{3}$.

Do đó (1) và (2) có nghiệm chung.

Kết luận: giá trị nguyên cần tìm của a là $a = 2$.

19. Bài toán: điều kiện để phương trình có 2 nghiệm x_1 và x_2 là:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = [3(m-1)]^2 - 9(m-3)m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 9(m^2 - 2m + 1) - 9m^2 + 27m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 9(m+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -1 \end{cases}$$

Theo hệ thức Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{6(m-1)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{9(m-3)}{m} \end{cases}$ và từ giả thiết: $x_1 + x_2 = x_1 x_2$

$$\text{suy ra: } \frac{6(m-1)}{m} = \frac{9(m-3)}{m} \Leftrightarrow 6(m-1) = 9(m-3)$$

$$\Leftrightarrow 6m - 6 = 9m - 27 \Leftrightarrow 3m = 21 \Leftrightarrow m = 7$$

(thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy với $m = 7$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức: $x_1 + x_2 = x_1 x_2$

20. Bài giải: điều kiện để phương trình có 2 nghiệm x_1 và x_2 là:

$$\Delta' = (2m+1)^2 - 4(m^2 + 2) \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m - 7 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{7}{4}. \text{ Theo hệ thức Viét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1 x_2 = m^2 + 2 \end{cases} \text{ và từ}$$

$$\text{giả thiết } 3x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0.$$

$$\text{Suy ra } 3(m^2 + 2) - 5(2m + 1) + 7 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 + 6 - 10m - 5 + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \text{ (thỏa mãn)} \\ m = \frac{4}{3} \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy với $m = 2$ thì phương trình có 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức:

$$3x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$$

21. Để phương trình có 2 nghiệm trái dấu thì

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (3m+1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m^2 - m - 6) \geq 0 \\ P = \frac{m^2 - m - 6}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-7)^2 \geq 0, \forall m \\ P = (m-3)(m+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 3. \text{ Vậy với } -2 < m < 3 \text{ thì phương}$$

trình có 2 nghiệm trái dấu

$$\text{22. Theo Viét } \begin{cases} x_1 + x_2 = -(2m-1) \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$$

$$\text{Theo đề bài: } A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2$$

$$= (2m-1)^2 + 8m = 4m^2 - 12m + 1 = (2m-3)^2 - 8 \geq -8$$

Suy ra $\min A = -8 \Leftrightarrow 2m - 3 = 0$ hay $m = \frac{3}{2}$

23. Ta có: theo hệ thức Viét thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \frac{2x_1 x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 x_2 + 1)} = \frac{2x_1 x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 + 2} = \frac{2(m - 1) + 3}{m^2 + 2} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}$$

Cách 1: thêm bớt để đưa về dạng như phân (*) đã hướng dẫn.

Ta biến đổi B như sau:
$$B = \frac{m^2 + 2 - (m^2 - 2m + 1)}{m^2 + 2} = 1 - \frac{(m - 1)^2}{m^2 + 2}$$

Vì $(m - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{(m - 1)^2}{m^2 + 2} \geq 0 \Rightarrow B \leq 1$

Vậy $\max B = 1 \Leftrightarrow m = 1$. Với cách thêm bớt khác ta lại có:

$$B = \frac{\frac{1}{2}m^2 + 2m + 1 - \frac{1}{2}m^2}{m^2 + 2} = \frac{\frac{1}{2}(m^2 + 4m + 4) - \frac{1}{2}(m^2 + 2)}{m^2 + 2} = \frac{(m + 2)^2}{2(m^2 + 2)} - \frac{1}{2}$$

Vì $(m + 2)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{(m + 2)^2}{2(m^2 + 2)} \geq 0 \Rightarrow B \geq -\frac{1}{2}$. Vậy $\min B = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2$

Cách 2: đưa về giải phương trình bậc 2 với ẩn là m và B là tham số, ta sẽ tìm điều kiện cho tham số B để phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

$$B = \frac{2m + 1}{m^2 + 2} \Leftrightarrow Bm^2 - 2m + 2B - 1 = 0 \quad (**)$$

Ta có: $\Delta = 1 - B(2B - 1) = 1 - 2B^2 + B$

Để phương trình (**) luôn có nghiệm với mọi m thì $\Delta \geq 0$

Hay $-2B^2 + B + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2B^2 - B - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (2B + 1)(B - 1) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2B + 1 \leq 0 \\ B - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \leq -\frac{1}{2} \\ B \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq B \leq 1$$

Vậy: $\max B = 1 \Leftrightarrow m = 1$; $\min B = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2$

Chương 3. Hệ phương trình

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số

Phương pháp giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp cộng đại số.

Cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

* Nhân các vế của hai phương trình với số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.

* Sử dụng quy tắc cộng đại số để thực hiện phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn số).

* Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Cách 2: Sử dụng phương pháp thế. Quy tắc thế

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương.

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

+ Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.

+ Giải hệ phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho. Nghiệm của hệ phương trình là cặp số (x, y) vừa tìm được.

Cách 3: Sử dụng phương pháp đồ thị.

Cách 4: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

Dạng 2: Hệ phương trình đối xứng loại 1: Nếu ta thay đổi vai trò của x, y thì từng phương trình vẫn không thay đổi.

Phương pháp giải: Đưa về hệ phương trình theo 2 biến mới là:
$$\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$$

với điều kiện $S^2 \geq 4P$

Dạng 3: Hệ phương trình đối xứng loại 2: Nếu ta thay đổi vai trò của x, y thì phương trình này chuyển thành phương trình kia.

Phương pháp giải: Trừ 2 phương trình với nhau để nhận được phương trình mới có dạng tích số

Chú ý hệ phương trình đối xứng loại 2 nếu có nghiệm thì có nghiệm (x_0, x_0) (tức là $x = y$). Nếu hệ phương trình có nghiệm (x, y) thì hệ phương trình cũng có nghiệm (y, x) .

Dạng 4: Hệ phương trình không mẫu mực

Dạng 5: Hệ phương trình có chứa tham số : Chuyển bài toán tìm điều kiện có nghiệm của hệ phương trình trở thành bài toán tìm điều kiện có nghiệm của phương trình (bằng phương pháp thế)

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 1 & (a) \\ 3x + 4y = -1 & (b) \end{cases}$

Giải

Cách 1: Sử dụng phương pháp thế

Từ phương trình (a) $\Rightarrow y = 1 - 2x$ (c). Thế phương trình (c) vào phương trình (b) ta được: $3x + 4(1 - 2x) = -1 \Leftrightarrow -5x = -5 \Leftrightarrow x = 1$.

Thế $x = 1$ vào phương trình (c) ta được $y = -1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1$ và $y = -1$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp cộng đại số

Hệ phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 4 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3 \cdot 1 + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x = 1; y = -1)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |x + 1| + \sqrt{y} = 5 \\ (x^2 + 2x + 1)y = 36 \end{cases}$

Giải

Điều kiện $y \geq 0$. Ta có $(x^2 + 2x + 1)y = 36 \Leftrightarrow |x + 1|\sqrt{y} = 6$

Đặt $u = |x + 1|$, $v = \sqrt{y}$ ($u \geq 0, v \geq 0$), ta có hệ phương trình $\begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6 \end{cases}$

Giải hệ phương trình, ta có: $u = 2, v = 3$ hoặc $u = 3, v = 2$

Trường hợp: $u = 2, v = 3$ có: $(x = 1; y = 9)$ hoặc $(x = -3; y = 9)$

Trường hợp: $u = 3, v = 2$ có: $(x = 2; y = 4)$ hoặc $(x = -4; y = 4)$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $(1; 9), (-3; 9), (2; 4), (-4; 4)$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y - 2) = (x + 2)(y - 4) \\ (x - 3)(2y + 7) = (2x - 7)(y + 3) \end{cases}$

Giải

$$\begin{cases} x(y - 2) = (x + 2)(y - 4) \\ (x - 3)(2y + 7) = (2x - 7)(y + 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy - 2x = xy + 2y - 4x - 8 \\ 2xy - 6y + 7x - 21 = 2xy - 7y + 6x - 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -4 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \\ xy(x+2)(y+2) = m \end{cases} \quad (1)$$

- a. Giải hệ phương trình khi $m = 24$
b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm

Giải

a. Khi $m = 24$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \\ xy(x+2)(y+2) = 24 \end{cases} \quad (2)$

Đặt $u = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1$ và $v = y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1 \geq -1$

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 11 \\ uv = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 8 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u = 8 \\ v = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 4 \\ (y+1)^2 = 9 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} (x+1)^2 = 9 \\ (y+1)^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 - 1 \\ y = \pm 3 - 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \pm 3 - 1 \\ y = \pm 2 - 1 \end{cases}$

Vậy khi $m = 24$ thì (A) có các nghiệm (x, y) là:

$(1; -2), (1; -4), (-3; -4), (2; 1), (2; -3), (-4; 1), (-4; -3)$

- b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm

Đặt $u = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$ và $v = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 \geq 0$

Ta được (1) trở thành:

$$\begin{cases} u + v = 13 \\ (u-1)(v-1) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 13 \\ uv - (u+v) + 1 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 13 \\ uv = m + 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow u, v$ lần lượt là các nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 13X + m + 12 = 0 \quad (3)$$

Do đó: (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm $X_1, X_2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 121 - 4m \geq 0 \\ m + 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{121}{4} \\ m \geq -12 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \leq m \leq \frac{121}{4}$$

Ví dụ 5. Cho hệ phương trình với tham số a :
$$\begin{cases} (a+1)x - y = a+1 \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

- a. Giải hệ phương trình với $a = 2$.
b. Giải và biện luận hệ phương trình.
c. Tìm các giá trị nguyên của a để hệ phương trình có nghiệm nguyên.
d. Tìm các giá trị nguyên của a để nghiệm của hệ phương trình thỏa mãn điều kiện $x + y$ nhỏ nhất.

Giải

a. $x = \frac{5}{4}; y = \frac{3}{4}$. (tự giải)

b. Rút y từ (1): $y = (a + 1)x - (a + 1)$. Thay vào (2) được:

$$x + (a^2 - 1)x - (a^2 - 1) = 2 \Leftrightarrow a^2 x = a^2 + 1 \quad (3)$$

Nếu $a \neq 0$ thì $x = \frac{a^2 + 1}{a^2}$. Khi đó $y = \frac{a + 1}{a^2}$

Hệ có một nghiệm duy nhất $(\frac{a^2 + 1}{a^2}; \frac{a + 1}{a^2})$

Nếu $a = 0$ thì (3) là $0x = 1$, vô nghiệm. Hệ đã cho vô nghiệm

c. Điều kiện cần, ta phải có: $a^2 + 1 : a^2 \Rightarrow 1 : a^2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$.

Điều kiện đủ: với $a = 1$ thì $x = 2, y = 2$. Với $a = -1$ thì $x = 2, y = 0$.

Vậy các trị nguyên của a phải tìm là 1 và -1.

d. Ta có: $x + y = \frac{a^2 + a + 2}{a^2} = 1 + \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} (a \neq 0)$

Đặt $\frac{1}{a} = z$, ta có:

$$x + y = 1 + z + 2z^2 = 2(z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{16}) + \frac{7}{8} = 2(z + \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}$$

Vậy $\min(x + y) = \frac{7}{8}$ khi và chỉ khi $z = -\frac{1}{4}$, tức là $a = -4$

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37 \\ y^2 + z^2 + yz = 19 \\ z^2 + x^2 + zx = 28 \end{cases}$$

Giải

Để thỏa mãn hệ phương trình x, y, z phải phân biệt nhau từng đôi một. Nhân các vế của ba phương trình lần lượt cho $x - y, y - z, z - x$ rồi cộng

lại ta được:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 37(x - y) \\ y^3 - z^3 = 19(y - z) \\ z^3 - x^3 = 28(z - x) \end{cases}$$

Từ hệ trên ta có $x - 2y + z = 0 \Rightarrow z = 2y - x$, thay vào các phương trình

thứ hai, thứ ba của hệ phương trình thì được:
$$\begin{cases} 7y^2 + x^2 - 5xy = 19 \\ 4y^2 + x^2 - 2xy = 28 \end{cases}$$

ABC

Đặt $y = tx$ ta có
$$\begin{cases} x^2(7t^2 - 5t + 1) = 19 \\ x^2(4t^2 - 2t + 1) = 28 \end{cases}$$

Suy ra $\frac{7t^2 - 5t + 1}{19} = \frac{4t^2 - 2t + 1}{28} \Leftrightarrow 40t^2 - 34t + 3 = 0$, từ đó $t = \frac{3}{4}$ hay $t = \frac{1}{10}$.

* Thay $t = \frac{3}{4}$, ta tính được $x = 4$ hay $x = -4$, các giá trị nghiệm tương ứng là $(x; y; z) = (4; 3; 2)$ và $(x; y; z) = (-4; -3; -2)$.

* Thay $t = \frac{1}{10}$, ta tìm được các nghiệm: $(x; y; z) = (\frac{10}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{8}{\sqrt{3}})$ và $(x; y; z) = (-\frac{10}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{8}{\sqrt{3}})$.

Ví dụ 7: Cho các đường thẳng: $2x - 3y = 4$ (d); $3x + 5y = 2$ (d')

Tìm trên trục Ox điểm có hoành độ là số nguyên dương nhỏ nhất, sao cho nếu qua điểm đó ta dựng đường vuông góc với Ox thì đường vuông góc ấy cắt các đường thẳng d và d' theo thứ tự tại A(a; b) và B(a; c), trong đó b, c là các số nguyên.

Giải

Gọi tọa độ của điểm phải tìm là (a; 0) với a là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho đường thẳng $x = a$ cắt các đường thẳng d và d' theo thứ tự tại A(a; b) và B(a; c), trong đó b, c là các số nguyên.

Như vậy cần tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho có các số nguyên b

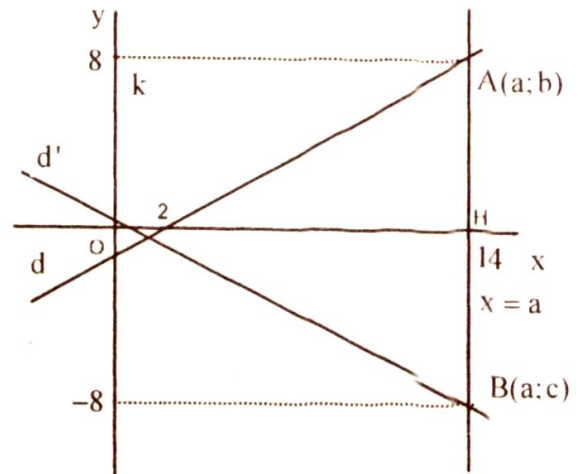
và c thỏa mãn
$$\begin{cases} 2a - 3b = 4 \\ 3a + 5c = 2 \end{cases}$$

Khử a ta được
$$\begin{cases} 6a - 9b = 12 \\ 6a + 10c = 4 \end{cases} \Rightarrow 9b + 10c = -8 \Rightarrow b = -1 - c + \frac{1-c}{9}b$$
 và c

thuộc $Z \Leftrightarrow \frac{1-c}{9} = k$ (k nguyên) hay $c = -9k + 1$. Từ đó tính được

$b = 10k - 2$ và $a = 15k - 1$. Để a là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn $a = 15k - 1$, ta chọn $k = 1$, khi đó $a = 14$, $b = 8$, $c = -8$.

Điểm phải tìm trên Ox là H(14; 0), đường thẳng $x = 14$ cắt d và d' theo thứ tự tại A(14; 8) và B(14; -8).



Giải

Từ hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ xy + x^2 = 2 \end{cases}$$

Suy ra $xy + x^2 = 4x^2 - 2y^2 \Leftrightarrow 3x^2 - xy - 2y^2 = 0 \quad (1)$

* Nếu $y = 0$ ta thu được:
$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ x^2 = 2 \end{cases}$$
 hệ phương trình này vô nghiệm.

* Nếu $y \neq 0$, ta có: $(1) \Leftrightarrow 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right) = 1 \\ \left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{2}{3} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:
$$\begin{cases} x = y \\ 2x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ 2x^2 - y^2 = 1 \end{cases}.$$

Hệ phương trình sau vô nghiệm, còn hệ phương trình đầu cho ta:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ x + yz + z = 3 \\ z + zx + x = 7 \end{cases}$$

Giải

Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 2 \\ (y+1)(z+1) = 4 \\ (z+1)(x+1) = 8 \end{cases} \quad (*)$$

Nhân ba phương trình lại ta được $[(x+1)(y+1)(z+1)]^2 = 64$

1) $(x+1)(y+1)(z+1) = 8$. Kết hợp với (*) suy ra nghiệm:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

2) $(x+1)(y+1)(z+1) = -8$. Kết hợp với (*) suy ra nghiệm
$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = -5 \end{cases}$$

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = 2 \end{cases}$$

Giải

Đặt $X = \frac{1}{x}$; $Y = \frac{1}{y}$ ($x > 0$; $y > 0$). Ta có: $\sqrt{X} + \sqrt{2 - Y} = \sqrt{Y} + \sqrt{2 - X}$.

Nhận thấy:

* Nếu $X > Y$ thì $\sqrt{X} + \sqrt{2 - Y} > \sqrt{Y} + \sqrt{2 - X}$.

* Nếu $X < Y$ thì $\sqrt{X} + \sqrt{2 - Y} < \sqrt{Y} + \sqrt{2 - X}$. Vậy phải có $X = Y$.

Với $X = Y$, ta có: $\sqrt{X} + \sqrt{2 - X} = 2 \Leftrightarrow X + (2 - X) + 2\sqrt{X(2 - X)} = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{X(2 - X)} = 1 \Leftrightarrow X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \Leftrightarrow X = Y = 1$$

Từ đó $x = y = 1$.

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1 \\ y - \sqrt{z} = 1 \\ z - \sqrt{x} = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y} + 1 \\ y = \sqrt{z} + 1 \\ z = \sqrt{x} + 1 \end{cases} \text{ Điều kiện } x, y, z \geq 1. \text{ Giả sử } x, y, z \text{ là một nghiệm với}$$

x bé nhất trong ba số (các trường hợp khác tương tự).

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x \leq y \\ x \leq z \end{cases} \Rightarrow y \leq z \Rightarrow z \leq x \Rightarrow z \leq y \Rightarrow x = y = z.$$

Với $x = y$ ta có: $x = \sqrt{x} + 1$, suy ra $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ($x \geq 1$), từ đó:

$$x = y = z = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 12: Phân tích $a^2 - 2b^2 + 3b - 3a + ab$ thành nhân tử, rồi áp dụng để giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - 15xy + 4y^2 - 12x + 45y - 24 = 0 \\ x^2 - 2y + 3y - 3x + xy = 0 \end{cases}$$

Giải

$$a^2 - 2b^2 + 3b - 3a + ab = (a - b)(a + 2b - 3).$$

Áp dụng phân tích trên, từ phương trình thứ hai của hệ ta có :

$$(x - y)(x + 2y - 3) = 0, \text{ suy ra } y = x \text{ hay } x = 3 - 2y.$$

Nếu $x = y$, thay vào phương trình thứ nhất, ta được:

$$3x^2 - 11x + 8 = 0 \Rightarrow x = y = 1 \text{ hay } x = y = \frac{8}{3}.$$

Nếu $x = 3 - 2y$, thay vào phương trình thứ nhất, ta được:

$$y^2 = 1 \Rightarrow x = y = 1 \text{ hay } x = 6; y = -1.$$

Dạng 2: Hệ phương trình đối xứng loại 1

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = x^2 + y^2 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ (x + y)(x^2 + xy + y^2) = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x, y) là: $(0; 1)$ và $(1; 0)$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}$$

Giải

Đây là hệ phương trình đối xứng loại 1, biến đổi về dạng:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (x + y)^2 - xy = 7 \\ (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - xy = 7 \\ [(x + y)^2 - 2xy]^2 - x^2y^2 = 21 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - xy = 7 \\ [7 - xy]^2 - x^2y^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - xy = 7 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 3 \\ xy = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $\{(1; 2), (2; 1), (-1; -2), (-2; -1)\}$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x - y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x - y)^3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

Giải

Đặt $\begin{cases} x - y = u \\ xy = v \end{cases}$. Hệ phương trình (1) trở thành:

ABC

$$\begin{cases} u^2 - 3u + v = 0 \\ v = 2u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 - 3u = 0 \\ v = 2u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = x - y = 0 \\ v = xy = 0 \\ u = x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13 \end{cases} \quad (1)$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

Vậy ta có hệ phương trình có các nghiệm là:

$$(x, y) \in \{(1, 2); (1, -2); (-1, 2); (-1, -2); (2, 1); (2, -1); (-2, 1); (-2, -1)\}$$

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases} \quad (1)$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x + y) = 6 \\ xy + (x + y) = 5 \end{cases} \cdot \text{Đặt } \begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases} \Rightarrow \text{hệ phương trình đã cho}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} SP = 6 \\ S + P = 5 \end{cases} \quad (I) \Rightarrow S, P \text{ là 2 nghiệm của phương trình}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (I) \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \\ S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$$

Trong 2 nghiệm trên chỉ có nghiệm $S = 3, P = 2$ là phù hợp với bài toán
 Khi đó ta có x, y là 2 nghiệm của phương trình

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \Rightarrow (x, y) \in \{(1, 2); (2, 1)\}.$$

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$$

Giải

Đặt $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y} \Rightarrow$ hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 + b^2 - 4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ (a + b)^2 - 2ab = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b) = (2, 3) \\ (a, b) = (3, 2) \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ y + \frac{1}{y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 3 \\ y + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm (x, y) là:

$$\left(1; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right); \left(1; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; 1\right); \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; 1\right)$$

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x.y + y^2 = 19(x - y)^2 \\ x^2 - x.y + y^2 = 7(x - y) \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} x^2 + x.y + y^2 = 19(x - y)^2 \\ x^2 - x.y + y^2 = 7(x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 + 3xy = 19(x - y)^2 \\ (x - y)^2 + xy = 7(x - y) \end{cases}$$

Đặt $x - y = u$; $xy = v$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18u^2 = 3v \\ u^2 - 7u + v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6u^2 \\ u^2 - 7u + 6u^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6u^2 \\ u^2 - u = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 1 \\ v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 + y \\ xy = 6 \end{cases}$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$

ABC

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$$

Giải

Đặt $x + y = S$, $x \cdot y = P$, khi đó hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} S^2 - P = 4 \\ S + P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + S - 6 = 0 \\ P = 2 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = 2 \\ P_1 = 0 \end{cases} (1) \text{ hoặc } \begin{cases} S_2 = -3 \\ P_2 = 5 \end{cases} (2)$$

Với $S_1 = 2, P_1 = 0$ ta có
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} S_2 = -3 \\ P_2 = 5 \end{cases}$, ta có hệ phương trình đã cho vô nghiệm. Vậy hệ phương

trình có nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x + xy + y = -1 \end{cases}$$

Giải

Đặt $S = x + y$, $P = xy$; khi đó hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} S^2 - P = 3 \\ S + P = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + S - 2 = 0 \\ P = -(S + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = 1 \\ P_1 = -2 \end{cases} (1) \text{ hoặc } \begin{cases} S_2 = -2 \\ P_2 = 1 \end{cases} (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1. \text{ Vậy hệ phương trình đã cho có các}$$

nghiệm: $x = y = -1$; $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 30 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y) = 35 \end{cases} \quad (x \geq 0; y \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 30 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})((\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 3\sqrt{xy}) = 35 \end{cases}$$

Đặt $S = \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0$; $P = \sqrt{xy} \geq 0$, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} SP = 30 \\ S(S^2 - 3P) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = 30 \\ S^3 - 3SP = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = 30 \\ S^3 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$$

$\sqrt{x}$ và $\sqrt{y}$ là 2 nghiệm của phương trình: $X^2 - 5X + 6 = 0$.

Suy ra: $(\sqrt{x} = 2; \sqrt{y} = 3)$ hay $(\sqrt{x} = 3; \sqrt{y} = 2)$.

Dạng 3: Hệ phương trình đối xứng loại 2

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y = 8 \\ y^2 - 2x = 8 \end{cases}$$

Giải

Trừ vế theo vế, ta có :

$$(x^2 + 2y) - (y^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - y + 2) = 0$$

* Nếu $x + y = 0$, thay $y = -x$ vào phương trình đầu thì:

$x^2 - 2x = 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$. Giải ra : $x = 4$ hoặc $x = -2$. Trường hợp này hệ phương trình có hai nghiệm : $(x; y) = (4; -4)$ hoặc $(x; y) = (-2; 2)$

* Nếu $x - y + 2 = 0$, thay $y = x + 2$ vào phương trình đầu thì:

$$x^2 + 2(x + 2) = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0. \text{ Giải ra: } x = -1 - \sqrt{5}; x = -1 + \sqrt{5}$$

Trường hợp này hệ phương trình có hai nghiệm:

$$(x; y) = (-1 - \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}); (x; y) = (-1 + \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y & (1) \\ y^3 + 1 = 2x & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Từ hệ phương trình } \begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases} \text{ suy ra } x^3 - y^3 = 2(y - x)$$

$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy + 2) = 0 \Leftrightarrow y = x$. Thay vào phương trình (1) ta được: $x^3 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Vậy hệ phương trình có

nghiệm là: $(x = 1; y = 1), \left(x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$.

Dạng 4: Hệ phương trình dạng khác

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y} \right)^2 + \left(\frac{x}{y} \right)^3 = 12 \\ (xy)^2 + xy = 6 \end{cases}$$

ABC

Giải

Điều kiện $y \neq 0$.

Đặt $\frac{x}{y} = u, xy = v$ ta được

$$\begin{cases} u^2 + u^3 = 12 \\ v^2 + v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-2)(u^2 + 3u + 6) = 0 \\ v^2 + v - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 2 \\ v = -3 \end{cases}$$

$$\text{Với } u = 2, v = 2: \begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, x = 2 \\ y = -1, x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \text{ hệ phương trình này vô nghiệm.}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(2; 1)$ và $(-2; -1)$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - y\sqrt{x.y} = 36 \\ y^2 - x\sqrt{x.y} = 72 \end{cases}$$

Giải

Vế trái của các phương trình cần được phân tích ra thừa số. Vì vậy không thể không áp dụng định lý về căn của một tích. Hệ phương trình đã cho tương đương với tuyển của 2 hệ phương trình:

a)
$$\begin{cases} \sqrt{x}(\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}) = 36 \\ \sqrt{y}(\sqrt{y^3} - \sqrt{x^3}) = 72; x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$
 . Vì vế trái của các phương trình trái dấu

nhau hoặc có thể nhận giá trị 0 nên hệ phương trình trên không có nghiệm.

b)
$$\begin{cases} \sqrt{(-x)}(\sqrt{(-x)^3} + \sqrt{(-y)^3}) = 36 \\ \sqrt{(-y)}(\sqrt{(-y)^3} + \sqrt{(-x)^3}) = 72; x \leq 0; y \leq 0 \end{cases}$$

Từ đây $\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}} = \frac{1}{2}; \sqrt{-y} = 2\sqrt{-x}$, thay vào phương trình, ta nhận được $\sqrt{x^4} = 4$,

hay $x = -2$ (vì chỉ xét $x \leq 0$). Từ đây có $y = -8$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(-2; -8)$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6 \\ \sqrt[6]{(x+y)^3} \cdot (x-y)^2 = 8 \end{cases}$$

Giải

Vì $(x - y)^2 \geq 0$ cho nên việc chuyển $\sqrt[6]{(x + y)^3 \cdot (x - y)^2} = \sqrt[6]{(x + y)} \cdot \sqrt[6]{(x - y)^2}$ không thay đổi miền xác định của hệ phương trình. Với mọi số x, y trong miền xác định, ta có $\sqrt[6]{(x + y)^3} = \sqrt{x + y}$ (tức biến đổi này tương đương).

Tương tự, thoát nhìn có thể biến đổi: $\sqrt[6]{(x - y)^2} = \sqrt[3]{x - y}$. Nhưng thực ra, điều này không đúng với mọi x, y trong miền xác định mà chỉ đúng với $x \geq y$. Chính điều kiện này có thể làm mất nghiệm. Vì vậy, chúng ta phải

viết:
$$\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt[3]{x - y} = 6 \\ \sqrt{x + y} \cdot \sqrt[3]{x - y} = 8 \end{cases}$$
 và hệ phương trình này tương đương với tuyển

của hai hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ \sqrt{x + y} + \sqrt[3]{x - y} = 6 \\ \sqrt{x + y} \cdot \sqrt[3]{x - y} = 8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - y < 0 \\ \sqrt{x + y} + x - y = 6 \\ \sqrt{x + y} \cdot \sqrt[3]{x - y} = -8; \end{cases}$$

Ta giải từng hệ phương trình: a)
$$\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt[3]{x - y} = 6; x - y \geq 0 \\ \sqrt{x + y} \cdot \sqrt[3]{x - y} = 8 \end{cases}$$

Đặt: $\sqrt{x + y} = u, \sqrt[3]{x - y} = v$. Rõ ràng là $u \geq 0, v \geq 0$. Chúng ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} u + v = 6 \\ u \cdot v = 8 \end{cases}$$
. Hệ phương trình này có 2 nghiệm: $\begin{cases} u = 4 \\ v = 2 \end{cases}$ hoặc

$\begin{cases} u = 2 \\ v = 4 \end{cases}$ Hay $\begin{cases} \sqrt{x + y} = 4, \\ \sqrt[3]{x - y} = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \sqrt{x + y} = 2 \\ \sqrt[3]{x - y} = 4 \end{cases}$. Giải hai hệ phương trình này,

chúng ta nhận được 2 cặp giá trị x và y : $(12; 4)$ $(34; -30)$

b)
$$\begin{cases} x - y < 0 \\ \sqrt{x + y} + \sqrt[3]{x - y} = 6 \\ \sqrt{x + y} \cdot \sqrt[3]{x - y} = -8 \end{cases}$$
. Để giải hệ phương trình này, chúng ta sử dụng các

ký hiệu như ở phần a). Tuy nhiên, ở đây $u \geq 0, v < 0$.

Chúng ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} u + v = 6 \\ u \cdot v = -8 \end{cases}$$
. Nghiệm của hệ phương trình

này sẽ là các cặp số (u, v) : $(3 + \sqrt{17}; 3 - \sqrt{17})$, $(3 - \sqrt{17}; 3 + \sqrt{17})$.

Theo điều kiện, cặp số thứ 2 không thỏa mãn.

Khi đó, có thể viết:
$$\begin{cases} \sqrt{x + y} = 3 + \sqrt{17} \\ \sqrt[3]{x - y} = 3 - \sqrt{17} \end{cases}$$
. Giải hệ phương trình này, nghiệm

sẽ là cặp số: $(103 - 19\sqrt{17}; -77 + 25\sqrt{17})$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(103 - 19\sqrt{17}; -77 + 25\sqrt{17})$ $(12; 4)$, $(34; -30)$.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} & (1) \\ x+y = \sqrt{x+y+2} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-y}(1-\sqrt{x-y})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=y+1 \end{cases}$. Thay $x=y$ vào (2), giải

ra ta được: $x=y=1$. Thay $x=y+1$ vào (2), giải ra ta có: $x=\frac{3}{2}; y=\frac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện hệ phương trình có 2 nghiệm: $x=1; y=1$ và $x=\frac{3}{2}; y=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $xy \neq 0$. Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-y)(1+\frac{1}{xy})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ xy=-1 \end{cases}$

Trường hợp 1:
$$\begin{cases} x=y \\ 2y=x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x=x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ x=y=\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Trường hợp 2:
$$\begin{cases} xy=-1 \\ 2y=x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{x} \\ -\frac{2}{x}=x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{x} & (3) \\ x^4+x+2=0 & (4) \end{cases}$$

Ta chứng minh phương trình (4) vô nghiệm.

Cách 1. $x^4+x+2=(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}>0, \forall x$.

Cách 2. Đặt $f(x)=x^4+x+2 \Rightarrow f(x) \geq \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}) > 0$

Trường hợp này hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$(x; y) = (1; 1), (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}), (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} & (1) \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x \neq 0; y \neq 0$. Khi đó hệ phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(3xy + x + y) = 0 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} x = y \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} 3xy + x + y = 0 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \end{cases}$. Hệ phương trình này vô nghiệm, vì từ

(1) và (2) ta có $x, y > 0$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $x = y = 1$.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 13 \\ (x + y)(x^2 - y^2) = 25 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Cách 1: $\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 13 \\ (x + y)(x^2 - y^2) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 13 & (1) \\ (x - y)(x + y)^2 = 25 & (2) \end{cases}$

$$(2) - (1) \Rightarrow (x - y)2xy = 12 \quad (3); \quad (1) - (3) \Rightarrow (x - y)^3 = 1 \quad (4)$$

Do đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} (x - y)^3 = 1 \\ (x + y)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = \pm 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = (3; 2) \\ (x; y) = (-2; -3) \end{cases}$$

Cách 2: Hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - yx^2 - y^3 = 13 & (1) \\ x^3 - xy^2 + yx^2 - y^3 = 25 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 19 & [((2) + (1))/2] \\ xy(x - y) = 6 & [((2) - (1))/2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)[(x - y)^2 + 3xy] = 19 \\ xy(x - y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^3 + 3xy(x - y) = 19 \\ xy(x - y) = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ xy(x - y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ (y + 1)y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Giải

Điều kiện: $x \geq -1$, $y \geq 1$, $xy \geq 0$.

Đặt $t = \sqrt{xy}$ ($t \geq 0$).

Từ phương trình thứ nhất của hệ phương trình suy ra: $x + y = 3 + t$.

Bình phương hai vế của phương trình thứ hai ta có:

$$x + y + 2 + 2\sqrt{xy + x + y + 1} = 16 \quad (2).$$

Thay $xy = t^2$, $x + y = 3 + t$ vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} 3 + t + 2 + 2\sqrt{t^2 + 3 + t + 1} &= 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2 + t + 4} = 11 - t \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 11 \\ 4(t^2 + t + 4) = (11 - t)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 11 \\ 3t^2 + 26t - 105 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3. \end{aligned}$$

Với $t = 3$ ta có $x + y = 6$, $xy = 9$.

Suy ra nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (3; 3)$.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 2(4x + y) \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Thế (2) vào (1) ta có: $3(x^3 - y^3) = 6(4x + y)$

$$\Leftrightarrow 3(x^3 - y^3) = (x^2 - 3y^2)(4x + y) \Leftrightarrow x^3 + x^2y - 12xy^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 3y \text{ hay } x = -4y$$

* $x = 0 \Rightarrow -3y^2 = 6$ vô nghiệm.

* $x = 3y$ thay vào (2) có hệ phương trình hai nghiệm $(3; 1)$ và $(-3; -1)$.

* $x = -4y$ thay vào (2) hệ phương trình có nghiệm $\left(-4\sqrt{\frac{6}{13}}; \sqrt{\frac{6}{13}}\right)$ hay $\left(4\sqrt{\frac{6}{13}}; -\sqrt{\frac{6}{13}}\right)$.

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2 + 1) + y(y + x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (1)$

Giải

$$\text{Khi } y = 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ (x^2 + 1)(x - 2) = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình này vô nghiệm. Khi $y \neq 0$ chia hai phương trình cho y

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + y + x - 2 = 2 \\ \frac{x^2+1}{y}(y+x-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + y + x - 2 = 2 \\ (y+x-2)^2 - 2(y+x-2) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+x-2=1 \\ x^2+1=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$$

Cách khác: Thay y của phương trình sau vào phương trình đầu ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1+(x^2+1)(y+x-2)(y+x) = 4(x^2+1)(y+x-2) \\ (x^2+1)(y+x-2) = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+(y+x-2)(y+x) = 4(y+x-2) \\ (x^2+1)(y+x-2) = y \end{cases}$$

(chia 2 vế của phương trình đầu cho $1+x^2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+(y+x-2)(y+x-2+2) = 4(x^2+1)(y+x-2) \\ (x^2+1)(y+x-2) = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+x-2=1 \\ x^2+1=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$$

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 & (1) \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 & (2) \end{cases}. \text{ Từ (2) suy ra } x \neq 0, \text{ chia các vế cho } x^2 \text{ ta được:}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x} = 6 \\ \frac{1}{x^2} + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} \left(\frac{1}{x} + y \right) = 6 \\ \left(\frac{1}{x} + y \right)^2 - 2\frac{y}{x} = 5 \end{cases}. \text{ Đặt } \frac{y}{x} = u, \frac{1}{x} + y = v, \text{ ta được hệ}$$

$$\text{phương trình: } \begin{cases} uv = 6 \\ v^2 - 2u = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{v^2 - 5}{2} \\ \frac{v^2 - 5}{2} \cdot v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{v^2 - 5}{2} \\ v^3 - 5v - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (v-3)(v^2+3v+4) = 0 \Leftrightarrow v = 3, \text{ suy ra } u = 2.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + y = 3 \\ \frac{1}{x} \cdot y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \frac{1}{x} = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1; 2)$ hoặc $(\frac{1}{2}; 1)$

Ví dụ 12: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 & (1) \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) và (2) ta có:

$$2(x^2 + 2xy + 3y^2) = 9(2x^2 + 2xy + y^2) \Leftrightarrow 16x^2 + 14xy + 3y^2 = 0 \quad (3).$$

Để thấy $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình, do đó:

$$(3) \Leftrightarrow 16\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 14\left(\frac{x}{y}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{1}{2} \\ \frac{x}{y} = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

* $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -2x$. Thế vào (2) ta có $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Từ đó hệ phương trình có 2 nghiệm: $(1; -2), (-1; 2)$.

* $\frac{x}{y} = -\frac{3}{8} \Leftrightarrow y = -\frac{8}{3}x$. Thế vào (2) ta có: $x^2 = \frac{9}{17} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{17}}{17}$.

Từ đó hệ phương trình có hai nghiệm: $\left(\frac{3\sqrt{17}}{17}; -\frac{8\sqrt{17}}{17}\right); \left(-\frac{3\sqrt{17}}{17}; \frac{8\sqrt{17}}{17}\right)$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm tìm được ở trên.

Ví dụ 13: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+5} + \sqrt{y-2} = 7 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y+5} = 7 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq 2, y \geq 2$. Các vế đều ≥ 0 , bình phương các vế ta được:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3 + 2\sqrt{(x+5)(y-2)} = 49 \\ x + y + 3 + 2\sqrt{(x-2)(y+5)} = 49 \end{cases}$$

Trừ từng vế:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+5)(y-2)} &= \sqrt{(x-2)(y+5)} \Leftrightarrow (x+5)(y-2) = (x-2)(y+5) \\ \Leftrightarrow xy + 5y - 2x - 10 &= xy + 5x - 2y - 10 \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Thay vào một trong hai phương trình trên, ta có $2x + 3 + 2\sqrt{x^2 + 3x - 10} = 49$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x - 10} = 23 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 23 \\ x^2 + 3x - 10 = (23 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 11$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $x = y = 11$.

Ví dụ 14: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 & (1) \\ x^4 + y^4 = 1 & (2) \end{cases} \text{ . Từ phương trình (2) suy ra } -1 \leq x, y \leq 1 \quad (3)$$

+ Nếu $x < 0$: từ (1) $y^3 - 1 - x^3 > 1 \Rightarrow y > 1$, mâu thuẫn với (3). Vậy $0 \leq x \leq 1$, tương tự cũng có $0 \leq y \leq 1$. Trừ từng vế (1) và (2):

$$(x^3 - x^4) + (y^3 - y^4) = 0 \Leftrightarrow x^3(1 - x) + y^3(1 - y) = 0 \quad (4)$$

Do $0 \leq x, y \leq 1$ nên (4) tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3(1 - x) = 0 \\ y^3(1 - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x = y = 0), (x = y = 1), (x = 0, y = 1), (x = 1, y = 0)$$

Thử vào (5) chỉ lấy được: $(x = 0, y = 1)$ và $(x = 1, y = 0)$

Ví dụ 15: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Đặt: } u = \sqrt{x} \geq 0; v = \sqrt{y} \geq 0 \text{ ta có hệ phương trình: } \begin{cases} \sqrt{u^4 + v^4} + \sqrt{2}.u.v = 8\sqrt{2} \\ u + v = 4 \end{cases}$$

Đặt $S = u + v$; $P = u.v$ thì hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S = 4 \\ \sqrt{(S^2 - 2P)^2 - 2P^2} + \sqrt{2}.P = 8\sqrt{2} \end{cases} \quad (*) \text{ . Ta có :}$$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2P^2 - 64P + 256} + \sqrt{2}.P = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{P^2 - 32P + 128} = 8 - P$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P \leq 8 \\ P^2 - 32P + 128 = 64 - 16P + P^2 \end{cases} \Leftrightarrow P = 4 \text{ . Vậy: } \begin{cases} S = 4 \\ P = 4 \end{cases}$$

u, v là nghiệm của phương trình: $t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t_1 = t_2 = 2$

$$\Leftrightarrow u = v = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow x = y = 4 \text{ .}$$

Chú ý: Ta đã khử bớt căn thức nhờ đặt ẩn số phụ u, v . Mặt khác hệ đã cho là hệ đối xứng kiểu 1. Nên ta tính P để áp dụng hệ thức Viet. Các bạn có thể nhân hai vế của phương trình (1) với $\sqrt{2}$ và bình phương hai vế của phương trình (2) để dẫn đến $x = y$.

Ví dụ 16: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2 & (1) \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện để các căn thức có nghĩa:
$$\begin{cases} x \geq \sqrt{y} \\ y \geq \sqrt{x} \end{cases}$$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - y} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y} = 2 - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - y = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$$

Mặt khác: $(2) \Leftrightarrow 2y - 2\sqrt{y^2 - x} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{y^2 - x} = 2y - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{1}{2} \\ 4y^2 - 4y + 1 = 4y^2 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{1}{2} \\ 4x - 4y = -1 \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với:
$$\begin{cases} \sqrt{y} \leq x \leq 2 \\ y \geq \sqrt{x}; y \geq \frac{1}{2} \\ 4x - y = 4 \\ 4x - 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{12} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Chú ý: Với nhiều hệ phương trình, các bạn phải biến đổi các biểu thức vô tỉ để đưa các phương trình trong hệ phương trình về dạng đơn giản hơn, nhưng phải đặt điều kiện để phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm.

Ví dụ 17: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{17}{4} & (1) \\ x(x + y) + \sqrt{x^2 + xy + 4} = 52 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện để các căn thức ở (1) có nghĩa: $x^2 \geq y^2$

Các mẫu số khác không $\Leftrightarrow y \neq 0$. Vậy: $0 < y^2 \leq x^2$.

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \frac{(x + \sqrt{x^2 - y^2})^2}{x^2 - (x^2 - y^2)} + \frac{(x - \sqrt{x^2 - y^2})^2}{x^2 - (x^2 - y^2)} = \frac{17}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2x^2 - y^2)}{y^2} = \frac{17}{4} \Leftrightarrow 16x^2 - 8y^2 = 17y^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 = 25y^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{16}{25}x^2 \Leftrightarrow y = \pm \frac{4}{5}x$$

(Do $y^2 = \frac{16}{25}x^2$ nên thỏa mãn $x^2 \geq y^2$)

Trường hợp 1: $y = \frac{4}{5}x$ thay vào (2): $\frac{9}{5}x^2 + \sqrt{\frac{9}{5}x^2 + 4} = 52$

$$\text{Đặt } \frac{9}{5}x^2 = u \geq 0 \text{ ta có: } \sqrt{u+4} = 52-u \Leftrightarrow \begin{cases} u \leq 52 \\ u+4 = u^2 - 104u + 52^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u \leq 52 \\ u^2 - 105u + 2700 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = 45 \Leftrightarrow \frac{9}{5}x^2 = 45 \Leftrightarrow x = \pm 5$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}; \begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \end{cases}$$

Trường hợp 2: $y = -\frac{4}{5}x$ thay vào (2): $\frac{1}{5}x^2 + \sqrt{\frac{1}{5}x^2 + 4} = 52$.

$$\text{Đặt } \frac{1}{5}x^2 = u \geq 0, \text{ tương tự trường hợp 1 ta có: } u = 45$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}x^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 = 225 \Leftrightarrow x = \pm 15.$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} x = 15 \\ y = -12 \end{cases}; \begin{cases} x = -15 \\ y = 12 \end{cases}$$

Tóm lại hệ phương trình có bốn nghiệm:

$$(x; y) = \{(5; 4); (-5; -4); (15; -12); (-15; 12)\}$$

Chú ý: Ở thí dụ trên, ta đã sử dụng biểu thức căn liên hợp để khử căn thức ở mẫu.

Ví dụ 18: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 185 \\ (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 65 \end{cases}$$

Giải

Cộng từng vế của hai phương trình ta được:

$$2(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 250 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^3 = 125 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5$$

$$\text{Thay vào hệ phương trình: } \begin{cases} (25 + xy) \cdot 5 = 185 \\ (25 - xy) \cdot 5 = 65 \end{cases} \Leftrightarrow xy = 12.$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Dễ dàng giải hệ phương trình đối xứng này để dẫn tới nghiệm:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}; \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}; \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

Dạng 5: Hệ phương trình có chứa tham số

Ví dụ 1: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$$

Giải

Đặt $u = \sqrt{x}; v = \sqrt{y}$, $u \geq 0; v \geq 0$.

Hệ phương trình đã cho trở thành:
$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^3 + v^3 = 1 - 3m \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ uv = m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u, v$ là hai nghiệm của hệ phương trình: $t^2 - t + m = 0$ (**)

Hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) \Leftrightarrow$ hệ (*) có nghiệm $u \geq 0, v \geq 0 \Leftrightarrow$ Phương trình (**) có hai nghiệm t không âm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4m \geq 0 \\ S = 1 \geq 0 \\ P = m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{4}$$

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x^2 = m(y - 1) \\ xy + y^2 = m(x - 1) \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = -1$

b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất

Giải

Hệ phương trình tương đương với:
$$\begin{cases} xy + x^2 = m(y - 1) \\ x^2 - y^2 = m(y - x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = m(y - 1) \\ (x - y)(x + y + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - m(x - 1) = 0 \end{cases} & \text{(I)} \\ \begin{cases} y = -x - m \\ m^2 + m = 0 \end{cases} & \text{(II)} \end{cases}$$

a) Khi $m = -1$ hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} \begin{cases} x = y \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x - m \\ 0 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

b) (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - mx + m = 0 \end{cases} \quad (*)$ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm

duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 8 \end{cases}$

Khi $m = 0$ hệ phương trình (II) thỏa mãn với $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x \end{cases}$

Khi $m = 8$ hệ phương trình (II) vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 3: Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm $x > 0, y < 0$

$\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 15x - 3y = 3 \end{cases} \quad (*)$

Giải

Ta có:

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = m \\ 17x = m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+3}{17} \\ 3y = m - \frac{2(m+3)}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+3}{17} \\ 3y = \frac{15m-6}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+3}{17} \\ y = \frac{5m-2}{17} \end{cases}$

Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+3}{17} > 0 \\ \frac{5m-2}{17} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 0 \\ 5m-2 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m < \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < \frac{2}{5}$. Các giá trị trên của m làm hệ phương trình

đã cho có nghiệm $x > 0, y < 0$.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (a+1)x - y = 3 \\ ax + y = a \end{cases} \quad (*)$

a. Giải hệ phương trình với $a = -\sqrt{2}$.

b. Xác định giá trị của a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện $x + y > 0$.

Giải

a. Với $a = -\sqrt{2}$, được hệ phương trình: $\begin{cases} (-\sqrt{2} + 1)x - y = 3 \\ -\sqrt{2}x + y = a \end{cases}$

Giải ra được nghiệm $\left(\frac{3 - \sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2}}; \frac{2(1 + \sqrt{2})}{1 - 2\sqrt{2}} \right)$.

ABC

b. Cộng hai vế ta được: $(2a + 1)x = a + 3$ (1)

Hệ phương trình (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 2a + 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -\frac{1}{2}$. Xét $a \neq -\frac{1}{2}$, ta có (1) có nghiệm

$$x = \frac{a + 3}{2a + 1}. \text{ Từ đó } y = a - ax = a - a \cdot \frac{a + 3}{2a + 1} = \frac{a^2 - 2a}{2a + 1}$$

Vậy nếu $a \neq -\frac{1}{2}$ hệ có nghiệm duy nhất: $x = \frac{a + 3}{2a + 1}; y = \frac{a^2 - 2a}{2a + 1}$.

$$S = x + y = \frac{a^2 - a + 3}{2a + 1} = \frac{(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}}{2a + 1} > 0 \Leftrightarrow 2a + 1 > 0 \text{ hay } a > -\frac{1}{2}.$$

Bài tập vận dụng

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (1 - \frac{12}{y + 3x})\sqrt{x} = 2 \\ (1 + \frac{12}{y + 3x})\sqrt{y} = 6 \end{cases} \quad (I)$$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |2x - y| - 2|y - x| = 1 \\ 3|2x - y| + |x - y| = 10 \end{cases} \quad (1)$$

3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases}$$

4. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - y\sqrt{x \cdot y} = 36 \\ y^2 - x\sqrt{x \cdot y} = 72 \end{cases}$$

5. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3 - (y + 1)^2 = \sqrt{x - y} \\ x + 8y = \sqrt{x - y - 9} \end{cases}$$

6. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1 \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y - 2 \end{cases}$$

7. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 1 \\ x^9 + y^9 = x^4 + y^4 \end{cases}$$

8. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

9. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} (x - y)^2 y = 2 \\ x^3 - y^3 = 19 \end{cases}$$

10. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$$

11. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$$

12. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 \end{cases}$$

13. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x+2)(2x+y) = 9 \\ x^2 + 4x + y = 6 \end{cases}$$

14. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 1 - 2xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

15. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 4 \end{cases}$$

16. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 & (1) \\ 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

17. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy - 4 = 8 - y^2 \\ xy = 2 + x^2 \end{cases}$$

18. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (2x+y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(2x-y)^2 = 0 \\ 2x+y + \frac{1}{2x-y} = 3 \end{cases}$$

19. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + xy + y = 1 & (1) \\ y + yz + z = 4 & (2) \\ z + zx + x = 9 & (3) \end{cases}$$

20. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x + y + 2xy = 2 \end{cases}$$

21. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x+y+1) = 20 \\ y(x+y+1) = 10 \end{cases} \quad (1)$$

22. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 \\ y + xy^2 = -6x^2 \end{cases}$$

23. Giải các hệ phương trình:

a.
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1-x}{2y+1}} + \sqrt{\frac{2y+1}{1-x}} = 2 \\ x-y=1 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} |x-y| = |2y-1| \\ y+1=2x \end{cases}$$

24. Giải các hệ phương trình:

a.
$$\begin{cases} x+3y+z=-2 \\ x-y+2z=9 \\ z=3x \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 5 \end{cases}$$

25. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x-3y=2\sqrt{m}+6 \\ x-y=\sqrt{m}+2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số, } m \geq 0)$$

a. Giải hệ phương trình với $m=4$.

b. Giải hệ phương trình trên sao cho $x+y$ nhỏ nhất.

26. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x+ay=1 \\ -ax+y=a \end{cases}$$

a. Chứng minh hệ phương trình luôn luôn có nghiệm duy nhất với mọi a .

b. Tìm giá trị của a để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ sao cho $x < 1; y < 1$.

27. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (a+1)x-ay=5 \\ x+ay=a^2+4a \end{cases}$$
. Tìm giá trị của $a \in \mathbb{Z}$ sao cho hệ

phương trình có nghiệm $(x; y)$ với $x, y \in \mathbb{Z}$.

28. Giải các hệ phương trình:

a.
$$\begin{cases} y-2|x|+3=0 \\ |y|+x-3=0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5 \\ |x+1|=4y-4 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} |x+y|=1 \\ |x|+|y|=1 \end{cases}$$

29. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (a+1)x-y=3 \\ ax+y=a \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình khi $a=-\sqrt{2}$.

b. Xác định giá trị của a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện $x+y > 0$.

30. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x+my=1 & (1) \\ mx+2y=1 & (2) \end{cases}$$

a. Giải và biện luận theo tham số m .

b. Tìm số nguyên m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với x, y là các số nguyên.

c. Chứng minh rằng khi hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$, điểm $M(x; y)$ luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

31. Các số không âm x, y, z thỏa mãn hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x - 4y + 2z = 1 \\ 8x + 4y + z = 8 \end{cases}$$

a. Biểu thị x, y theo z .

b. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x + y - z$.

32. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ x + 2y + 4z = 8 & (2) \\ x + 3y + 9z = 27 & (3) \end{cases}$$

33. Cho hệ phương trình với tham số m :
$$\begin{cases} (m-1)x + y = 3m-4 \\ x + (m-1)y = m \end{cases}$$

a. Giải và biện luận hệ phương trình theo m .

b. Tìm các giá trị nguyên của m để nghiệm của hệ phương trình là các số nguyên.

c. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm dương duy nhất.

34. Các số không âm x, y, z thỏa mãn hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x - 4y + 2z = 1 \\ 8x + 4y + z = 8 \end{cases}$$

a. Biểu thị x và y theo z

b. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x + y - z$.

35. Tìm trên trục tung các điểm có tung độ là số nguyên, sao cho nếu qua điểm đó ta dựng đường vuông góc với trục tung thì đường vuông góc ấy cắt các đường thẳng $x + 2y = 6(d)$ và $2x - 3y = 4(d')$ tại các điểm có tọa độ là các số nguyên.

36. Tìm trên trục hoành các điểm có hoành độ là số nguyên sao cho nếu qua điểm đó ta dựng đường thẳng vuông góc với trục hoành thì đường vuông góc ấy cắt cả ba đường thẳng sau tại các điểm có tọa độ là các số nguyên. $x - 2y = 3(d_1)$, $x - 3y = 2(d_2)$, $x - 5y = -7(d_3)$.

Hướng dẫn và đáp số

1. Điều kiện : $x, y \geq 0$. Nhận xét với $x = 0, y = 0$ không phải là nghiệm của hệ phương trình (I).

$$\text{Hệ phương trình (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{12}{y+3x} = \frac{2}{\sqrt{x}} & (1) \\ 1 + \frac{12}{y+3x} = \frac{6}{\sqrt{y}} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Cộng vế theo vế ta được: } 1 = \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (3)$$

ABC

$$\text{Trừ vế theo vế ta được: } \frac{12}{y+3x} = \frac{3}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (4)$$

Nhân (3) và (4) vế theo vế ta được:

$$\frac{12}{y+3x} = \frac{9}{y} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow (3x-y)(9x+y) = 0 \Leftrightarrow 3x = y \quad (5)$$

Thay (5) vào (1) thu được $1 - \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$, đến đây giải ra ta được $x = 4 + 2\sqrt{3}$ suy ra $y = 12 + 6\sqrt{3}$. Thử lại đúng.

$$\text{Vậy ta có cặp nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ y = 12 + 6\sqrt{3} \end{cases}$$

Cách khác : Ngoài cách trên ta còn có cách khác:

Đặt $\frac{12}{3x+y} = a$. Ta có $(1-a)\sqrt{x} = 2$ do đó $0 < a < 1$.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{1-a} \Leftrightarrow x = \frac{4}{(1-a)^2}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{6}{1+a} \Leftrightarrow y = \frac{36}{(1+a)^2}.$$

Theo cách đặt a ta suy ra :

$$3x+y = \frac{12}{a} \Leftrightarrow \frac{12}{(1-a)^2} + \frac{36}{(1+a)^2} = \frac{12}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{(1-a)^2} + \frac{3}{(1+a)^2} = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 2a^2 - 4a + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} - 4(a + \frac{1}{a}) + 2 = 0.$$

Đặt : $t = a + \frac{1}{a}$ suy ra $|t| \geq 2$. Ta có : $t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$ dễ thấy $t = 0$ loại.

$$\text{Suy ra: } a + \frac{1}{a} = 4 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 + \sqrt{3} \\ a = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện ta được $a = 2 - \sqrt{3}$ thỏa mãn.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x = \frac{4}{(1-a)^2} = 4 + 2\sqrt{3} \\ y = \frac{36}{(1+a)^2} = 12 + 6\sqrt{3} \end{cases} . \text{ Thử lại đúng.}$$

$$2. (1) \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-y| - 2|y-x| = 1 \\ 6|2x-y| + 2|x-y| = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-y| = 3 \\ |x-y| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-y=-3 \\ x-y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-y=-3 \\ x-y=-1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4 \\ y=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm (x, y) là: $(2; 1)$, $(4; 5)$, $(-4; -5)$, $(-2; -1)$

$$3. \text{ Hệ phương trình: } \begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-x^2 + xy)^2 + x^3y = 1 \\ (-x^2 + xy) + x^3y = 1 \end{cases} \quad (I).$$

Đặt $u = -x^2 + xy$; $v = x^3y$.

$$\text{Hệ phương trình (I) thành } \begin{cases} u^2 + v = 1 \\ u + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -u + 1 \\ u^2 - u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \\ u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$$

Do đó hệ phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases} \begin{cases} -x^2 + xy = 0 \\ x^3y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} -x^2 + xy = 1 \\ x^3y = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = x \\ x^4 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = -1 \text{ (VN)} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

4. Vế trái của các phương trình cần được phân tích ra thừa số. Vì vậy không thể không áp dụng định lý về căn của một tích. Hệ phương trình đã cho tương đương với tuyển của 2 hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ \sqrt{x}(\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}) = 36 \\ \sqrt{y}(\sqrt{y^3} - \sqrt{x^3}) = 72 \end{cases} \text{ . Vì vế trái của các phương trình trái dấu nhau hoặc}$$

có thể nhận giá trị 0 nên hệ phương trình trên không có nghiệm.

ABC

$$b) \begin{cases} x \leq 0; y \leq 0 \\ \sqrt{(-x)}(\sqrt{(-x^3)} + \sqrt{(-y^3)}) = 36 \\ \sqrt{(-y)}(\sqrt{(-y^3)} + \sqrt{(-x)^3}) = 72 \end{cases} \text{ Từ đây } \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}} = \frac{1}{2}; \sqrt{-y} = 2\sqrt{-x}, \text{ thay vào}$$

phương trình, ta nhận được $\sqrt{x^4} = 4$, hay $x = -2$ (vì chỉ xét $x \leq 0$). Từ đây có $y = -8$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(-2; -8)$.

5. Ta viết phương trình thứ nhất của hệ phương trình thành:

$-(y+1)^2 = \sqrt{x-y} - 3 \Rightarrow \sqrt{x-y} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x-y \leq 9$ nhưng từ phương trình thứ 2 của hệ phương trình, ta có $x-y-9 \geq 0$ do đó $x-y=9 \Rightarrow x=y+9$. Thay vào phương trình 2 của hệ phương trình, sẽ được: $y+9+8y=0 \Rightarrow y=-1$ và ta được $x=y+9=8$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(8; -1)$

$$6. \begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1 \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=1 \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ \sqrt{2x}=2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x+y=2 \\ 2x^2-5x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

7. Phương trình $x^9 + y^9 = x^4 + y^4 \Leftrightarrow x^4(1-x^5) + y^4(1-y^5) = 0$

$$\text{Do } x^5 + y^5 = 1, \text{ ta có: } x^4 \cdot y^5 + y^4 \cdot x^5 = 0; x^4 y^4 (y+x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ y=-x \end{cases}$$

Với $y = -x \Rightarrow x^5 + y^5 = 0$ trái với phương trình $x^5 + y^5 = 1$ (loại).

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Với $y = 0 \Rightarrow x = 1$.

Hệ phương trình có 2 nghiệm $(0; 1)$ và $(1; 0)$.

8. Từ phương trình (1) suy ra $-1 \leq x, y \leq 1$. (3)

Từ hệ suy ra $(x^2 - x^3) + (y^2 - y^3) = 0$. Do (3) nên vế phải của (4) là tổng

của hai số hạng không âm vậy từ phương trình suy ra $\begin{cases} x^2 - x^3 = 0 \\ y^2 - y^3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x=0, y=0), (x=0, y=1), (x=1, y=0), (x=1, y=1)$. Thử lại ta thấy $(x=0, y=1), (x=1, y=0)$ là nghiệm của hệ phương trình.

9. Do $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình nên đặt $x = ty$ ta được:

$$\begin{cases} (t-1)^2 y^3 = 2 \\ (t^3-1)y^3 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)^2 y^3 = 2 & (3) \\ \frac{t^3-1}{(t-1)^2} = \frac{19}{2} & (4) \end{cases}$$

Giải phương trình (4) $\Leftrightarrow 2(t^2 + t + 1) = 19(t - 1)$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 17t + 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{18}}, x = \frac{7}{\sqrt[3]{18}} \\ t = \frac{3}{2} \Rightarrow y = 2, x = 3 \end{cases}$$

10. $\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2 + xy - 3) = 0 \quad (1) \\ x^6 + y^6 = 1 \quad (2) \end{cases}$

a) Hoặc $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = y = \pm \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$

b) Hoặc $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \quad (3) \\ x^6 + y^6 = 1 \quad (4) \end{cases}$

Từ (4) suy ra $|x| \leq 1, |y| \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1, y^2 \leq 1, xy \leq 1$

Vậy (3) (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 = xy = 1 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ vô nghiệm

Hệ phương trình (1), (2) có hai nghiệm: $x_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}; x_2 = y_2 = -\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$

11. Từ hệ phương trình suy ra điều kiện cần là $0 \leq x^2, y^2 \leq 1$.

Trừ từng vế ta được: $\begin{cases} x^4(1 - x^2) + y^4(1 - y^2) = 0 \quad (1) \\ x^4 + y^4 = 1 \quad (2) \end{cases}$

Do $0 \leq x^2, y^2 \leq 1$ nên phương trình (1) dẫn tới hệ phương trình

$\begin{cases} x^4(1 - x^2) = 0 \quad (1a) \\ y^4(1 - y^2) = 0 \quad (1b) \end{cases}$. Kết hợp hệ (1a), (1b) với phương trình (2) ta được

các nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x = 0, y = \pm 1 \\ x = \pm 1, y = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y = 4 \quad (1) \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 \quad (2) \end{cases}$

Thế $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 16 - 2xy$

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 4((x + y)^2 - 3xy) = 4(16 - 3xy)$

Vào phương trình (2) ta có:

$(16 - 2xy)(16 - 3xy) = 280 \Leftrightarrow (8 - xy)(16 - 3xy) = 35$

$\Leftrightarrow 3(xy)^2 - 40xy + 93 = 0$. Đặt $xy = v$, dễ dàng giải phương trình này ta

được $v = 3$ hoặc $v = \frac{31}{3}$.

* Nếu $v = xy = 3, x + y = 1$, ta được $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

* Nếu $\begin{cases} v = \frac{31}{3} = xy \\ 4 = x + y \end{cases} \Rightarrow 4xy > (x + y)^2$ vô lý.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

13. Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 2x)(2x + y) = 9 \\ (x^2 + 2x) + (2x + y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$
 $\Rightarrow (x = 1; y = 1), (x = -3, y = 9)$

14. Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - 2xy \\ (x + y)^2 - 2xy = 1 \end{cases}$. Đặt $x + y = u, xy = v$

$$u^2 - 2v - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = -2 \\ v = \frac{3}{2} \end{cases}$$

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow 4xy > (x + y)^2$, vô lý. Hệ phương trình này vô nghiệm

15. Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra $\sqrt{x + y} \geq \sqrt{x - y} \Rightarrow y \geq 0$, vậy ta có điều kiện $\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq y \end{cases}$. Khi đó bình phương cả hai vế phương trình thứ nhất

của hệ ta nhận được hệ tương đương $\begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = x - 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 6 - x \end{cases}$

Giải hệ phương trình này bằng cách bình phương 2 vế của 2 phương

trình ta nhận được nghiệm $\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \sqrt{6} \end{cases}$

16. Dễ thấy rằng nếu (x, y) là nghiệm của hệ phương trình thì $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

Đặt $\frac{y}{x} = t \Leftrightarrow y = tx$, từ (2) ta có $x^2(2 - 13t + 15t^2) = 0$

$$\Leftrightarrow 15t^2 - 13t + 2 = 0 \text{ (do } x \neq 0) \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \text{ hoặc } t = \frac{1}{5}.$$

* Với $t = \frac{2}{3}$, từ phương trình (1) ta có:

$$x^2 \left(1 - 2t + 3t^2\right) = x^2 \left(1 - \frac{4}{3} + \frac{12}{9}\right) = x^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = tx = \pm 2 \end{cases}$$

* Với $t = \frac{1}{5}$ từ phương trình (1) ta có:

$$x^2 \left(1 - \frac{2}{5} + \frac{3}{25}\right) = x^2 \cdot \frac{18}{25} = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{5}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} (x, y \text{ cùng dấu}).$$

Hệ có 4 nghiệm: $(-3; -2); (-\frac{5}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}); (3; 2); (\frac{5}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$

17. Xét phương trình thứ 2 của hệ phương trình ta có:

$xy = 2 + x^2 > 0 \Leftrightarrow xy \neq 0 \Rightarrow y = \frac{2 + x^2}{x}$. Thế vào phương trình đầu ta có:

$$|x^2 - 2| = 8 - \left(\frac{2 + x^2}{x}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 |x^2 - 2| = 8x^2 - (2 + x^2)^2$$

$$\Rightarrow -(x^2 - 2)^2 = x^2 |x^2 - 2| \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

$$\text{Khi } x = \sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{2 + x^2}{x} = 2\sqrt{2}; \text{ khi } x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{2 + x^2}{x} = -2\sqrt{2}$$

Kết luận: hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}$

18. Đặt: $\begin{cases} z = 2x + y \\ t = 2x - y \end{cases}$.

$$\text{Hệ phương trình trở thành: } \begin{cases} z^2 - 5zt + 6t^2 = 0 \\ z + \frac{1}{t} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2t \\ z = 3t \\ z + \frac{1}{t} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} z = 2t \\ 2t + \frac{1}{t} = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} z = 3t \\ 3t + \frac{1}{t} = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} z = 2t \\ 2t^2 - 3t + 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} z = 3t \\ 3t^2 - 3t + 1 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} z = 2t \\ t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} z = 3t \\ \text{VN} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} z = 2 \\ t = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} z = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

ABC

$$\bullet \quad \begin{cases} z = 2 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} z = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{8} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm (x, y) là: $(\frac{3}{8}; \frac{1}{4})$ và $(\frac{3}{4}; \frac{1}{2})$

19. Cách 1: $(1) \Leftrightarrow x(y+1) = 1-y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-y}{1+y} \\ y \neq -1 \end{cases}; (3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9-z}{1+z} \\ z \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-y}{1+y} = \frac{9-z}{1+z} \quad (y, z \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow 1 - yz + z - y = 9 - yz + 9y - z \quad (y, z \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow 5y - z + 4 = 0 \quad (y, z \neq -1) \Leftrightarrow z = 4 + 5y \quad (y, z \neq -1) \quad (*)$$

Thế (*) vào (2) ta có:

$$y + y(4+5) + 4 + 5y = 4 \Leftrightarrow 10y + 5y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -2 \end{cases} \quad (y \neq 1)$$

$$* \quad y = 0 \Rightarrow x = 1; z = 4 \quad * \quad y = -2 \Rightarrow x = -3; z = -6$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm (x, y, z) là: $(1, 0, 4)$ và $(-3, -2, -6)$

Cách 2: Hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 2 \\ (y+1)(z+1) = 5 \\ (z+1)(x+1) = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2 = 100 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = 10 \\ (x+1)(y+1)(z+1) = -10 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\Rightarrow \begin{cases} z+1 = 5 \\ x+1 = 2 \\ y+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\Rightarrow \begin{cases} x+1 = -2 \\ y+1 = -1 \\ z+1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = -6 \end{cases}$

20. Hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x + y + 2xy = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2+y^2-xy) = 8 \\ x+y+2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(u^2-3v) = 8 \\ u+2v = 2 \end{cases}; \text{ Trong đó } \begin{cases} u = x+y \\ v = xy \end{cases}$$

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{2-u}{2} \\ 2u^3 + 3u^2 - 6u - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{2-u}{2} \\ (u-2)(2u^2 + 7u + 8) = 0 \end{cases}$$

Vì $2u^2 + 7u + 8 > 0 \quad \forall u$ (do $\Delta < 0$ và $a = 2 > 0$) nên
$$\begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$21. (1) \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+y+1) = 10 \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3y^2 + y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -4 \\ y = \frac{5}{3} \\ x = \frac{10}{3} \end{cases}$$

22. Điều kiện là: $x \neq 0$.

$$\begin{cases} 1 + x^3 y^3 = 19x^3 \\ y + xy^2 = -6x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^3} + y^3 = 19 \\ \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{1}{x} + y)^3 - 3\frac{y}{x}(\frac{1}{x} + y) = 19 \\ \frac{y}{x}(\frac{1}{x} + y) = -6 \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ $\frac{1}{x} + y = u, \frac{y}{x} = v$ ta được:

$$\begin{cases} u^3 - 3uv = 19 \\ uv = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + y = 1 \\ \frac{y}{x} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}, y_1 = -2 \\ x_2 = -\frac{1}{2}, y_2 = 3 \end{cases}$$

23. a. Nhận xét: $\sqrt{\frac{1-x}{2y+1}} + \sqrt{\frac{2y+1}{1-x}} = 1$. Đặt $\sqrt{\frac{1-x}{2y+1}} = t > 0$

Phương trình thứ nhất trở thành: $t + \frac{1}{t} = 2$, giải ra $t = 1$.

ABC

Do đó $\sqrt{\frac{1-x}{2y+1}} = 1 \Leftrightarrow 1-x = 2y+1$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y=0 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$. Vậy hệ phương trình có

một nghiệm: $(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$.

b. Chú ý rằng: $|a|=|b| \Leftrightarrow a=\pm b$. Hệ phương trình đã cho tương đương với

hai hệ phương trình sau đây: $\begin{cases} x-y=2y-1 \\ y+1=2x \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-y=1-2y \\ y+1=2x \end{cases}$

Giải tiếp ta được 2 nghiệm: $(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}); (\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$.

24. a. Thế $z=3x$ vào hai phương trình đầu được: $\begin{cases} 4x+3y=-2 \\ 7x-y=9 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được: $x=1, y=-2$. Từ đó tìm được $z=3$

Nghiệm của hệ đã cho: $(1; -2; 3)$.

b. Cộng từng vế 3 phương trình rồi chia hai vế cho 2, ta được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Trừ từng vế phương trình trên cho mỗi phương trình đã cho. Đáp số: $(\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{3})$.

25. a. Với $m=4 \Rightarrow \sqrt{m}=\sqrt{4}=2$, vậy có hệ phương trình:

$\begin{cases} 2x-3y=10 \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=10 \\ 3x-3y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=-2 \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x-3y=2\sqrt{m}+6 \\ x-y=\sqrt{m}+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=2\sqrt{m}+6 \\ 2x-2y=2\sqrt{m}+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=\sqrt{m} \end{cases}$

Do $x+y=\sqrt{m}-2 \geq -2$ (vì $\sqrt{m} \geq 0$) nên $\min(x+y)=-2$ khi $m=0$. Do

đó với nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$ thì $(x+y)$ nhỏ nhất.

26. a. Nếu $a \neq 0$ thì hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình:

$\begin{cases} ax+a^2y=a \ (a \neq 0) \\ -ax+y=a \end{cases}$. Cộng vế với vế hai phương trình trên được:

$(a^2+1)y=2a \Leftrightarrow y=\frac{2a}{a^2+1}$ (vì $a^2+1 \neq 0$). Từ đó tìm được $x=\frac{1-a^2}{a^2+1}$.

Nếu $a = 0$ thì nghiệm của hệ phương trình là $(0; 1)$.

Vậy với mọi a hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

- b. • Ta có: $x < 1 \Leftrightarrow \frac{1-a^2}{a^2+1} < 1 \Leftrightarrow 2a^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$.
- Ta có: $y < 1 \Leftrightarrow \frac{2a}{a^2+1} < 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 1$.

Vậy với $a \neq 0$ và $a \neq 1$ thì hệ phương trình thỏa mãn điều kiện bài toán.

27. Cộng vế với vế của hai phương trình: $(a+2)x = a^2 + 4a + 5$ (1)

Nếu $a+2 \neq 0$ hay $a \neq -2$ thì $x = \frac{a^2 + 4a + 5}{a+2}$ là nghiệm duy nhất của (1).

Từ đó tìm được $y = \frac{a^3 + 5a^2 + 4a - 5}{a(a+2)}$ nếu $a \neq 0$.

Trước hết ta tìm $a \in \mathbb{Z}$ sao cho $x \in \mathbb{Z}$: $x = \frac{(a+2)^2 + 1}{a+2} = a+2 + \frac{1}{a+2}$

Để $x \in \mathbb{Z}$ thì $a+2$ phải là ước của 1, suy ra $a+2 = \pm 1$, từ đó $a = -3; -1$.

Với $a = -3$ thì $y \notin \mathbb{Z}$. Với $a = -1$ thì $y = 5 \in \mathbb{Z}$ và $x = 2 \in \mathbb{Z}$.

Nếu $a = -2$ hoặc $a = 0$ thì hệ vô nghiệm. Vậy hệ có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow a = -1$. Ngoài ra với $a = -1$ thì nghiệm của hệ là $(2; 5)$.

28. a.
$$\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0 \\ |y| + x - 3 = 0 \end{cases}$$

• Nếu $x \geq 0$; $y \geq 0$ thì ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - 2x + 3 = 0 \\ y + x - 3 = 0, \text{ suy ra } x = 2, y = 1 \end{cases}$$

• Nếu $x \geq 0$; $y \leq 0$ thì ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - 2x + 3 = 0 \\ -y + x - 3 = 0, \text{ suy ra } x = 0, y = -3 \end{cases}$$

• Nếu $x < 0$; $y \geq 0$ thì ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y + 2x + 3 = 0 \\ y + x - 3 = 0, \text{ suy ra } x = -6, y = 9 \end{cases}$$

• Nếu $x < 0$; $y < 0$ thì ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y + 2x + 3 = 0 \\ -y + x - 3 = 0, \text{ suy ra } x = 0, y = -3 \end{cases}$$

Từng cặp giá trị trên đều thỏa mãn các điều kiện nêu trên, đó là 4 nghiệm của hệ phương trình đã cho.

b. Từ phương trình thứ hai của hệ: $4(y - 1) = |x + 1| \geq 0$ ta suy ra hệ phương

$$\text{trình đã cho tương ứng với: } \begin{cases} |x + 1| + y - 1 = 5 \\ |x + 1| = 4y - 4 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} |x + 1| = -y + 6 \\ |x + 1| = 4y - 4 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $-y + 6 = 4y - 4$; $y = 2$.

Thay giá trị này vào phương trình thứ hai của hệ phương trình, ta được $|x + 1| = 4$, do đó: Nếu $x + 1 = 4$ thì $x = 3$. Nếu $x + 1 = -4$ thì $x = -5$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(3; 2)$; $(-5; 2)$.

c. Từ phương trình thứ hai suy ra $|x| \leq 1$ và $|y| \leq 1$, đồng thời x và y hoặc cùng dương hoặc cùng âm.

Giả sử rằng $x \geq 0$ và $y \geq 0$ khi đó hệ phương trình đã cho có thể viết:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}. \text{ Từ đó với những cặp số dương có tổng bằng 1 thỏa mãn hệ}$$

phương trình đã cho, chẳng hạn cặp $(0; 1)$; cặp $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$; cặp $(0,1; 0,9)$; ...

Trường hợp còn lại tự giải.

29. a. Thay $a = -\sqrt{2}$ vào hệ phương trình, ta được:
$$\begin{cases} (-\sqrt{2} + 1)x - y = 3 \\ -\sqrt{2}x + y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Giải ra được nghiệm } x = \frac{3 - \sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2}}; y = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2}}.$$

b. Dùng phương pháp cộng đại số, ta được: $(2a + 1)x = a + 3$

Với $2a + 1 \neq 0$ hay $a \neq -\frac{1}{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x = \frac{a + 3}{2a + 1} \\ y = a - a \cdot \frac{a + 3}{2a + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a + 3}{2a + 1} \\ y = \frac{a^2 - 2a}{2a + 1} \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{a^2 - a + 3}{2a + 1} = \frac{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}{2a + 1}$$

$$x + y > 0 \Leftrightarrow 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}.$$

30. a. Từ hai phương trình ta suy ra: $2x + my = mx + 2y \Leftrightarrow (m - 2)(x - y) = 0$

Nếu $m = 2$: hệ phương trình có vô số nghiệm.

Nếu $m \neq 2$ thì $x = y$, thay vào phương trình (1), ta có:

$$2x + mx = 1 \Leftrightarrow (m + 2)x = 1$$

Nếu $m = -2$: hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $m \neq -2$: hệ phương trình có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{m+2} \\ y = \frac{1}{m+2} \end{cases}$$

b. Khi $m \neq \pm 2$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \frac{1}{m+2}$, $y = \frac{1}{m+2}$;

$$x, y \text{ nguyên} \Leftrightarrow m+2 \Leftrightarrow \begin{cases} m+2=1 \\ m+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=-1 \end{cases}$$

c. Khi $m \neq \pm 2$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất và điểm $M(x; y)$ thuộc đường thẳng cố định $y = x$.

31. a. $x = \frac{3-z}{4}$; $y = \frac{z+2}{4}$

b. Do $x \geq 0$, $y \geq 0$ nên $-2 \leq z \leq 3$. Do $z \geq 0$ nên $0 \leq z \leq 3$

Biểu thị A theo z: $A = x + y - z = \frac{3-z}{4} + \frac{z+2}{4} - z = \frac{5-4z}{4}$

A nhỏ nhất $\Leftrightarrow 5-4z$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow z$ lớn nhất $\Leftrightarrow z = 3$ (vì $0 \leq z \leq 3$).

Khi đó $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $A = \frac{5}{4}$.

32. Lấy (2) trừ đi (1) ta có: $y + 3x = 7$. Lấy (3) trừ đi (2) ta có: $y = 5z = 19$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y + 3z = 7 \\ y + 5z = 19 \end{cases}$, ta có: $\begin{cases} y = 11 \\ z = 6 \end{cases}$

Suy ra nghiệm của hệ phương trình là: $x = 6$, $y = -11$, $z = 6$.

33.a. Với $m \neq 0$, $m \neq 2$, hệ có một nghiệm duy nhất: $\left(\frac{3m-2}{m}; \frac{m-2}{m} \right)$.

Với $m = 0$, hệ vô nghiệm.

Với $m = 2$, hệ vô số nghiệm: $(x; 2-x)$ với $x \in \mathbb{R}$.

b. Với $m = 1$ thì nghiệm là $(1; -1)$. Với $m = -1$ thì nghiệm là $(5; 3)$.

Với $m = -2$ thì nghiệm là $(4; 2)$.

Với $m = 2$ thì nghiệm là $(x; 2-x)$ với $x \in \mathbb{Z}$.

c. Đáp số: $m < 0$ hoặc $m > 2$.

34. a. $x = \frac{3-z}{4}; y = \frac{z+2}{4}$

b. Do $x \geq 0, y \geq 0$ nên $-2 \leq x \leq 3$. Do $z \geq 0$ nên $0 \leq z \leq 3$.

Biểu thị A theo z ta có: $A = x + y - z = \frac{3-z}{4} + \frac{z+2}{4} - z = \frac{5-4z}{4}$.

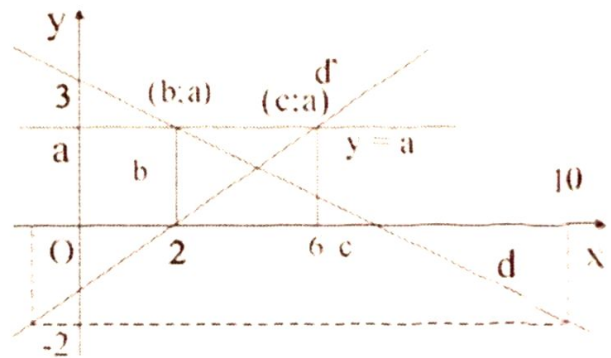
A nhỏ nhất $\Leftrightarrow 5-4z$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow z$ lớn nhất $\Leftrightarrow z = 3$.

Khi đó $x = 0, y = \frac{5}{4}, A = -\frac{7}{4}$.

A lớn nhất $\Leftrightarrow 5-4z$ lớn nhất $\Leftrightarrow z$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow z = 0$.

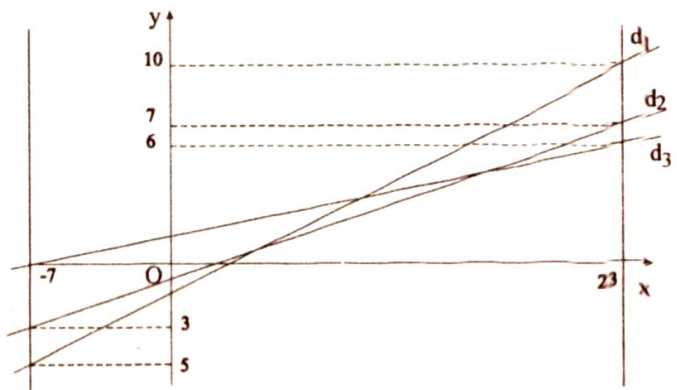
Khi đó $x = \frac{3}{4}, y = \frac{1}{2}, A = \frac{5}{4}$.

35. Giả sử đường thẳng $y = a$ cắt d và d' theo thứ tự tại các điểm có hoành độ b và c. Cần tìm số nguyên a sao cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn
- $$\begin{cases} b + 2a = 6 \\ 2c - 3a = 4 \end{cases}$$



Ta tìm được: $c = 3k - 1, b = 10 - 4k, a = 2k - 2$ (k nguyên). Trên hình tương ứng với k bằng 0, 1, 2 ta có a bằng -2, 0, 2.

36. (hình) Giả sử đường thẳng $x = a$ cắt các đường thẳng d1, d2, d3 tại các điểm có tung độ theo thứ tự là b, c, d. Cần tìm các số nguyên a, b, c, d sao cho
- $$\begin{aligned} a - 2b &= 3, a - 3c = 2, \\ a - 5d &= -7. \end{aligned}$$
- Muốn vậy, a tìm số nguyên a sao cho:



A chia cho 2 thì dư 1 (1)

a chia cho 3 thì dư 2 (2)

a chia cho 5 thì dư 3 (3)

BCNN(2, 3, 5) = 30. Gọi

$a = 30k + r$ với k, r nguyên, $0 < r < 30$.

Từ (3) ta có $r \in \{3; 8; 13; 18; 23; 28\}$

Do (1) nên r là số lẻ, do đó $r \in \{3; 13; 23\}$

Do (2) nên r chia cho 3 dư 2, vậy $r = 23$. Do đó $a = 30k + 23$ (k nguyên).

Trên hình ứng với $k = -1$ ta có $a = -7$, ứng với $k = 0$ ta có $a = 23$.

Chương 4. Phương trình nghiệm nguyên

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên x, y của phương trình $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$ (1)

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x - 5)$ (2) $\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 5}$ (vì $x = 5$

không là nghiệm của (2)) $\Leftrightarrow y = x - 1 + \frac{3}{x - 5}$

Vì x, y nguyên $x - 5 \in \{-1; 1; 3; -3\}$ hay $x \in \{4; 6; 8; 2\}$

- Khi $x = 2$ thì $y = 0$
- Khi $x = 4$ thì $y = 0$
- Khi $x = 6$ thì $y = 8$
- Khi $x = 8$ thì $y = 8$

Vậy các nghiệm nguyên $(x; y)$ của (1) là: $(2; 0), (4; 0), (6; 8), (8; 8)$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p - 1)(p + 1)$ chia hết cho 24.

Đề thi HSG lớp 9 tỉnh Phú Thọ năm 2003–2004

Giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, không chia hết cho. Do đó $p = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z}, k > 1)$ suy ra

$A = (p - 1)(p + 1) = 2k(2k + 2) = 4k(k + 1)$ suy ra A chia hết cho 8

$p = 3h \pm 1 (h \in \mathbb{Z}, h > 1)$ suy ra A chia hết cho 3.

Vậy $A = (p - 1)(p + 1)$ chia hết cho 24.

Ví dụ 3: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy - 2x - 3y + 1 = 0$.

Đề thi HSG lớp 9 tỉnh Phú Thọ năm 2003–2004

Giải

Ta có $xy - 2x - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y(x - 3) = 2x - 1$ (*)

Vì $x = 3$ không là nghiệm của phương trình đã cho nên

$$(*) \Leftrightarrow y = \frac{2x - 1}{x - 3} = 2 + \frac{5}{x - 3}$$

Vì y là số nguyên nên 5 chia hết cho $(x - 3)$, suy ra $x - 3$ nhận các giá trị $\pm 1; \pm 5$. Từ đó ta xác định được hai nghiệm nguyên dương $(x; y)$ của phương trình đã cho là $(4; 7)$ và $(8; 3)$.

Ví dụ 4: Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$.

ABC

Giải

Ta có $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100 \Leftrightarrow (x - 3y)^2 = 100 - 4y^2$. Để phương trình đã cho có nghiệm nguyên thì $100 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 25 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow |y| \leq 5$. Mặt khác $100 - 4y^2 = 2^2(25 - y^2)$ phải là bình phương của một số nguyên, do đó $25 - y^2$ phải là bình phương của một số nguyên, suy ra $y = 0; y = \pm 3; y = \pm 4; y = \pm 5$.

* Với $y = 0$, phương trình trở thành $x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 10$.

* Với $y = 3$, phương trình trở thành $x^2 - 18x + 13 \cdot 9 = 100$

$$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 17 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 17 \end{cases}$$

* Với $y = -3$, phương trình trở thành $x^2 + 18x + 17 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -17 \end{cases}$

* Với $y = 4$, phương trình trở thành

$$x^2 - 24x + 108 = 0 \Leftrightarrow x = 12 \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 18 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

* Với $y = -4$, phương trình trở thành

$$x^2 + 24x + 108 = 0 \Leftrightarrow x = -12 \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = -18 \end{cases}$$

* Với $y = 5$, phương trình trở thành $x^2 - 30x + 225 = 0 \Leftrightarrow x = 15$.

* Với $y = -5$, phương trình trở thành: $x^2 + 30x + 225 = 0 \Leftrightarrow x = -15$.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 12 cặp số $(x; y)$.

Ví dụ 5: Giải phương trình nghiệm nguyên dương $xy + yz + zx = xyz + 2$.

Giải

Do vai trò của x, y, z bình đẳng nên không mất tính chất tổng quát, giả sử rằng $x \geq y \geq z \geq 1$, từ đó $\Rightarrow xy + yz + zx \leq xy + xy + xy = 3xy \Rightarrow 3xy \geq xyz + 2$ hay $3xy > xyz \Rightarrow z < 3$ do z là một số nguyên dương $\Rightarrow z = 1, z = 2$.

• Khi $z = 1$, ta có $xy + y + x = xy + 2 \Rightarrow x + y = 2$. Do x, y là các số nguyên dương nên $x = 1; y = 1$.

• Khi $z = 2$ ta có $xy + 2y + 2x = 2xy + 2 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 2 = 0$.

$$\Rightarrow x(y - 2) - 2(y - 2) - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(y - 2) = 2.$$

$$\text{Do } x \geq y \geq z \geq 1, \text{ nên } \begin{cases} x - 2 = 2 \\ y - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = y = z; (x; y; z) = (4; 3; 2)$.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$, không có nghiệm nguyên dương.

Giải

Do vai trò của x, y bình đẳng và x, y là các số nguyên dương nên không mất tính chất tổng quát, giả sử rằng $1 \leq x \leq y$, từ đó $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{xy} \geq \frac{1}{y^2}$, do đó

suy ra $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} \leq \frac{3}{x^2} \Rightarrow 1 \leq \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 3$, vì x là số nguyên dương nên

$x = 1$. Thế vào phương trình $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1 \Rightarrow \frac{2}{y} = 0$. Từ đó suy ra phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Ví dụ 7: Giải phương trình nghiệm nguyên dương $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$.

Giải

Ta có $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3y}{y+3} = 3 - \frac{9}{y+3}$, do x, y nguyên dương nên x nguyên dương khi và chỉ khi 9 chia hết cho $y+3$, hay $y+3$ nhận các ước của 9 là $\pm 3; \pm 9$ từ đó suy ra phương trình có nghiệm $x = 2, y = 6$.

Ví dụ 8: Giải phương trình nghiệm nguyên dương $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{xy}$.

Giải

Không mất tính chất tổng quát, ta giả sử $x \geq y$. Khi đó, từ phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{xy}$ suy ra $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} \leq \frac{2}{y} - \frac{1}{xy} = \frac{2x-1}{xy} < \frac{2x}{xy} = \frac{2}{y}$. Từ đó suy ra $y < 6$. Thử trực tiếp các giá trị $y = 1, 2, 3, 4, 5$ và do vai trò của x, y bình đẳng nên các cặp số cần tìm là: $(x; y) = (9; 4), (6; 5), (4; 9), (5; 6)$.

Ví dụ 9: Giải phương trình nghiệm nguyên $(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^2$.

Đề thi TS lớp 10 CT THPT Lam Sơn Thanh Hóa 2001–2002

Giải

Ta có $(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3$

$$\Leftrightarrow x^3 + xy + x^2y^2 + y^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$\Leftrightarrow 2y^3 + x^2y^2 - 3xy^2 + xy + 3x^2y = 0$$

$$\Leftrightarrow y[2y^2 + (x^2 - 3x)y + (x + 3x^2)] = 0$$

- Nếu $y = 0$ thì phương trình có nghiệm $(x; 0)$ với x là số nguyên.

- Nếu $y \neq 0$, ta có phương trình $2y^2 + (x^2 - 3x)y + (x + 3x^2) = 0$. Xem phương trình này là một phương trình bậc hai với ẩn y , ta có $\Delta = (x + 1)^2 x(x - 8)$. Để phương trình có nghiệm thì Δ phải là một số chính phương, nên $x(x - 8) = a^2 \Leftrightarrow (x - 4 - a)(x - 4 + a) = 16$. Vì $(x - 4 - a) \leq (x - 4 + a)$ và $(x - 4 - a) + (x - 4 + a)$ là một số chẵn. Từ đó, suy ra phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (9; 6), (9; 21), (8; 10), (1; 1), (k; 0)$

Ví dụ 10: Tìm các số tự nhiên: $2 < x < y < z < t < u$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} = 1.$$

Giải

Nếu $x > 3$ ta có $3 < x < y < z < t < u$, từ phương trình đã cho suy ra

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{743}{840} < 1. \text{ Vậy } x = 3.$$

Từ đó suy ra $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} = \frac{2}{3}$. Nếu $y > 4$, lập luận tương tự, ta có:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{533}{840} < \frac{2}{3}, \text{ suy ra } y = 4. \text{ Tiếp tục lập luận}$$

như trên ta có các số tự nhiên cần tìm là $x = 3, y = 4, z = 5, t = 6, u = 20$.

Ví dụ 11: Tìm các số tự nhiên m, n thỏa mãn: $19m + 84n = 1984$.

Giải

Ta có $1984 = 1000 + 84$, nên dễ thấy cặp giá trị $m = 100, n = 1$ thỏa mãn.

Từ đó ta suy ra dạng tổng quát của m, n như sau $m = 100 - p; n = 1 + q$,

$$\Rightarrow 19p = 84q \text{ vì } (84, 19) = 1 \text{ suy ra } p = 84k; q = 19k, (k \in \mathbb{Z}). \text{ Do đó ta có } m = 100 - 84k; n = 1 + 19k, (k \in \mathbb{Z})$$

Từ đó suy ra m và n là số tự nhiên khi và chỉ khi $k = 0, k = 1$.

Khi $k = 0$ thì $m = 100, n = 1$.

Khi $k = 1$ thì $m = 16, n = 20$.

Ví dụ 12: Tìm tất cả các số có hai chữ số mà nó chia hết cho tích các chữ số.

Giải

Gọi số cần tìm là $\overline{xy} (x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 9)$, theo đề ra ta có $10x + y$ chia hết cho xy , suy ra y chia hết cho x và $10x$ chia hết cho y .

Do đó đặt $y = kx$, nên $10x$ chia hết cho kx suy ra 10 chia hết cho k . Vậy $k = 1, 2, 5$. Khi $k = 1$ ta có $x = y$, suy ra $\overline{xy} = 11$.

Khi $k = 2$ ta có $x = 2y$, suy ra $\overline{xy} = 12; 24; 36$.

Khi $k = 5$ ta có $x = 5y$, suy ra $\overline{xy} = 15$.

Vậy các số cần tìm là $11, 12, 15, 24, 36$.

Ví dụ 13: Tìm tất cả các số có năm chữ số sao cho số đó bằng 45 lần tích các chữ số của nó.

Giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c, d, e \leq 9$), ta có $M = \overline{abcde} = 45 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$. Giả sử e là số chẵn, mà $\overline{abcde}$ chia hết cho 5 nên $e = 0$, suy ra $M = 0$ (vô lý). Từ đó suy ra e là số lẻ, nên $e = 5$. Do đó M chia hết cho 25, suy ra $\overline{de}$ chia hết cho 25 $\Rightarrow d = 2; 7$. Nếu d chẵn, suy ra vô lý. Vậy $d = 7$. Mặt khác M chia hết cho 9 nên $(a + b + c + 12)$ chia hết cho 9. Vì $a + b + c \leq 27 \Rightarrow a + b + c = 15$. Đồng thời $45 \cdot 35abc < 100000 \Rightarrow abc \leq 63 \Rightarrow \{a, b, c\} = \{1, 7, 7\}$ hay $\{1, 5, 9\}$. Từ đó suy ra số cần tìm là 77173 .

Ví dụ 14: Tìm các số tự nhiên n, z thỏa mãn: $2^n + 12^2 = z^2 - 3^2$.

Giải

Ta có phương trình $2^n + 12^2 = z^2 - 3^2 \Leftrightarrow z^2 - 2^n = 153$.

Xét hai trường hợp.

Trường hợp 1: n là số chẵn tức là $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$).

Khi đó ta có $(z - 2^m)(z + 2^m) = 153$; Mà $153 = 9 \cdot 17 = 1 \cdot 153 = 3 \cdot 51$, nên $z = 13$; $m = 2$ suy ra $n = 4$.

Trường hợp 2: n là số lẻ tức là $n = 2m + 1$.

Khi đó ta có $z^2 - 2^n = 153 \Leftrightarrow z^2 - 2 \cdot 2^{2m} = 153$ ($m \in \mathbb{N}$). Khi $n = 1 \Rightarrow z^2 = 155$, do đó không tồn tại nghiệm là số tự nhiên. Khi $n \geq 3 \Rightarrow z^2 - 2^n < 155$, nên vô lý. Vậy các số tự nhiên n, z thỏa mãn: $2^n + 12^2 = z^2 - 3^2$ là $z = 13, n = 4$.

Ví dụ 15: Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 < xy + 3y + 2z - 3$.

Giải

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 < xy + 3y + 2z - 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq xy + 3y + 2z - 4$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + z^2 - 3y - 2z + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 + (z - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{y}{2} - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy các số nguyên x, y, z cần tìm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$.

ABC

Ví dụ 16: Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$

Giải

Từ phương trình đã cho, ta có x, y cùng tính chẵn lẻ. Ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1: Khi $x = y$, phương trình đã cho trở thành

$4x^3 = 8(3x^2 + 1) \Leftrightarrow 4x^3 = 24x^2 + 8 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 - 2 = 0$, suy ra phương trình này vô nghiệm.

Trường hợp 2: Khi $x \neq y$, ta có

$$|x - y| \geq 2 \Rightarrow (x - y)^2 \geq 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2(xy + 2).$$

Từ phương trình $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$, suy ra

$$(x^2 + y^2)(x + y) = 8(x^2 + y^2) + 8xy + 8$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x + y - 8) = 8xy + 8 \Rightarrow |x^2 + y^2||x + y - 8| = 4|2xy + 2|$$

$\Rightarrow |x + y - 8| < 4 \Rightarrow 4 < x + y < 12 \Rightarrow x + y = 6, 8, 10$. Xét từng trường hợp ta có nghiệm của phương trình đã cho là $(x, y) = (2, 8); (8, 2)$.

Ví dụ 17: Giải phương trình nghiệm nguyên $x(1 + x + x^2) = 4y(y + 1)$.

Giải

$$\text{Ta có } x(1 + x + x^2) = 4y(y + 1) \Leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 = 4y^2 + 4y + 1$$

$$\Leftrightarrow (1 + x)(1 + x^2) = (2y + 1)^2(2)$$

Vế phải của phương trình (2) là một số lẻ suy ra $(1 + x); (1 + x^2)$ đều là số lẻ. Giả sử $(1 + x, 1 + x^2) = d$, suy ra d cũng là số lẻ. Mặt khác $(1 + x)$ chia hết cho d nên $1 - x^2$ chia hết cho d . Kết hợp với $1 + x^2$ chia hết cho d ta suy ra 2 chia hết cho d . mà d là số lẻ nên $d = 1$. Do $(1 + x). (1 + x^2)$ là số chính phương mà $(1 + x, 1 + x^2) = 1$, nên $(1 + x), (1 + x^2)$ là các số chính phương. Do đó $x^2; 1 + x^2$ là hai số tự nhiên liên tiếp mà đều là số chính phương. Suy ra $x = 0$, từ đó suy ra $y = 0$ hoặc $y = -1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $(0; 0), (0; -1)$.

Ví dụ 18: Chứng minh rằng không thể có các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: $x^3 - y^3 = 1993$

Giải

$$x^3 - y^3 = 1993 \Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 1993$$

Do $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ nên $x - y, x^2 + xy + y^2$ là các ước số dương của 1993

Do 1993 là số nguyên tố, nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1993 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x - y = 1993 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Các hệ phương trình trên không có nghiệm nguyên nên bài toán đã cho được chứng minh.

Ví dụ 19: Giải phương trình nghiệm nguyên: $4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2} - 2x$.

Giải

Cách 1: Ta có: $4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2} - 2x \Leftrightarrow 4y^2 = 2 + \sqrt{200 - (x+1)^2}$

Vì y là số nguyên, nên từ đó suy ra: $\frac{1}{2} \leq y^2 \leq \frac{2 + \sqrt{200}}{4} \leq 4 \Rightarrow y^2 = 1; y^2 = 4$

* Nếu $y^2 = 1$, ta có phương trình đã cho trở thành

$$4 = 2 + \sqrt{199 - x^2} - 2x \Leftrightarrow 4 = 199 - x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 195 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 13)(x + 15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ x = -15 \end{cases}$$

* Nếu $y^2 = 4$, ta có phương trình đã cho trở thành

$$16 = 2 + \sqrt{199 - x^2} - 2x \Leftrightarrow 16 = 199 - x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy, phương trình đã cho có các nghiệm là:

$$(x; y) = (1; 2), (1; -2), (-3; 2), (-3; -2), (13; 1), (13; -1), (-15; 1), (-15; -1)$$

Cách 2: $4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2} - 2x \Leftrightarrow 4y^2 = 2 + \sqrt{200 - (x+1)^2}$. Để phương trình có nghiệm nguyên thì $\sqrt{200 - (x+1)^2} = \sqrt{2^2 + 14^2 - (x+1)^2}$ hoặc $\sqrt{200 - (x+1)^2} = \sqrt{2 \cdot 10^2 - (x+1)^2}$ phải là số chính phương. Khi đó phải có $(x+1)^2 = 10^2$ hoặc $(x+1)^2 = 2^2$ hoặc $(x+1)^2 = 14^2$.

* Nếu $(x+1)^2 = 10^2 \Rightarrow 4y^2 = 2 + 10 \Leftrightarrow y^2 = 3$, suy ra phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

* Nếu $(x+1)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x+1 = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 2$.

* Nếu $(x+1)^2 = 14^2 \Leftrightarrow x+1 = \pm 14 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ x = -15 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 1$

Thử lại ta thấy, phương trình đã cho có các nghiệm là:

$$(x; y) = (1; 2), (1; -2), (-3; 2), (-3; -2), (13; 1), (13; -1), (-15; 1), (-15; -1).$$

Ví dụ 20: Với 8 số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 3.

Giải

Ký hiệu số tự nhiên thỏa đề bài là: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Các số $a_1, a_2, \dots, a_6$ khác nhau lấy từ 8 số đã cho, $a_1 \neq 0$

- $a_1 = 3$, khi đó a_2 có 7 cách chọn, sau đó a_3 có 6 cách chọn,...

Do đó trường hợp này có: $7.6.5.4.3 = 2520$ (số).

- $a_1 \neq 3$ khi đó có 6 cách chọn a_1 (vì $a_1 \neq 0, a_1 \neq 3$), chọn số 3 thay vào 1 trong 5 số $a_2, \dots, a_6$, sau đó còn lại 4 chữ số và lần lượt chọn 4 số khác nhau lấy từ 8 số đã cho và khác a_1, a_2 .

Do đó trường hợp này có: $6.5.6.5.4.3 = 10800$ (số).

- Đáp số: 13320 số.

Ví dụ 21: Viết các phương trình bậc hai dạng $x^2 + px + q = 0$. Biết rằng, phương trình có nghiệm nguyên, các hệ số p, q đều là những số nguyên và $p + q + 1 = 2003$.

Giải

Giả sử phương trình $x^2 + px + q = 0$ có hai nghiệm nguyên x_1, x_2 . Theo định lý Viet, ta có: $x_1 + x_2 = -p$; $x_1x_2 = q$

Do đó $p + q + 1 = x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 2003$ hay $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2003$.

Vì 2003 là số nguyên tố, giả sử $x_1 > x_2$, ta nhận được:

$$+ x_1 - 1 = 2003 \Rightarrow x_1 = 2004; x_2 - 1 = 1 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$\Rightarrow p = -2006, q = 4008$$

$$+ x_1 - 1 = -1 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 - 1 = -2003 \Rightarrow x_2 = -2002$$

$$\Rightarrow p = 2002, q = 0$$

Từ đó, ta có các phương trình bậc hai dạng $x^2 + px + q = 0$ thỏa mãn điều kiện bài toán: $x^2 - 2006x + 4008 = 0$; $x^2 + 2002x = 0$

Ví dụ 22: Tìm các số nguyên x, y thỏa phương trình $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

Giải

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \Rightarrow (2x + 2y)^2 = (2xy + 1)^2 - 1$$

$$\Rightarrow (2xy + 1 + 2x + 2y)(2xy + 1 - 2x - 2y) = 1$$

$$\Rightarrow 2xy + 1 + 2x + 2y = 2xy + 1 - 2x - 2y \Rightarrow x + y = 0$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có: $x = 0, y = 0$ hoặc $x = 1, y = -1$ hoặc $x = -1, y = 1$

Ví dụ 23: Cho a, b là các số nguyên dương sao cho $\frac{a+1}{a} + \frac{b+1}{b}$ cũng là số nguyên. Gọi d là ước số chung của a, b . Chứng minh $d \leq \sqrt{a+b}$.

Giải

Ta có: $\frac{a+1}{a} + \frac{b+1}{b} = 2 + \frac{a+b}{ab}$ là số nguyên dương $\Rightarrow \frac{a+b}{ab}$ nguyên dương
 $\Rightarrow \frac{a+b}{ab} \geq 1 \Rightarrow a+b \geq ab$ mà $a \geq d > 0$ và $b \geq d > 0 \Rightarrow a+b \geq ab \geq d^2$
 $\Rightarrow \sqrt{a+b} \geq d$ (đpcm)

Ví dụ 24: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho: $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Giải

Giả sử $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Vì $n^4 + n^3 + 1 > n^4 = (n^2)^2$ nên ta có:

$n^4 + n^3 + 1 = (n^2 + k)^2 = n^4 + 2kn^2 + k^2$, với k là một số nguyên dương nào đó. Suy ra: $n^2(n - 2k) = k^2 - 1 \geq 0$. Đặc biệt, $k^2 - 1$ thì $k = 1$; $n^2(n - 2) = 0$, ta có $n = 2$. Thử lại, $2^4 + 2^3 + 1 = 5^2$: thỏa mãn. Ngoài ra, khi $k \neq 1$ thì: $k^2 > k^2 - 1 \geq n^2 \Rightarrow k > n \Rightarrow n - 2k < 0$: mâu thuẫn với điều kiện $n^2(n - 2k) = k^2 - 1 \geq 0$.

Vậy, ta chỉ tìm được $n = 2$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 25: Tìm số nguyên có chín chữ số $A = \overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}$ trong đó $a_1 \neq 0$ và $\overline{b_1b_2b_3} = 2\overline{a_1a_2a_3}$, đồng thời A có thể viết được dưới dạng $A = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3^2 \cdot p_4^2$ với p_1, p_2, p_3, p_4 là bốn số nguyên tố khác nhau.

Giải

$$\begin{aligned} A &= \overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3} = \overline{a_1a_2a_3} \cdot 10^6 + \overline{b_1b_2b_3} \cdot 10^3 + \overline{a_1a_2a_3} \\ &= \overline{a_1a_2a_3} \cdot 10^6 + 2 \cdot \overline{a_1a_2a_3} \cdot 10^3 + \overline{a_1a_2a_3} = \overline{a_1a_2a_3} \cdot (10^6 + 2 \cdot 10^3 + 1) \\ &= \overline{a_1a_2a_3} (1002001) = \overline{a_1a_2a_3} \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \end{aligned}$$

Vậy $\overline{a_1a_2a_3}$ phải bằng bình phương của một số nguyên tố p khác với 7, 11, 13. Do $\overline{b_1b_2b_3} < 1000$ nên $\overline{a_1a_2a_3} < 500 \Rightarrow 10 < p < 23$. Như vậy, p chỉ có thể là 17 hoặc 19, do đó: $\overline{a_1a_2a_3} = 289$ hoặc $\overline{a_1a_2a_3} = 361$.

Ví dụ 26: Một số nguyên dương N có đúng 12 ước số (dương) khác nhau kể cả chính nó và 1, nhưng chỉ có 3 ước số nguyên tố khác nhau. Giả sử tổng của các ước số nguyên tố là 20, tính giá trị nhỏ nhất có thể có của N .

Giải

Gọi các ước nguyên tố của số N là p, q, r và $p < q < r$

$$\Rightarrow p = 2; q + r = 18 \Rightarrow \begin{cases} q = 5; r = 13 \\ q = 7; r = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 2^a \cdot 5^b \cdot 13^c \\ N = 2^a \cdot 7^b \cdot 11^c \end{cases}$$

Với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $(a+1)(b+1)(c+1) = 12 \Rightarrow 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

Do đó N có thể là $2^2 \cdot 5 \cdot 13; 2 \cdot 5^2 \cdot 13; 2 \cdot 5 \cdot 13^2; 2^2 \cdot 7 \cdot 11; 2 \cdot 7^2 \cdot 11; 2 \cdot 7 \cdot 11^2$

N nhỏ nhất nên $N = 2^2 \cdot 5 \cdot 13 = 260$

Ví dụ 27: Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa phương trình:

$$3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x - 6 = 0$$

Giải

Dễ thấy z^2 chia hết cho 3 $\Rightarrow z$ chia hết cho 3 $\Rightarrow z^2$ chia hết cho 9

* Xét $z^2 = 0$, ta có: $3x^2 + 6y^2 - 18x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 3(x-3)^2 + 6y^2 = 33 \Leftrightarrow (x-3)^2 + 2y^2 = 11$$

$$2y^2 \leq 11 \Rightarrow y^2 \leq 2^2 \Rightarrow y^2 = 0^2; 1^2; 2^2$$

$$+ y^2 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 11 \text{ (vô lí)}$$

$$+ y^2 = 1^2 \Rightarrow (x-3)^2 = 3^2 \Rightarrow x-3 = \pm 3 \Rightarrow x = 6 \text{ hoặc } x = 0$$

Có các nghiệm: $(x=6; y=1; z=0); (x=6; y=-1; z=0)$

$$(x=0; y=1; z=0); (x=0; y=-1; z=0)$$

$$+ y^2 = 2^2 \Rightarrow (x-3)^2 = 3 \text{ Vô lí}$$

* Xét $z^2 \geq 9$ ta có: $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33$$

$$+ y^2 \geq 1 \text{ thì } 2z^2 + 3y^2z^2 \geq 2 \cdot 9 + 3 \cdot 1 \cdot 9 > 33 \text{ (loại)}$$

$$+ y^2 = 0 \text{ thì } 3(x-3)^2 + 2z^2 = 33$$

$$z^2 = 9 \text{ thì } 3(x-3)^2 = 15 \text{ (loại); } z^2 > 9 \Rightarrow z^2 \geq 6^2 = 36$$

Ta có: $3(x-3)^2 + 2z^2 > 33$ (loại)

Nghiệm nguyên của phương trình là:

$$(x=6; y=1; z=0); (x=6; y=-1; z=0)$$

$$(x=0; y=1; z=0); (x=0; y=-1; z=0)$$

Ví dụ 28: Cho x, y là những số nguyên dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $x + y = 201$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x(x^2 + y) + y(y^2 + x)$$

Giải

$$P = x(x^2 + y) + y(y^2 + x) = x^3 + y^3 + 2xy$$

$$= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 2xy = 201^3 - 601xy$$

P lớn nhất khi xy bé nhất và P nhỏ nhất khi xy lớn nhất.

Bây giờ, xét x, y là các số nguyên dương với $x + y = 201$. Đặt $A = xy$, ta có $A = x(201 - x) = -x^2 + 201x$.

Suy ra A lớn nhất khi $\begin{cases} x = 100 \\ y = 101 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 101 \\ y = 100 \end{cases}$

A nhỏ nhất khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 200 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 200 \\ y = 1 \end{cases}$

Từ đó suy ra được các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất tương ứng của P .

Ví dụ 29: Tìm tất cả các cặp số nguyên p, q sao cho đẳng thức sau đúng:

$$\sqrt{p-2} + \sqrt{q-3} = \sqrt{pq-2p-q+1} \quad (\alpha)$$

Giải

Điều kiện: $p-2 \geq 0, q-3 \geq 0, pq-2p-q+1 \geq 0$. (p, q là các số nguyên)

Bình phương hai vế của (α) : $2\sqrt{p-2} \cdot \sqrt{q-3} = pq-3p-2q+6$.

Hay: $2\sqrt{(p-2)(q-3)} = (p-2)(q-3)$. Tiếp tục bình phương

$$4(p-2)(q-3) = (p-2)^2(q-3)^2.$$

+ Nếu $p=2$ thì (α) trở thành: $\sqrt{0} + \sqrt{q-3} = \sqrt{q-3}$, đúng với mọi số nguyên $q \geq 3$ tùy ý.

+ Nếu $q=3$ thì (α) trở thành: $\sqrt{p-2} + \sqrt{0} = \sqrt{p-2}$, đúng với mọi số nguyên $p \geq 2$ tùy ý.

+ Xét $p > 2$ và $q > 3$. Ta có: $4 = (p-2)(q-3)$ (p, q là các số nguyên).

Chỉ xảy ra các trường hợp:

1/ $p-2=1, q-3=4$; 2/ $p-2=2, q-3=2$; 3/ $p-2=4, q-3=1$.

Suy ra các cặp $(p; q)$ là $(3; 7), (4; 5), (6; 4)$

Kiểm tra lại đẳng thức (α) : $\sqrt{1} + \sqrt{4} = \sqrt{9}$; $\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{8}$; $\sqrt{4} + \sqrt{1} = \sqrt{9}$

Ví dụ 30: Tìm nghiệm tự nhiên $(x; y)$ của phương trình:

$$(x^2 + 4y^2 + 28) = 17(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49)$$

Giải

Biến đổi tương đương phương trình đã cho:

$$(*) \Leftrightarrow [x^2 + 4(y^2 + 7)]^2 = 17[x^4 + (y^2 + 7)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 8x^2(y^2 + 7) + 16(y^2 + 7)^2 = 17x^4 + 17(y^2 + 7)^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^4 - 8x^2(y^2 + 7) + (y^2 + 7)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [4x^2 - (y^2 + 7)]^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow (2x - y)(2x + y) = 7(1)$$

ABC

Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $2x - y \leq 2x + y$ và $2x + y \geq 0$, chúng đều có giá trị nguyên nên suy được: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$. Vậy phương trình có một nghiệm tự nhiên là $(2; 3)$

Cách khác: Sử dụng bất đẳng thức bunhiacovski để có:

$\left[1x^2 + 4(y^2 + 7)\right]^2 \leq \left[x^4 + (y^2 + 7)^2\right] \text{ hay } \left[x^2 + 4(y^2 + 7)\right]^2 \leq 17\left[x^4 + (y^2 + 7)^2\right]$, dấu bằng xảy ra (tức là có phương trình (*)) khi:

$$4x^2 = y^2 + 7 \Leftrightarrow (2x - y)(2x + y) = 7. \text{ Làm tiếp như trên}$$

Ví dụ 31: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để $n + 26$ và $n - 11$ đều là lập phương của số nguyên dương.

Giải

$$n + 26 = a^3 \text{ và } n - 11 = b^3 \text{ với } a > b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a^3 - b^3 = 37$$

$\Leftrightarrow (a^2 + ab + b^2)(a - b) = 37$. Ta có số 37 là số nguyên tố và do $a > b \in \mathbb{N}^*$ nên $(a^2 + ab + b^2) > (a - b)$ và là các số tự nhiên

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 37 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 12 = 0 \\ a - 1 = b \end{cases} \Leftrightarrow a = 4 \text{ và } b = 3 \text{ (còn } a = -3 \text{ và}$$

$b = -4$ bị loại). Thay vào đẳng thức $n + 26 = a^3$ hoặc $n - 11 = b^3$ ta có $n = 38$.

Ví dụ 32: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số (viết trong hệ thập phân) sao cho hai điều kiện sau đồng thời được thỏa mãn:

- (i) Mỗi chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.
- (ii) Tổng $p + q$ lấy giá trị nhỏ nhất, trong đó p là tỉ số của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị còn q là tỉ số của chữ số hàng nghìn và chữ số hàng trăm.

Giải

Xét số tùy ý có 4 chữ số $\overline{abcd}$ mà $1 \leq a < b < c < d \leq 9$. (a, b, c, d là các số nguyên). Ta tìm giá trị nhỏ nhất của $p + q = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

Do b, c là số tự nhiên nên: $c > b \Rightarrow c \geq b + 1$.

$$\text{Vì vậy: } p + q \geq \frac{b+1}{9} + \frac{1}{b} \text{ suy ra } p + q \geq \frac{1}{9} + \frac{b}{9} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{9} + 2\sqrt{\frac{b}{9} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{7}{9}$$

$$p + q = \frac{7}{9} \text{ khi } c = b + 1, d = 9, a = 1, \frac{b}{9} = \frac{1}{b}.$$

Vậy số thỏa mãn các điều kiện của bài toán là: 1349

Ví dụ 33: Chứng minh rằng với p là số nguyên tố lớn hơn 2 thì giá trị m trong phân số: $\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$ ($m \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}$), chia hết cho p .

Giải

Do p là số nguyên tố nên $p-1$ là số chẵn, suy ra

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{p-1} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{p-3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}} \right) \\ &= \frac{p}{1 \cdot (p-1)} + \frac{p}{2 \cdot (p-2)} + \frac{p}{3 \cdot (p-3)} + \dots + \frac{p}{\left(\frac{p-1}{2} \right) \left(\frac{p+1}{2} \right)} \\ &= p \left[\frac{1}{1 \cdot (p-1)} + \frac{1}{2 \cdot (p-2)} + \frac{1}{3 \cdot (p-3)} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{p-1}{2} \right) \left(\frac{p+1}{2} \right)} \right] \end{aligned}$$

Ta có $1 \cdot (p-1) \cdot 2 \cdot (p-2) \dots \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} = (p-1)!$ suy ra $\frac{m}{n}$ có dạng

$$\frac{m}{n} = p \frac{q}{(p-1)!} \Rightarrow m(p-1)! = pq \Rightarrow m(p-1)! \text{ chia hết cho } p \text{ mà } (p-1)! \text{ không chia hết cho } p, \text{ nên } m \text{ chia hết cho } p.$$

Ví dụ 34: Chứng minh rằng với n nguyên lớn hơn 1 thì $(n^n - n^2 + n - 1)$ chia hết cho $(n-1)^2$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Giả sử } n > 2, \text{ ta có } (n^n - n^2 + n - 1) &= (n^{n-2} - 1)n^2 + (n-1) \\ &= (n-1)(n^{n-3} + \dots + 1)n^2 + (n-1) = (n-1)(n^{n-1} + \dots + n^2 + 1) \end{aligned}$$

Ta thấy rằng $(n^k - 1)$ luôn chia hết cho $(n-1)$ nên

$$\begin{aligned} (n^{n-1} + \dots + n^2 + 1) &= (n^{n-1} + \dots + n^2 - n + n + 1) \\ &= (n^{n-1} - 1) + \dots + (n^2 - 1) + n - 1, \text{ suy ra } (n^{n-1} + \dots + n^2 + 1) \text{ chia hết cho } (n-1), \text{ do đó } (n^n - n^2 + n - 1) \text{ chia hết cho } (n-1)^2. \end{aligned}$$

Khi $n = 2$ thì $(n^n - n^2 + n - 1) = 1$ suy ra điều phải chứng minh.

ABC

Bài tập vận dụng

1. Giải phương trình nghiệm là số tự nhiên của phương trình sau:

$$2(x^2 - y^2) = 1978.$$

2. Tìm số có sáu chữ số đôi một khác nhau $\overline{abcdef}$ sao cho

$$\overline{abcdef} = a(1000\overline{cc}^2 - \overline{cc}).$$

3. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = 0$.

4. Chứng minh rằng: với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} \text{ không thể là một số nguyên}$$

5. Tìm tất cả các tam giác vuông có ba cạnh là số nguyên và có diện tích bằng chu vi.

6. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất bắt đầu từ chữ số 1 sao cho nếu chuyển 1 xuống vị trí cuối cùng thì số đã cho tăng lên ba lần.

7. Hãy tìm các chữ số a, b, c, d ; biết rằng $a, \overline{cd}, \overline{ad}, \overline{abcd}$ là các số chính phương.

8. Trong một hội nghị quốc tế có 6 đại biểu ở cùng một khách sạn. Nếu bất cứ 3 người nào gặp nhau thì trong họ có ít nhất 2 người có thể trò chuyện với nhau được. Chứng minh rằng có ba người từng đôi nói chuyện với nhau được.

9. Xác định số n , biết rằng, trong hệ đếm cơ số 7 thì n được viết $n = \overline{xyz}$, trong hệ đếm cơ số 11 thì nó được viết $n = \overline{zxy}$.

10. Tìm các số nguyên a, b, c sao cho đa thức: $(x + a)(x - 4) - 7$ phân tích thành thừa số được: $(x + b)(x + c)$.

11. Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $3x^2 + 10xy + 8y^2 = 96$

12. Chứng minh rằng tích của 4 số nguyên dương liên tiếp không thể là số chính phương.

13. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy$

14. Cho hai số dương x, y . Biết tổng của chúng bằng 6 lần trung bình nhân của chúng. Tính tỷ số $\frac{x}{y}$.

15. Cho $A = 1^{2005} + 2^{2005} + 3^{2005} + \dots + n^{2005}$; $B = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh $A \vdots B$

16. Tìm số tự nhiên có 5 chữ số, biết rằng số đó bằng lập phương của số tạo bởi chữ số hàng vạn và chữ số hàng nghìn của số đã cho (theo thứ tự đó).

17. Tìm số có ba chữ số sao cho tỉ số giữa số đó và tổng các chữ số của nó là bé nhất.
18. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7$ là số chính phương
19. Tìm $x; y; z; t$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y + z + t)$
20. Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 3\sqrt{xy}$. Tính $\frac{x}{y}$.
21. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.
22. Tìm các số nguyên a, b, c thỏa mãn cả hai phương trình $2a + 3b = 6$ và $3a + 4c = 1$

Hướng dẫn và đáp số

1. Ta có, từ phương trình đã cho, suy ra

$$2(x^2 - y^2) = 1978 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 989 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 23.43$$

Do x, y là số tự nhiên nên xảy ra các trường hợp sau

$$a. \begin{cases} x - y = 23 \\ x + y = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 33 \\ y = 10 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 23.43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 495 \\ y = 494 \end{cases}$$

2. Ta có $\overline{abcdef} = a(1000\overline{cc}^2 - \overline{cc}) \Leftrightarrow \overline{abcdef} = 121000ac^2 - 11ac$.

Do $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c, d, e, f \leq 9$, suy ra $11ac < 1100$,

$0 < \overline{abcdef} < 10^6$, nên xảy ra $a = 1, c = 2$ hoặc $a = 2, c = 1$, vì a khác c

* Khi $a = 2, c = 1$ ta có $\overline{abcdef} = 121000.2 - 22 = 241978$.

* Khi $a = 1, c = 2$ ta có $\overline{abcdef} = 121000.4 - 22 = 483978$.

3. Ta có $x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + z^2 + 2)^2 - (x^2 + 3) = y^4 \quad (1) \text{ hoặc}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + z^2 + 1)^2 + x^2 + 2z^2 = y^4 \quad (2)$$

Nhưng ta có $x^2 + 2z^2 \geq 0$ và $x^2 + 3 > 0; (\forall x, z \in \mathbb{Z})$. Từ (1) và (2), ta có

$$(x^2 + z^2 + 1)^2 \leq y^4 < (x^2 + z^2 + 2)^2 \Rightarrow y^4 = (x^2 + z^2 + 1)^2. \text{ Kết hợp với}$$

phương trình (1) ta có $x^2 + 2z^2 = 0 \Rightarrow x = z = 0$ nên $y = \pm 1$. Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x; y; z) = (0; 1; 0); (0; -1; 0)$.

$$4.. S = \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

$$S = (1 - \frac{1}{2^2}) + (1 - \frac{1}{3^2}) + (1 - \frac{1}{4^2}) + \dots + (1 - \frac{1}{n^2})$$

$$S = n - 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < n - 1. \text{ Vậy: } S < n - 1 \quad (1)$$

♦ Ta chứng minh: $S > n - 2$

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy: } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} &< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} \\ &< \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} \right) < 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } S > n - 1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right) = n - 2 + \frac{1}{n} > n - 2.$$

Vậy: $S > n - 2$ (2). Từ (1) và (2) ta suy ra: $n - 2 < S < n - 1$ với mọi số nguyên dương $n \geq 2$. Mà: $n - 2$ và $n - 1$ là hai số nguyên dương liên tiếp. Nên: S không là số nguyên.

5. Gọi x, y, z là các cạnh của tam giác vuông $1 \leq x \leq y < z$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 (*) \\ xy = 2(x + y + z) (**) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ } (*) \text{ ta có: } z^2 &= (x + y)^2 - 2xy = (x + y)^2 - 4(x + y + z) \\ &= (x + y)^2 - 4(x + y) - 4z \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4 \Leftrightarrow (z + 2)^2 = (x + y - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow x + y - 2 = z + 2 \quad (\text{vì } x + y \geq 2)$$

Thay $z = x + y - 4$ vào $(**)$ ta được:

$$(x - 4)(y - 4) = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 1 \\ y - 4 = 8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - 4 = 2 \\ y - 4 = 4 \end{cases} \quad (\text{vì } y \geq x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$$

Vậy độ dài các cạnh tam giác vuông cần tìm là: 5, 12, 13 hoặc 6, 8, 10.

6. Gọi số cần tìm là: $A = \overline{1a_1a_2\dots a_n}$

$$\text{Đặt } B = \overline{a_1a_2\dots a_n}. \text{ Ta có: } A = \overline{1B}$$

$$\text{. Theo đề bài ta có: } \overline{B1} = 3. \overline{1B}$$

$$\text{Suy ra: } 10B + 1 = 3(10^n + B) \Leftrightarrow B = \frac{3 \cdot 10^n - 1}{7}$$

$$\text{. Bằng phép thử với } n = 5 \text{ thì } B = 42857$$

$$\text{. Khi đó số bé nhất cần tìm là } A = 142857.$$

7. Do a chính phương nên a bằng 1, 4 hoặc 9. Do đó $\overline{ad}$ bằng 16 hay 49.

Suy ra $\overline{cd}$ bằng 16, 36 hay 49. Từ những điều này ta có $a = 1$ hoặc $a = 4$. Vậy $\overline{abcd}$ có dạng: $\overline{1b16}, \overline{1b36}, \overline{1b49}, \overline{4b16}, \overline{4b36}, \overline{4b49}$ trong này chỉ có 1936 là số chính phương.

8. Xét người A. Trong 5 người còn lại phải có ba người cùng nói chuyện được hoặc cùng không nói chuyện được với A, ta gọi ba người này là B, C, D. Giả sử cả B, C, D cùng nói chuyện được với A. Theo giả thiết, có ít nhất hai trong ba người ấy nói chuyện được với nhau, cùng với A, họ lập thành một bộ ba cần tìm.

Giả sử B, C, D cùng không nói chuyện được với A. Theo giả thiết, suy ra rằng nhóm (B, C, A) có B, C nói chuyện với nhau; nhóm (B, D, A) có B, D nói chuyện với nhau; nhóm (C, D, A) có D, C nói chuyện với nhau. Vậy lúc này (B, C, D) là bộ ba phải tìm.

9. Ta phải có $0 \leq x, y, z \leq 6$. Từ giả thiết:

$$49x + 7y + z = 121z + 11x + y \Rightarrow 19x = 60z - 3y$$

Do đó x chia hết cho 3, tức là $x = 3$ hoặc $x = 6$.

* $x = 3$ thì $y = 20z - 19$, suy ra $z = 1$; $y = 1$.

* $x = 6$ thì $y = 30z - 38$ (loại).

Vậy, số phải tìm là 155, viết trong cơ số 7 là 311 và trong cơ số 11 là 131.

10. Với mọi x ta có: $(x + a)(x - 4) - 7 = (x + b)(x + c)$

Nên với $x = 4$ thì $-7 = (4 + b)(4 + c)$

Có 2 trường hợp: $\begin{cases} 4 + b = 1 \\ 4 + c = -7 \end{cases}$ và $\begin{cases} 4 + b = 7 \\ 4 + c = -1 \end{cases}$

Trường hợp thứ nhất cho $b = -3$; $c = -11$; $a = -10$.

Ta có: $(x - 10)(x - 4) - 7 = (x - 3)(x - 11)$

Trường hợp thứ hai cho $b = 3$; $c = -5$; $a = 2$

Ta có $(x + 2)(x - 4) = (x + 3)(x - 5)$

11. $3x^2 + 10xy + 8y^2 = 96$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4xy + 6xy + 8y^2 = 96 \Leftrightarrow (3x^2 + 6xy) + (4xy + 8y^2) = 96$$

$\Leftrightarrow 3x(x + 2y) + 4y(x + 2y) = 96 \Leftrightarrow (x + 2y)(3x + 4y) = 96$. Do x, y nguyên dương nên $x + 2y$; $3x + 4y$ nguyên dương và $3x + 4y > x + 2y \geq 3$. Mà $96 = 2^5 \cdot 3$ có các ước là 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24; 32; 48; 96 được biểu diễn thành tích 2 thừa số không nhỏ hơn 3 là: $96 = 3 \cdot 32 = 4 \cdot 24 = 6 \cdot 16 = 8 \cdot 12$.

Lại có $x + 2y$ và $3x + 4y$ có tích là 96 (số chẵn) có tổng $4x + 6y$ là số

chẵn do đó $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x + 4y = 24 \end{cases}$. Hệ phương trình này vô nghiệm.

$$\text{Hoặc } \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x + 4y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Hoặc $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$. Hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy các số x, y nguyên dương cần tìm là $(x, y) = (4, 1)$

12. Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là $x; x+1; x+2; x+3$ với x nguyên dương. Giả sử $x(x+1)(x+2)(x+3) = k^2 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2+3x+2) = k^2$
 $\Leftrightarrow (x^2+3x+1)^2 - 1 = k^2$. Trong đó $(x^2+3x+1)^2$ và k^2 là hai số chính phương hơn kém nhau 1 đơn vị nên $(x^2+3x+1)^2 = 1$ và $k^2 = 0$
 $\Rightarrow x = 0; x = -3$ trái với giả thiết. Vậy tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không thể là số chính phương.

b) Chứng minh rằng với số nguyên dương a chia cho 4 dư 2 thì biểu thức $P = 3^n + an + 3$ chia hết cho 4 với số nguyên dương n bất kỳ.

b) $P = 3^n + an + 3$ với n nguyên dương

Với $a = 4m + 2 (m \in \mathbb{N}^*)$ thì $P = 3^n + (4m + 2)n + 3$

* $n = 1$ thì $P = 3 + 4m + 2 + 3 = 8 + 4m : 4$

* Giả sử $P = 3^n + (4m + 2)n + 3 : 4$ với $n = k$, tức là:

$$P_k = 3^k + (4m + 2)k + 3 : 4$$

* Ta có: $P_{k+1} = 3^{k+1} + (4m + 2)(k + 1) + 3$

$$= 3^k \cdot (2 + 1) + (4m + 2)k + 4m + 2 + 3 = 3^k \cdot 2 + 3^k + (4m + 2)k + 4m + 2 + 3$$

$$= P_k + 3^k \cdot 2 + 4m + 2 = P_k + 4m + 2(3^k + 1) : 4. \text{ Vậy } P : 4 \text{ với } a = 4m + 2$$

13. $x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy$ (1). Ta có $x = y = 0$ là một nghiệm của phương trình. Xét $x; y \neq 0$. Từ (1) $\Leftrightarrow y^2(x^2 - 7) = (x + y)^2 \Rightarrow x^2 - 7$ là số chính phương $\Rightarrow x^2 - 7 = a^2 \Rightarrow (x - a)(x + a) = 7$

Kết quả: $(x; y) = (0; 0); (4; -1); (4; 2); (-4; 1); (-4; -2)$

14. Ta có $x + y = 6\sqrt{xy}$. Chia cả hai vế cho y ta được: $\frac{x}{y} + 1 = 6\sqrt{\frac{x}{y}}$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}} > 0$; ta có phương trình: $t^2 - 6t + 1 = 0$

Giải phương trình ta được hai nghiệm: $t_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ và $t_2 = 3 - 2\sqrt{2}$

$$\text{Vậy } \frac{x}{y} = t^2 = 17 \pm 2\sqrt{2}.$$

15. $B = 1 + 2 + 3 + \dots + n \Rightarrow 2B = n(n + 1)$

$$A = 1^{2005} + 2^{2005} + 3^{2005} + \dots + n^{2005}$$

$$\Rightarrow 2A = (1^{2005} + n^{2005}) + [2^{2005} + (n-1)^{2005}] + \dots$$

$$+ [(n-1)^{2005} + 2^{2005}] + (n^{2005} + 1^{2005})$$

Các biểu thức trong ngoặc đều chia hết cho $n + 1$ nên: $2a : (n + 1)$ (1)

Lại có:

$$2A = (1^{2005} + (n-1)^{2005}) + [2^{2005} + (n-2)^{2005}] + \dots \\ + [(n-1)^{2005} + 1^{2005}] + 2n^{2005}$$

Các biểu thức trong dấu ngoặc đều chia hết cho n nên: $2A:n$ (2)

Vì n và $n+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau nên từ (1) và (2) suy ra $2A:n(n+1) = 2B$. Vậy $A:B$.

16. Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$, ta có: $\overline{abcde} = \overline{ab}^3$

Đặt $x = \overline{ab}$; $y = \overline{cde}$ ($0 \leq y < 1000$). Ta có: $1000x + y = x^3$ (1)

$$\Rightarrow 1000x \leq x^3 \Rightarrow 1000 \leq x^2 \Rightarrow 32 \leq x$$
 (2)

Vì $y < 1000$ nên từ (1) $\Rightarrow 1000x + 1000 > x^3 \Rightarrow x(x^2 - 1000) < 1000$

$$\Rightarrow x < 33$$
 (3). Từ (2) và (3) suy ra $x = 32$.

Vậy số cần tìm là $32^3 = 32768$.

17. Gọi số có ba chữ số cần tìm là $\overline{abc}$ ($a; b; c \in \mathbb{N}; 0 < a \leq 9; 0 \leq b; c \leq 9$).

$$\text{Ta có: } k = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} = \frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 1 + \frac{99a+9b}{a+b+c}$$

Với a, b xác định thì k bé nhất khi c lớn nhất $\Rightarrow c = 9$

$$k = 1 + \frac{99a+9b}{a+b+9} = 1 + \frac{9(a+b+9)+90a-81}{a+b+9}$$

$$= 1 + 9 + \frac{90a-81}{a+b+9} = 10 + \frac{90a-81}{a+b+9}$$

Với a xác định thì k bé nhất khi b lớn nhất $\Rightarrow b = 9$

$$k = 10 + \frac{90a-81}{a+18} = 10 + 9 \cdot \frac{10a-9}{a+18} = 10 + 9 \cdot \frac{10(a+18)-189}{a+18}$$

$$= 10 + 90 - \frac{9 \cdot 189}{a+18} = 100 - \frac{9 \cdot 189}{a+18} \text{ bé nhất khi } a \text{ bé nhất } \Rightarrow a = 1$$

Vậy số phải tìm là 199 và $k = \frac{199}{19}$

18. $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7$ là số chính phương

$$\Leftrightarrow 4(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7) = k^2 \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 28 = k^2$$

$$\Leftrightarrow (2n^2 + 2n + 1)^2 + 27 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - (2n^2 + 2n + 1) = 27$$

$$\Leftrightarrow (k + 2n^2 + 2n + 1)(k - 2n^2 - 2n - 1) = 27$$

Xét các trường hợp xảy ra tìm được $n = 2$ hoặc $n = -3$

19. $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y + z + t)$

Nhân cả hai vế của phương trình với 4:

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 = 4xy + 4xz + 4xt$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 + x^2 - 4xz + 4z^2 + x^2 - 4xt + 4t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (x - 2t)^2 = 0$$

Suy ra $x = y = z = t = 0$.

20. Ta có: $x + y = 3\sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + 1 = 3\sqrt{\frac{x}{y}} \quad (1)$

Đặt $u = \frac{x}{y}$ ta có $u > 0$ và $(1) \Leftrightarrow u^2 - 3u + 1 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^2$

21. **Cách 1:** Vai trò của x và y như nhau nên ta có thể giả sử: $x \geq y$.

Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$; $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \Rightarrow y > 2$

$$x \geq y > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{y} \Rightarrow y \leq 4. \text{ Do đó: } y = 3 \text{ hay } y = 4.$$

Với $y = 3$ thì $x = 6$. Do tính đối xứng ta cũng có: $x = 3$ và $y = 6$.

Với $y = 4$ thì $x = 4$.

Cách 2: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x + y) = xy \Leftrightarrow 2x - xy + 2y = 0$

$$\Leftrightarrow x(2 - y) - 2(2 - y) = -4$$

$$(2 - x)(2 - y) = 4 = 1.4; 4.1; (-1)(-4); (-4)(-1); 2.2; (-2)(-2).$$

Vì $x, y > 0$ nên $2 - x < 2, 2 - y < 2$. Do đó ta có các trường hợp:

- $2 - x = 1$ và $2 - y = 4 \Leftrightarrow x = 1$ và $y = -2$ (loại).
- $2 - x = -1$ và $2 - y = -4 \Leftrightarrow x = 3$ và $y = 6$ (nhận).
- $2 - x = -4$ và $2 - y = -1 \Leftrightarrow x = 6$ và $y = 3$ (nhận).
- $2 - x = -2$ và $2 - y = -2 \Leftrightarrow x = 4$ và $y = 4$ (nhận).

22. để khử a , ta biến đổi các phương trình đã cho thành $6a + 9b = 18$ và

$$6a + 8c = 2. \text{ Suy ra } 9b - 8c = 16. \text{ Do đó } c = \frac{9ab - 16}{8} = b - 2 + \frac{b}{8}$$

b và c là các số nguyên khi và chỉ khi $\frac{b}{8}$ là số nguyên.

Đặt $b = 8k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $c = 8k - 2 + k = 9k - 2$.

Thay vào $3a + 4c = 1$ được $3a = 1 - 4(9k - 2) = -36k + 9$, do đó $a = -12k + 3$.

Các số nguyên a, b, c phải tìm có dạng: $a = -12k + 3, b = 8k, c = 9k - 2$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Chương 5. Phương trình vô tỷ

Một số kiến thức cơ bản

Dạng căn thức bậc chẵn:

$$\sqrt[2k]{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^{2k} \end{cases}; \sqrt[2k]{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A \leq B^{2k} \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A \leq B^{2k} \end{cases}$$

Phương pháp chung

1. Phương pháp thứ nhất

Sử dụng phép biến đổi tương đương để đưa về các dạng cơ bản của phương trình đại số.

Dùng phép biến đổi tương đương hay phép khử căn thức đối với phương trình chứa căn thức:

$$\text{Ta có } \sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2n}(x) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x)$$

2. Phương pháp thứ hai: Biến đổi đưa về phương trình tích

Để giải một phương trình nói chung, phương trình chứa căn thức nói riêng, người ta thường sử dụng phương pháp đưa về phương trình tích với dạng như sau: $f(x).g(x).h(x) = 0$. Trong đó các phương trình

$$f(x) = 0$$

$$g(x) = 0$$

$$h(x) = 0$$

là những phương trình đơn giản, đã biết phương pháp giải như phương trình bậc nhất, phương trình bậc 2... Nghiệm của phương trình cần giải là tập nghiệm của các phương trình: $f(x) = 0, g(x) = 0, \dots, h(x) = 0$.

3. Phương pháp thứ ba: Phương pháp đặt ẩn số phụ

Trong quá trình giải phương trình nói chung và phương trình chứa căn thức nói riêng, chúng ta cần phải sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ. Người ta dùng ẩn số phụ đó thay thế cho một biểu thức chứa ẩn nào đó nhằm mục đích hạ bậc của phương trình, đưa phương trình đã cho về những phương trình dạng đã biết. Giải phương trình với ẩn phụ, sau đó tìm nghiệm của phương trình.

4. Phương pháp thứ tư

Phương pháp sử dụng các kiến thức về bất đẳng thức:

Để giải phương trình nói chung và phương trình chứa căn thức nói riêng, người ta còn sử dụng các kiến thức về bất đẳng thức, các tính chất bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối, bất đẳng thức Côsi, bất đẳng thức Bunhiacôpski. Trong phương pháp này chủ yếu đưa về 2 dạng sau:

Dạng 1: Đưa phương trình về dạng: $f(x) = g(x)$ mà $f(x) \geq a$

(a là hằng số), $g(x) = a$. Nghiệm của phương trình là nghiệm của hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$$

Dạng 2: Đưa phương trình cần giải về dạng $h(x) = a$ (a là hằng số) mà ta luôn có $h(x) \geq a$. Hoặc $h(x) \leq a$, thì nghiệm của phương trình là giá trị của biến x làm cho dấu đẳng thức xảy ra.

Áp dụng tính chất: $|a| + |b| \geq |a + b|$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a, b \geq 0$).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

5. Phương pháp thứ năm: Phương pháp chứng minh nghiệm duy nhất

Với một số phương trình, ta có thể khử trực tiếp để thấy một vài nghiệm của phương trình, rồi tìm cách chứng minh rằng ngoài ra phương trình không có nghiệm nào khác.

6. Phương pháp thứ sáu: Phương pháp đưa về hệ phương trình

Khi giải phương trình, có những phương trình chúng ta cần đặt các ẩn phụ thích hợp để đưa về việc giải phương trình đã cho về một hệ phương trình quen thuộc.

7. Phương pháp thứ 7: Phương pháp đưa về tổng các số không âm

Khi giải phương trình nói chung và phương trình chứa căn thức nói riêng, ta có thể biến đổi từ phương trình: $f(x) = 0$ về dạng:

$f_1^2(x) + f_2^2(x) + \dots + f_n^2(x) = 0$. Vậy nghiệm của phương trình là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \dots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$$

Phương pháp này người ta thường áp dụng cho phương trình chứa căn có nhiều ẩn số.

8. Phương pháp thứ 8: Phương pháp vận dụng tính chia hết của nghiệm.
 9. Phương pháp thứ 9: Phương pháp sử dụng các tính chất của số vô tỷ.
 10. Phương pháp thứ 10: Sử dụng đồ thị và các kiến thức về tam thức bậc 2 để giải và biện luận phương trình chứa căn thức có tham số.

Các ví dụ minh họa

1. Phương pháp biến đổi tương đương

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2$.

Giải

$$\text{Ta có : } \sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2x - x^2 = (x - 2)^2 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = 3$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt[3]{16 - x^3} = 4 - x$.

Giải

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{16 - x^3} = 4 - x &\Leftrightarrow 16 - x^3 = (4 - x)^3 \\ \Leftrightarrow 16 - x^3 &= 4^3 - 3 \cdot 4^2 x + 3 \cdot 4 \cdot x^2 - x^3 \Leftrightarrow 12x^2 - 48x + 48 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 &= 0 \Rightarrow x = 2. \text{ Vậy nghiệm của phương trình } x = 2. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{3x + 5} - \sqrt{x - 1} = 4$.

Giải

Viết phương trình thành dạng: $\sqrt{3x + 5} = \sqrt{x - 1} + 4$ (1)

Trên tập hợp $K = [1; \infty)$ là miền xác định của phương trình, cả 2 vế của phương trình đều không âm. Mặt khác hàm số $\varphi(t) = t^2$, là hàm đơn điệu, với $t \geq 0$, nên trong tập K này, phương trình ban đầu tương đương với phương trình: $(\sqrt{3x + 5})^2 = (\sqrt{x - 1} + 4)^2$. Phương trình (1) tương

$$\text{đương với hệ sau : } \begin{cases} 3x + 5 = x - 1 + 16 + 8\sqrt{x - 1} \\ x \in [1; \infty) \end{cases} \Leftrightarrow 4\sqrt{x - 1} = x - 5$$

Trong tập hợp $L = [5; \infty)$, cả 2 vế của phương trình đều có giá trị không âm nên nó tương đương với hệ sau :

$$\begin{cases} 16x - 16 = x^2 - 10x + 25 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 + 8\sqrt{2} \\ x = 13 - 8\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 13 + 8\sqrt{2} \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 13 + 8\sqrt{2}$

Chú ý: Khi giải phương trình này, có thể làm đơn giản hơn, bằng cách 2 lần bình phương 2 vế để phá căn. Kết quả ta có phương trình bậc 2. Sau đấy kiểm tra lại để loại nghiệm ngoại lai. Tuy nhiên vấn đề kiểm tra không phải bao giờ cũng làm được.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$

Giải

Trong miền xác định $K = \left[\frac{5}{2}; \infty\right)$, cả hai vế của phương trình nhận các giá trị không âm. Vì vậy, phương trình này tương đương với hệ:

$$\begin{cases} 3x - 3 + 2\sqrt{2x-5} \cdot \sqrt{x+2} = 2x + 1 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2x-5} \cdot \sqrt{x+2} = -x + 4 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Cả hai vế của phương trình đầu trong hệ phương trình trên đều nhận các giá trị không âm trong $H = \left[\frac{5}{2}; 4\right] \subset K$. Suy ra phương trình đầu tương đương với hệ:

$$\begin{cases} 8x^2 - 4x - 40 = x^2 - 8x + 16 \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + 4x - 56 = 0 \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 \pm 6\sqrt{11}}{7} \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{-2 + 6\sqrt{11}}{7}$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\sqrt{10x-1} - \sqrt{x+3} = 1$.

Giải:

Bình phương 2 vế của phương trình. Do vậy phép toán này dẫn tới phương trình hệ quả:

$$11x + 2 - 2\sqrt{10x-1} \cdot \sqrt{x+3} = 1 \text{ hay } 2\sqrt{10x-1} \cdot \sqrt{x+3} = 11x + 1$$

Bình phương 2 vế của phương trình lần nữa ta được phương trình hệ quả mới: $4(10x^2 + 29x - 3) = 121x^2 + 22x + 1 \Leftrightarrow 81x^2 - 94x + 13 = 0$. Phương trình này có 2 nghiệm $x = 1, x = \frac{13}{81}$.

Cần kiểm tra xem chúng có thỏa mãn phương trình đã cho không. Thử lại, ta có $x = \frac{13}{81}$ không thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Nhận xét: Nghiệm ngoại lai $x = \frac{13}{81}$ nằm trong miền xác định của phương

trình đầu. Điều ấy có nghĩa là: nguyên nhân xuất hiện nghiệm ngoại lai không phải do mở rộng miền xác định mà do việc sử dụng hàm số không đơn điệu. Việc giải phương trình có chứa căn thức, không phải bao giờ cũng tìm tập xác định, có khi chúng ta giải bằng cách đưa về phương trình hệ quả, sau đó thử lại.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $x - \sqrt{2x+3} = 0$.

Giải

Ta có:

$$x = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 7: Giải phương trình: $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt{x+4} = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \\ x+4 = (\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 2x+1 = \sqrt{2x^2-3x+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 2x+1 \geq 0 \\ (2x+1)^2 = 2x^2-3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x^2+7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{7}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Ví dụ 8: Giải phương trình: $x^2 - 7x = 6\sqrt{x+5} - 30$.

Giải

$$x^2 - 7x = 6\sqrt{x+5} - 30 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 6\sqrt{x+5} + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) + (x + 5 - 6\sqrt{x+5} + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (\sqrt{x+5} - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 = 0 \\ (\sqrt{x+5} - 3)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ \sqrt{x+5}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \sqrt{x+5}=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{4\}$.

2. Phương pháp biến đổi đưa về phương trình tích

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+10x+21} = 3\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x+7} - 6$ (1)

Giải

$$\text{Điều kiện: } x \geq -3 \quad (1) \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(x+7)} - 3\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+7} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+3} - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7} - 3 = 0 \\ \sqrt{x+3} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x_1 = 1; x_2 = 2$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = -\sqrt{x^2 - x} \quad (1)$

Giải

$$\text{Ta có } x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2); x^2 - x = x(x-1). \text{ Điều kiện: } x \geq 3$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = -\sqrt{x^2 - x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-3} + \sqrt{x-2} + \sqrt{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \sqrt{x-3} + \sqrt{x-2} + \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 2 \quad (2)$

Giải

$$\text{Tập xác định: } \begin{cases} 2x^2 + 8x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3, x \geq -1 \\ x \leq -1, x \geq 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \leq -3, x = -1, x \geq 1$. Riêng giá trị $x = -1$: thỏa mãn (2) $\Rightarrow x = -1$ là một nghiệm. Với $x \leq -3$: Không thỏa mãn (2) vì vế phải âm.

$$\text{Với } x \geq 1: (2) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(2x+6)} + \sqrt{(x-1)(x+1)} = 2\sqrt{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+6} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+1}, \text{ bình phương 2 vế}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x+6)(x-1)} = x-1 = \sqrt{(x-1)(x-1)}$$

$$\begin{cases} x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ 2\sqrt{2x+6} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = -\frac{25}{7} \end{cases}$$

$$(loại)$$

Kết luận: phương trình (2) có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 1$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$

Giải

$$\text{Điều kiện } x \geq 2. \text{ Khi đó phương trình } \Leftrightarrow 2(3-x) = \sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow 2(3-x)(\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}) = 8(3-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2} = 4 \end{cases} \quad (1)$$

Giải phương trình (1) ta nhận được nghiệm $x = \frac{11 - \sqrt{15}}{2}$.

3. Phương pháp đặt ẩn số phụ

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{2x-2} + 2\sqrt{(2x-3)} + \sqrt{2x+13} + 8\sqrt{2x-3} = 7$

Giải

Đặt $y = \sqrt{2x-3}$. Điều kiện $y \geq 0 \Rightarrow x = \frac{y^2+3}{2}$ nên phương trình đã cho

trở thành: $\sqrt{y^2+2y+1} + \sqrt{y^2+8y+16} = 7$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{(y+4)^2} = 7 \Leftrightarrow |y+1| + |y+4| = 7.$$

Do $y \geq 0 \Rightarrow y = 1$ hay $2x-3=1$. Suy ra $x = 2$. Thử lại ta có nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x(x+5) = 2\sqrt[3]{x^2+5x-2}$.

Giải

Đặt $y = \sqrt[3]{x^2+5x-2} \Rightarrow x^2+5x = y^3+2$. Nên phương trình đã cho là:

$y^3-2y+4=0 \Leftrightarrow (y+2)(y^2-2y+2)=0$. Ta có $y^2-2y+2=0$ có $\Delta < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy $y = -2$ hay $x^2+5x = (-2)^3+2 \Rightarrow (x+2)(x+3) = 0$.

Suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x_1 = -2, x_2 = -3$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = 3$

Giải

Đặt $X = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$ thì $\sqrt{(3+x)(6-x)} = \frac{X^2-9}{2}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$X - \frac{X^2-9}{2} = 3 \Leftrightarrow 2X - X^2 + 9 = 6 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -1 \\ X = 3 \end{cases}$$

* $X = -1 \Leftrightarrow \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = -1$ vô nghiệm

* $X = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 6 \\ 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -3 \end{cases}$$

Chú ý: Ở thí dụ trên, các bạn cũng có thể đưa vào hai ẩn phụ: $u = \sqrt{3+x} \geq 0$

và $v = \sqrt{6-x} \geq 0$ để có hệ: $\begin{cases} u^2 + v^2 = 9 \\ u + v - uv = 3 \end{cases}$

Giải hệ trên, các bạn được nghiệm: $\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5$

Giải

1) Điều kiện $-1 \leq x \leq 4$. Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} > 0$ ta có $\sqrt{(x+1)(4-x)} = \frac{t^2 - 5}{2}$.

Vậy ta có phương trình $t + \frac{t^2 - 5}{2} = 5 \Rightarrow t = -5$ (loại), $t = 3$. Từ đó ta có phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = 3$, giải phương trình này bằng phép bình phương, suy ra phương trình có nghiệm: $x = 0, x = 3$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x + \sqrt{4-x^2} = 2 + 3x\sqrt{4-x^2}$ (1)

Giải

Phương trình được xác định khi và chỉ khi: $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 2$ (2)

$$\text{Đặt } x + \sqrt{4-x^2} = t \Rightarrow x\sqrt{4-x^2} = \frac{t^2 - 4}{2}.$$

$$\text{Thay vào (1): } t = 2 + 3 \cdot \frac{t^2 - 4}{2} \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2, t_2 = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Với } t_1 = 2: x + \sqrt{4-x^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = 2-x$$

$$\Leftrightarrow 4 - x^2 = (2-x)^2 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2 \text{ (thỏa mãn (2))}$$

$$\text{Với } t_2 = -\frac{4}{3}: x + \sqrt{4-x^2} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = -x - \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -\frac{4}{3} \\ 4 - x^2 = x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -\frac{4}{3} \\ 9x^2 + 12x - 10 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Giải (4) ta được } x_3 = \frac{-6 - \sqrt{126}}{9}, x_4 = \frac{-6 + \sqrt{126}}{9}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{-6 - \sqrt{126}}{9}, x_4 = \frac{-6 + \sqrt{126}}{9}.$$

4. Phương pháp sử dụng các kiến thức về bất đẳng thức

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$

Giải

$$\text{Ta có: } 3x^2 + 6x + 7 = 3(x+1)^2 + 4$$

$$5x^2 + 10x + 14 = 5(x+1)^2 + 9; 4 - 2x - x^2 = 5 - (x+1)^2$$

$$\text{Do đó: } \sqrt{3x^2 + 6x + 7} \geq 2; 4 - 2x - x^2 \leq 5; \sqrt{5x^2 + 10x + 14} \geq 3$$

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $(x+1)^2 = 0$, hay $x = -1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = -1$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 - 8x + 12} = 3 - \sqrt[4]{3x^2 - 12x + 13}$

Giải

Ta có: $2x^2 - 8x + 12 = 2(x - 2)^2 + 4$

$$3x^2 - 12x + 13 = 3(x - 2)^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 8x + 12} \geq 2$$

$$\sqrt[4]{3x^2 - 12x + 13} \geq 1. \text{ Do đó phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 2$.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 11} + \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt[4]{x^2 - 4x + 5} = 3 + \sqrt{2} \quad (1)$$

Giải

$$\sqrt{x^2 - 6x + 11} + \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt[4]{x^2 - 4x + 5} = 3 + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + 2} + \sqrt{(x - 3)^2 + 4} + \sqrt[4]{(x - 2)^2 + 1} = 3 + \sqrt{2}$$

$$\text{Mà } \sqrt{(x - 3)^2 + 2} + \sqrt{(x - 3)^2 + 4} + \sqrt[4]{(x - 2)^2 + 1} \geq 3 + \sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra phương trình đã cho có nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 = 0 \\ (x - 2)^2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $x^2 - 3x + \frac{7}{2} = \sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 4x + 5)}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ (a, b \geq 0)$. Dấu bằng xảy ra khi

và chỉ khi $a = b$. Ta có: $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$.

Ta có: $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 > 0$.

$$\text{Nên } \frac{x^2 - 2x + 2 + x^2 - 4x + 5}{2} \geq \sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 4x + 5)}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = x^2 - 4x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\sqrt{5x^3 + 3x^2 + 3x - 2} = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}$

Giải

$$\text{Ta có: Từ phương trình: } \sqrt{5x^3 + 3x^2 + 3x - 2} = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}$$

ABC

Mà $5x^3 + 3x^2 + 3x - 2 = (x^2 + x + 1)(5x - 2)$.

$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$. Nên $5x^3 + 3x^2 + 3x - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 5x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{5}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số: $a = x^2 + x + 1, b = 5x - 2$.

Ta có: $\sqrt{(x^2 + x + 1)(5x - 2)} \leq \frac{(x^2 + x + 1)(5x - 2)}{2} = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ Hay $x^2 + x + 1 = 5x - 2 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 3$

Nghiệm của phương trình là: $x_1 = 1; x_2 = 3$.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$ (1).

Giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$

$\Rightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |3-\sqrt{x-1}| = 1$.

Áp dụng tính chất: $|a| + |b| \geq |a+b|$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

Ta có: $|\sqrt{x-1}-2| + |3-\sqrt{x-1}| \geq |\sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1}| = 1$

Dấu bằng xảy ra $(\sqrt{x-1}-2)(3-\sqrt{x-1}) \geq 0$. Đặt $\sqrt{x-1} = y, y \geq 0$

$\Rightarrow (y-2)(3-y) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$

$\Rightarrow 4 \leq x-1 \leq 9 \Rightarrow 5 \leq x \leq 10$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $5 \leq x \leq 10$.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $3x + 4y = 5\sqrt{x^2 + y^2}$ (1).

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Từ phương trình (1) ta có: $(3x + 4)^2 \leq (3^2 + 4^2 y)(x^2 + y^2) = 25(x^2 + y^2)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$, Hay $y = \frac{4}{3}x$. Vậy nghiệm của

phương trình là: $\begin{cases} x = a \\ y = \frac{4}{3}a \end{cases} (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

Ví dụ 8: Giải phương trình: $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

Giải

Điều kiện $2 \leq x \leq 4$. Ta có: $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \geq 2$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski:

$$(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})^2 \leq [(\sqrt{x-2})^2 + (\sqrt{4-x})^2](1^2 + 1^2)$$

$\Rightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leq 2$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$. Thế vào phương trình

$\Rightarrow x = 3$ là nghiệm của phương trình.

5. Phương pháp chứng minh nghiệm duy nhất

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2 + 26} + 3\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 8$.

Giải

Điều kiện: $x \geq 0$. Ta thấy: $x = 1$ là một nghiệm của phương trình:

* Với $0 \leq x < 1$ thì: $\sqrt[3]{x^2 + 26} + 3\sqrt{x} + \sqrt{x+3} \leq \sqrt[3]{1 + 26} + 3\sqrt{1} + \sqrt{1+3} = 8$.

Vậy khi $0 \leq x < 1$ phương trình không có nghiệm.

* Với $x > 1$: $\sqrt[3]{x^2 + 26} + 3\sqrt{x} + \sqrt{x+3} > \sqrt[3]{1 + 26} + 3\sqrt{1} + \sqrt{1+3} = 8$

Do đó khi $x > 1$ phương trình vô nghiệm. Vậy phương trình chỉ có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2 + 28} + 2\sqrt[3]{x^4 + 11} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x} = \sqrt{2} + 9$

Giải

Điều kiện: $x \geq 1$. Ta thấy $x = 2$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Nếu $1 \leq x < 2$ thì

$$\sqrt[3]{x^2 + 28} + 2\sqrt[3]{x^4 + 11} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x} < \sqrt[3]{32} + 2\sqrt[3]{27} + \sqrt{1} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 9$$

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm. Tương tự với $x > 2$ phương trình đã cho vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

6. Phương pháp đưa về hệ phương trình

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{2x + \sqrt{x+1} + 1} + \sqrt{2x - \sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} + 1$

Giải

Đặt $\sqrt{2x + \sqrt{x+1} + 1} = u$; $\sqrt{2x - \sqrt{x+1}} = v$

$$\text{Xét } u^2 - v^2 = (\sqrt{2x + \sqrt{x+1} + 1})^2 - (\sqrt{2x - \sqrt{x+1}})^2 = 2\sqrt{x+1} + 1.$$

$$\text{Từ đó ta có hệ phương trình: } \begin{cases} u + v = 2\sqrt{x+1} + 1 \\ u^2 - v^2 = 2\sqrt{x+1} + 1; u \geq 0; v \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình trên ta có: } \begin{cases} u = \sqrt{x+1} + 1 \\ v = \sqrt{x+1} \end{cases}.$$

Suy ra: $\sqrt{2x - \sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = 3$. Nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$.

ABC

Ví dụ 2: Giải phương trình: $(\sqrt[3]{3x+1})^2 + (\sqrt[3]{3x-1})^2 + \sqrt[3]{9x^2-1} = 1$

Giải

Đặt $\sqrt[3]{3x+1} = u$; $\sqrt[3]{3x-1} = v$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + uv = 1 \\ u^3 - v^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)(u^2 + v^2 + uv) = 2 \\ u^2 + v^2 + uv = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 2 \\ u^2 + v^2 + uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình này ta có: $\begin{cases} \sqrt[3]{3x+1} = 1 \\ \sqrt[3]{3x-1} = -1 \end{cases}$.

Suy ra $x = 0$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $-x^2 + 2 = \sqrt{2-x}$

Giải

Điều kiện: $x \leq 2$. Đặt $\sqrt{2-x} = y, y \geq 0 \Rightarrow x = 2 - y^2$ và ta có hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} -x^2 + 2 = y \\ -y^2 + 2 = x \end{cases} \Rightarrow (y-x)(y+x-1) = 0$$

Từ đó tìm được nghiệm của phương trình là $x = 1, x = -2$.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - x} = 1$

Giải

Điều kiện: $x \leq \frac{1}{2}$. Đặt $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} = u$; $\sqrt[3]{\frac{1}{2} - x} = v, v \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u + v = 1; v \geq 0 \\ u^3 + v^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow (1-v)^3 = 1 - v^3. \text{ Hay } v(v-1)(v-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 1 \\ v_3 = 3 \end{cases}.$$

Giải ra ta có nghiệm của phương trình là: $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{2}; x_3 = -\frac{17}{2}$

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x+7} = 7$

Giải

Điều kiện: $x \geq -7$. Đặt $t = \sqrt{x+7} \geq 0 \Leftrightarrow t^2 = x+7$

Phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} x^2 + t = 7 \\ t^2 = x + 7 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2 - t^2 = -(x + t) \Leftrightarrow (x + t)(x - t + 1) = 0$$

$$x + t = 0 \Rightarrow x^2 - x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{29}}{2} & (\text{loại vì } t \geq 0) \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

$$x - t + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -3 & (\text{loại vì } t \geq 0) \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{1 - \sqrt{29}}{2}$, $x = 2$.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 3$

Giải

Đặt $u = \sqrt[3]{2-x}$; $v = \sqrt[3]{7+x}$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u^2 + v^2 - uv = 3 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 - uv = 3 \\ (u+v)(u^2 + v^2 - uv) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ (u+v)^2 - 3uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 2 \end{cases}$$

Do đó, u và v là các nghiệm của phương trình: $t^2 - 3t + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 2$.

Từ đó dễ dàng có 2 nghiệm của phương trình là $x = 1$ hoặc $x = -6$.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$.

Giải

Đặt $y = \sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow y^3 + 1 = 2x$.

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y & (1) \\ y^3 + 1 = 2x & (2) \end{cases}$. Trừ từng vế của (1) cho

(2) ta có: $x^3 - y^3 = 2(y - x) \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$

Do $x^2 + xy + y^2 + 2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2 > 0, \forall x, y$.

Suy ra: $x - y = 0$ hay $x = y$. Thay vào (1), ta có:

$$x^3 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x - (x - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) - (x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

ABC

Chú ý: Phương trình có thể viết dưới dạng: $\frac{x^3 + 1}{2} = \sqrt[3]{2x - 1}$

Hàm số $y = \frac{x^3 + 1}{2} = f(x)$ và $y = \sqrt[3]{2x - 1} = g(x)$ là hai hàm số ngược nhau, do đó đồ thị của chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$. Mặt khác, hai hàm số này không trùng nhau vì $f(0) = \frac{1}{2}$; $g(0) = -1$, nên nếu hai đồ thị cắt nhau thì phải cắt nhau trên đường $y = x$. Do đó chuyển được việc giải phương trình đã cho về việc giải phương trình $\frac{x^3 + 1}{2} = x$.

Ví dụ 8: Giải phương trình $\sqrt{x - 1} - \sqrt{2 - x} = 1$.

Giải

Điều kiện xác định: $x \geq 1$, đặt $\sqrt{x - 1} = u$; $\sqrt{2 - x} = v$

ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế ta được: $v = 0 \Rightarrow x = 2$.

7. Phương pháp đưa về tổng các số không âm

Ví dụ : Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 2} = \frac{1}{2}(x + y + z)$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \geq 0$; $y \geq 1$; $z \geq 2$.

Ta có: $\sqrt{x} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 2} = \frac{1}{2}(x + y + z)$

$$\Rightarrow (x - 2\sqrt{x} + 1) + (y - 1 - 2\sqrt{y - 1} + 1) + (z - 2 - 2\sqrt{z - 2} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y - 1} - 1)^2 + (\sqrt{z - 2} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 0 \\ \sqrt{y - 1} - 1 = 0 \\ \sqrt{z - 2} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

8. Phương pháp vận dụng tính chia hết của nghiệm

Ví dụ: Giải phương trình nghiệm là số tự nhiên: $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{1984}$

Giải

Lập phương 2 vế: $12\sqrt[3]{31xy} = 1984 - x - y \Rightarrow x + y = 1984 - 12\sqrt[3]{31xy}$

Do $12\sqrt[3]{31xy}$ là số tự nhiên nên: $xy = 31^{2+3}$, $t \in \mathbb{N}$

Và $x + y : 31 \Rightarrow x : 31, y : 31$, Hay $\begin{cases} x = 31.n \\ y = 31.k \end{cases}$; $n, k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x + y = 1984 - 12.31t = 31(64 - 12t) \Rightarrow n + k = 64 - 12t$$

Do $64 - 12t > 0 \Rightarrow t = 1, 2, 3, 4, 5$

$\Rightarrow (x; y) = (31; 837)$ hoặc $(248; 248)$ hoặc $(837; 31)$.

9. Phương pháp sử dụng các tính chất của số vô tỷ

Ví dụ 1: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương x, y sao cho với $x < y$.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}.$$

Giải

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980} \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6\sqrt{55}$. Ta có $6\sqrt{55}$ là số vô tỷ, nên vế trái phải là các căn thức dạng chứa $\sqrt{55}$. Đặt: $\sqrt{x} = a\sqrt{55}$; $\sqrt{y} = b\sqrt{55}$;

$$a, b \in \mathbb{Z}^+; a < b. \text{ Và } a + b = 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình là: $(55; 1375)$; $(220; 880)$.

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $13\sqrt{x} - 7\sqrt{y} = \sqrt{2000}$

Giải

Ta có $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{x} = a\sqrt{5} \\ \sqrt{y} = b\sqrt{5} \\ 13a - 7b = 20 \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{Z}^+) \Rightarrow a = \frac{20 + 7b}{13} = 1 + \frac{7(1+b)}{13}.$$

Vì $(13, 7) = 1$ nên $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 + b = 13t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow b = 13t - 1; a = 7t + 1$; Để $a \geq 0; b \geq 0$ thì $t \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x = 5a^2 = 5(1 + 7t)^2; y = 5b^2 = 5(13t - 1)^2; t \in \mathbb{Z}^+$.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$$\frac{11x}{5} - \sqrt{2x-1} = 3y - \sqrt{4y-1} + 2.$$

Giải

$\sqrt{4y-1}$ là số vô tỷ với $y \in \mathbb{Z}$. (Vì bình phương của mọi số lẻ đều có dạng $4m + 1$). $\sqrt{4y-1} - \sqrt{2x+1} = 3y + 2 - \frac{11x}{5}$ là số hữu tỉ nên điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm là cả 2 vế bằng 0.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4y-1} = \sqrt{2x+1} \\ 3y + 2 = \frac{11x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 1 = 2x + 1 \\ 3y + 2 = \frac{11x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

10. Phương pháp khác

Ví dụ 1: Giải phương trình: $(\sqrt{1+x} + 1)(\sqrt{1+x} + 2x - 5) = x$

Giải

Việc sử dụng các thủ pháp thông thường giải phương trình vô tỉ không đưa đến kết quả (bạn hãy tự mình thử xem). Ta dùng mẹo sau: Nhân hai vế của phương trình với $(\sqrt{1+x}-1)$ ta được phương trình hệ quả:

$$x(\sqrt{1+x}+2x-5) = x(\sqrt{x+1}-1). \text{ Phương trình này tương đương với}$$
$$\text{tuy nhiên: } \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{1+x}+2x-5 = \sqrt{x+1}-1 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai có nghiệm là $x=2$. Bây giờ cần kiểm tra 2 nghiệm $x=0$ và $x=2$. Dễ dàng nhận thấy chỉ có nghiệm thứ 2 thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm : $x=2$.

Chú ý: Trước khi sang ví dụ khác, ta đề ý rằng, biểu thức $(\sqrt{1+x}-1)$ sẽ bằng 0 khi $x=0$. Đây chính là nghiệm ngoại lai của phương trình.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 3x$

Giải

Nhân 2 vế của phương trình với biểu thức $\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5}$.

Ta có phương trình hệ quả: $6x = 3x(\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5})$.

$$\text{Từ đây suy ra } \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5} = 2 \end{cases}$$

Không nên bình phương 2 vế của phương trình thứ 2, tốt hơn là cộng vế với vế của phương trình này và phương trình đầu.

Ta có: $2\sqrt{2x^2+3x+5} = 2+3x$. Bình phương cả 2 vế, ta được phương trình hệ quả: $8x^2+12+20 = 4+12x+9x^2 \Leftrightarrow x = \pm 4$

Kiểm tra các nghiệm $x=0$, $x=\pm 4$. Ta thấy chỉ có $x=4$ thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy phương trình đã cho có nghiệm : $x=4$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{x^2-1} = \left(\frac{1}{2}x+1\right)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Giải

Nhận xét rằng, việc thay thế phương trình trên bằng phương trình

$\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} = \left(\frac{1}{2}x+1\right)\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ sẽ dẫn tới mất nghiệm $x=-1$. Chúng ta

tránh nguy hiểm này bằng cách chuyển tới phương trình hệ quả:

$$\sqrt{|x-1|} \cdot \sqrt{|x+1|} = \left(\frac{1}{2}x+1\right)\frac{\sqrt{|x+1|}}{\sqrt{|x-1|}}.$$

Phương trình này tương đương với tuyến:
$$\begin{cases} x = -1 \\ \sqrt{|x-1|} = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases} \quad (1)$$

Giải phương trình thứ 2, ta có

$$\left(\sqrt{|x-1|}\right)^2 = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow |x-1| = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{1}{2}x + 1 \\ x-1 = -\frac{1}{2}x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

Cuối cùng, nhất thiết phải kiểm tra các nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -1$ hoặc $x = 4$.

Chú ý: Nếu chúng ta dùng định lý về căn của một tích dạng:

$$\sqrt{a \cdot b} = \begin{cases} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, & \text{nếu } a \geq 0 \text{ và } b \geq 0 \\ \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}, & \text{nếu } a \leq 0 \text{ và } b \leq 0 \end{cases}$$

thì ta có thể sử dụng phương pháp biến đổi tương đương.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\left| \frac{8x}{x^3 - 8} \right| + |x| = \frac{x^4}{|x^3 - 8|}$.

Giải.

Ta biến đổi về phải $\frac{x^4}{|x^3 - 8|} = \left| \frac{x^4}{x^3 - 8} \right| = \left| \frac{8x}{x^3 - 8} + x \right|$

$$\Rightarrow \frac{8x}{x^3 - 8} \cdot x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8x^2}{x^3 - 8} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x > 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$ hoặc $x > 2$.

Bài tập vận dụng

- Giải phương trình: $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2$
- Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}$
- Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$
- Giải phương trình: $2x^2 + \sqrt{2x^2 - 4x + 12} = 4x + 8$
- Giải phương trình: $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$
- Giải phương trình: $\frac{9}{\sqrt{x-19}} + \frac{16}{\sqrt{y-5}} + \frac{25}{\sqrt{z-91}} = 24 - \sqrt{x-19} - \sqrt{y-5} - \sqrt{z-91}$
- Giải phương trình: $x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{x-1} = \frac{3}{2}xy$ (*)
- Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt[4]{2y^2 + 12y + 19} = 3$

9. Giải phương trình: $-x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7 = 2\sqrt{(x^2 + 2x + 1)(y^2 + 4y + 6)}$
10. Giải phương trình $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + x + 2y + \frac{1}{2} = \sqrt{(x^2 + 2x + 3)(-y^2 + 4y - 2)}$
11. Giải phương trình: $\sqrt{5 - x^6} = \sqrt[3]{3x^4 - 2} + 1$
12. Giải phương trình: $\sqrt{3 - x} + \sqrt{x - 1} = 2 + (x - y)^2$
13. Giải phương trình: $\sqrt{2x - 1} + x^2 - 3x + 1 = 0. \quad (x \in \mathbb{R}).$
14. Giải phương trình: $|x^2 + x - 2| + |x - 3| = x^2 + 1$
15. Giải phương trình: $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x + 2} = 2\sqrt{x^2 - 4} - 2x + 2$
16. Giải phương trình: $\sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{4x - 1} = 1$
17. Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{x + 9} = \sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 4} \quad (1)$
18. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8} \quad (1)$
19. Giải phương trình: $x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$
20. Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x + 1} = 1 \quad (1)$
21. Giải phương trình: $\sqrt{x + 9} = 5 - \sqrt{2x + 4}$
22. Giải phương trình: $x - 2\sqrt{x - 1} - (x - 1)\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - x} = 0$
23. Giải phương trình sau: $2\sqrt{x + 2} + 2\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 1} = 4.$
24. Giải phương trình: $x + 2\sqrt{7 - x} = 2\sqrt{x - 1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$
25. Giải phương trình: $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}, \quad x \in \mathbb{R}$
26. Giải phương trình: $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x} \quad (2)$
27. Giải phương trình: $\sqrt{x(x - 1)} + \sqrt{x(x + 2)} = 2\sqrt{x^2} \quad (4)$
28. Giải phương trình: $(x^2 + 3x - 4)^2 + 3(x^2 + 3x - 4) = x + 4$
29. Giải phương trình: $(x + 5)(2 - x) = 3\sqrt{x^2 + 3x}$
30. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$

Hướng dẫn và đáp số

1. $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$

Điều kiện: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 2\sqrt{x - 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x + 4 \geq 0; \forall x \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$

Khi đó phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} - \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} = 2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1 - |\sqrt{x-1}-1| = 2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x-1} - |\sqrt{x-1}-1| = 1 \quad (*) \end{aligned}$$

Nếu $x \geq 2$ thì $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} + 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1; \forall x \geq 2$

Nếu $1 \leq x < 2$ thì $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 + \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$, không thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm với mọi $x \geq 2$.

2. $\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}$

Đặt $t = x^2 + x + 1$, có $\Delta < 0$, suy ra $t > 0$, khi đó phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \sqrt{t+3} + \sqrt{t} = \sqrt{2t+7} \Leftrightarrow t+3+t+2\sqrt{t(t+3)} = 2t+7 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{t(t+3)} = 2 \Leftrightarrow t^2+3t-4=0 \Leftrightarrow t=1 \text{ hoặc } t=-4 \text{ (loại)} \end{aligned}$$

Với $t=1$, ta có: $x^2+x+1=1 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \{-1; 0\}$.

3. $\sqrt{x} + \sqrt{x-1-x} = 1$

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x-\sqrt{1-x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \\ x^2+x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 1.$

Khi đó phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-\sqrt{1-x}} = 1-\sqrt{x} \Leftrightarrow x-\sqrt{1-x} = 1+x-2\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{x}-1 = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow 4x+1-4\sqrt{x} = 1-x \\ \Leftrightarrow & 5x = 4\sqrt{x} \Leftrightarrow 25x^2 = 16x \Leftrightarrow x(25x-16) = 0 \\ \Leftrightarrow & x=0 \text{ (loại) hoặc } x = \frac{16}{25}. \text{ Thử lại thì } x = \frac{16}{25} \text{ thỏa mãn phương trình.} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{16}{25}$.

4. $2x^2 + \sqrt{2x^2-4x+12} = 4x+8$

Ta có: $2x^2-4x+12 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad (\Delta < 0)$.

Đặt $t = \sqrt{2x^2-4x+12}$, $t > 0$, khi đó phương trình trở thành:

$$2x^2-4x-8+\sqrt{2x^2-4x+12}=0 \Leftrightarrow t^2+t-20=0 \Leftrightarrow t=4 \text{ hoặc } t=-5$$

(loại). Với $t=4$ ta có $\sqrt{2x^2-4x+12}=4 \Leftrightarrow 2x^2-4x+12=16$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \{1 \pm \sqrt{3}\}$.

5. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4} + \sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1$$

Đặt $y = \sqrt{x-1}$, $y \geq 0$ khi đó phương trình trở thành:

$$|y-2| + |y-3| = 1 \quad (*)$$

Nếu $0 \leq y < 2 \Leftrightarrow x < 5$ thì $(*) \Leftrightarrow 2 - y - y + 3 = 1 \Leftrightarrow 2y = 4$

$\Leftrightarrow y = 2$ không thỏa mãn.

Nếu $2 \leq y < 3 \Leftrightarrow 5 \leq x < 10$ thì $(*) \Leftrightarrow y - 2 - y + 3 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$,

hiển nhiên. Với $y = 3$, suy ra $\sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow x-1 = 9 \Leftrightarrow x = 10$.

Vậy phương trình có nghiệm $5 \leq x \leq 10$.

6. $\frac{9}{\sqrt{x-19}} + \frac{16}{\sqrt{y-5}} + \frac{25}{\sqrt{z-91}} = 24 - \sqrt{x-19} - \sqrt{y-5} - \sqrt{z-91}$

Điều kiện: $\begin{cases} x-19 > 0 \\ y-5 > 0 \\ z-91 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 19 \\ y > 5 \\ z > 91 \end{cases}$.

Cách 1: Phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned} & \frac{9-6\sqrt{x-19}+(\sqrt{x-19})^2}{\sqrt{x-19}} + \frac{16-8\sqrt{y-5}+(\sqrt{y-5})^2}{\sqrt{y-5}} \\ & + \frac{25-10\sqrt{z-91}+(\sqrt{z-91})^2}{\sqrt{z-91}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(3-\sqrt{x-19})^2}{\sqrt{x-19}} + \frac{(4-\sqrt{y-5})^2}{\sqrt{y-5}} + \frac{(5-\sqrt{z-91})^2}{\sqrt{z-91}} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-19} = 3 \\ \sqrt{y-5} = 4 \\ \sqrt{z-91} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-19 = 9 \\ y-5 = 16 \\ z-91 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 28 \\ y = 21 \\ z = 116 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $(x; y; z) = (28; 21; 116)$.

Cách 2: Ta có: $\begin{cases} \sqrt{x-19} > 0 \\ \sqrt{y-5} > 0 \\ \sqrt{z-91} > 0 \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm, ta có:

$$\frac{9}{\sqrt{x-19}} + \sqrt{x-19} \geq 2\sqrt{\frac{9}{\sqrt{x-19}} \cdot \sqrt{x-19}} = 6$$

$$\frac{16}{\sqrt{y-5}} + \sqrt{y-5} \geq 2\sqrt{\frac{16}{\sqrt{y-5}} \cdot \sqrt{y-5}} = 8$$

$$\frac{25}{\sqrt{z-91}} + \sqrt{z-91} \geq 2\sqrt{\frac{25}{\sqrt{z-91}} \cdot \sqrt{z-91}} = 10$$

$$\Rightarrow \frac{9}{\sqrt{x-19}} + \sqrt{x-19} + \frac{16}{\sqrt{y-5}} + \sqrt{y-5} + \frac{25}{\sqrt{z-91}} + \sqrt{z-91} \geq 24$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{9}{\sqrt{x-19}} = \sqrt{x-19} \\ \frac{16}{\sqrt{y-5}} = \sqrt{y-5} \\ \frac{25}{\sqrt{z-91}} = \sqrt{z-91} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = x - 19 \\ 16 = y - 5 \\ 25 = z - 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 28 \\ y = 21 \\ z = 116 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $(x; y; z) = (28; 21; 116)$.

7. $x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{x-1} = \frac{3}{2}xy$ (*). Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ y-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow x\sqrt{y-1} - \frac{xy}{2} + 2y\sqrt{x-1} - xy = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{2}(y - 2\sqrt{y-1}) - y(x - 2\sqrt{x-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{2}(\sqrt{y-1} - 1)^2 - y(\sqrt{x-1} - 1)^2 = 0.$$

Do $x \geq 1, y \geq 1$ nên $\begin{cases} \sqrt{y-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 2)$.

8. $\sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt[4]{2y^2 + 12y + 19} = 3$

Ta có: $\sqrt{x^2 - 4x + 8} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + 4} = \sqrt{(x-2)^2 + 4} \geq 2$

$$\sqrt[4]{2y^2 + 12y + 19} = \sqrt[4]{2(y^2 + 6y + 9) + 1} = \sqrt[4]{2(y+3)^2 + 1} \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt[4]{2y^2 + 12y + 19} \geq 3$$

Do đó, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x + 8} = 2 \\ \sqrt[4]{2y^2 + 12y + 19} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ y^2 + 6y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (2; -3)$.

$$\begin{aligned} 9. -x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7 &= 2\sqrt{(x^2 + 2x + 1)(y^2 + 4y + 6)} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 6 - 2\sqrt{(x^2 + 2x + 1)(y^2 + 4y + 6)} &= 2x^2 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{y^2 + 4y + 6})^2 &= 2x^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} \geq 0$$

$$\sqrt{y^2 + 4y + 6} = \sqrt{y^2 + 4y + 4 + 2} = \sqrt{(y+2)^2 + 2} \geq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{y^2 + 4y + 6})^2 \geq 2$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2 = 0 \\ x^2 = 1 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = \pm 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $(x; y) = (-1; -2)$.

$$\begin{aligned} 10. \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + x + 2y + \frac{1}{2} &= \sqrt{(x^2 + 2x + 3)(-y^2 + 4y - 2)} \\ \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2x + 4y + 1 &= 2\sqrt{(x^2 + 2x + 3)(-y^2 + 4y - 2)} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 - 2\sqrt{(x^2 + 2x + 3)(-y^2 + 4y - 2)} + (-y^2 + 4y - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{-y^2 + 4y - 2})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{-y^2 + 4y - 2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 &= -y^2 + 4y - 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $(x; y) = (-1; 2)$.

$$11. \sqrt{5-x^6} = \sqrt[3]{3x^4-2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{5-x^6} - \sqrt[3]{3x^4-2} = 1 \quad (*)$$

Ta có: $|x| > 1$ thì x^4 và $x^6 > 1$; $|x| < 1$ thì x^4 và $x^6 < 1$.

Xét $|x| > 1$ ta có $5 - x^6 < 4$ và $3x^4 - 2 > 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x^6} < 2 \\ \sqrt[3]{3x^4-2} > 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{5-x^6} - \sqrt[3]{3x^4-2} < 1 \text{ nên } (*) \text{ vô nghiệm}$$

Xét $|x| < 1$ ta có $5 - x^6 > 4$ và $3x^4 - 2 < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5 - x^6} > 2 \\ \sqrt[3]{3x^4 - 2} < 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{5 - x^6} - \sqrt[3]{3x^4 - 2} > 1 \text{ nên } (*) \text{ vô nghiệm.}$$

Với $|x| = 1 \Rightarrow x^6 = x^4 = 1$, khi đó $(*)$ được nghiệm đúng.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1, x = 1$.

12. $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} = 2 + (x-y)^2$

Điều kiện: $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia côp skicho hai cặp số

$(1;1)$ và $(\sqrt{3-x}; \sqrt{x-1})$ ta có: $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} \leq \sqrt{2(3-x+x-1)} = 2$

Mặt khác: $2 + (x+y)^2 \geq 2$ (do $(x-y)^2 \geq 0$).

Do đó, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} = 2 \\ x-y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x+x-1+2\sqrt{(3-x)(x-1)} = 4 \\ x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x^2+4x-3} = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 2)$.

13. Đặt $t = \sqrt{2x-1}$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2}$. Phương trình đã cho trở thành:

$$t^4 - 4t^2 + 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t^2+2t-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Với $t = 1$, ta có $x = 1$. Với $t = \sqrt{2} - 1$, ta có $x = 2 - \sqrt{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 2 - \sqrt{2}; x = 1$.

14. Đặt $x^2 + x - 2 = a, 3 - x = b$ khi đó $a + b = x^2 + 1$ và theo tính chất đã biết, ta đưa phương trình đã cho về hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x \leq -2$ hoặc $1 \leq x \leq 3$.

15. Tập xác định $x \geq 2$. Đặt $t = \sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} \Rightarrow t^2 = -2\sqrt{x^2-4} + 2x$
 $\Rightarrow -t^2 = 2\sqrt{x^2-4} - 2x$. Thế vào phương trình đã cho được:

$$t = -t^2 + 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

ABC

Với $t = 1$: $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x+2}$
 $\Leftrightarrow x-2 = 1 + x+2 + 2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = -5$: vô nghiệm
 Với $t = -2$: $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + 2 = \sqrt{x+2}$
 $\Leftrightarrow x-2+4+4\sqrt{x-2} = x+2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
 Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 2$.

16. Miền xác định của phương trình là $x \geq \frac{1}{2}$

Ta viết phương trình đã cho dưới dạng: $\sqrt{4x-1} = 1 - \sqrt{4x^2-1}$

Với $x \geq \frac{1}{2}$ thì $\sqrt{4x-1} \geq 1$, nhưng về trái $1 - \sqrt{4x^2-1} \leq 1$

Vậy phương trình có nghiệm chỉ khi: $\begin{cases} \sqrt{4x-1} = 1 \\ \sqrt{4x^2-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào phương trình đã cho để kiểm tra, ta được $x = \frac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} 17. (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2 = \sqrt{(x+1)(x+4)} - \sqrt{x(x+9)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq x \geq 0 \\ 2 = \frac{4(1-x)}{\sqrt{x(x+9)} + \sqrt{(x+1)(x+4)}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ 2 = \frac{4(1-x)}{\sqrt{x(x+9)} + \sqrt{(x+1)(x+4)}} \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Khi $x \in [0; 1]$ hàm số $y_1 = \frac{1}{\sqrt{x(x+9)} + \sqrt{(x+1)(x+4)}}$ giảm và $y_1 \geq 0$

$y_2 = 4(1-x)$ giảm và $y_2 \geq 0 \Rightarrow y = y_1 y_2$ giảm trên $[0; 1]$

Do đó (*) có nghiệm $\Rightarrow$ (*) có nghiệm duy nhất

Dễ thấy $x = 0$ là nghiệm $\Rightarrow$ phương trình có duy nhất 1 nghiệm $x = 0$.

18. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+15} - \sqrt{x^2+8} = 3x-2 \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x^2+15} + \sqrt{x^2+8}} = 3x-2$$

Ta có $f(x) = \frac{7}{\sqrt{x^2+15} + \sqrt{x^2+8}}$ giảm trên $\mathbb{R}$

$g(x) = 3x - 2$ tăng trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = g(1)$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

19. $x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1) - (x + 3)\sqrt{x^2 + 1} + 3x = 0.$$

Đưa vào ẩn phụ $t = \sqrt{x^2 + 1}$, phương trình tương đương với hệ phương

trình
$$\begin{cases} t = \sqrt{x^2 + 1} \\ t^2 - (x + 3)t + 3x = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Coi (1) là phương trình bậc hai đối với ẩn t , ta có:

$$\Delta = (x + 3)^2 - 12x = (x - 3)^2$$

Từ đó: $t_1 = \frac{x + 3 + x - 3}{2} = x = \sqrt{x^2 + 1}$ (vô nghiệm)

$$t_2 = \frac{1}{2}(x + 3 - (x - 3)) = 3 = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}.$$

20. Ta có: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x + 1} = 1 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x + 1 = (1 - x^2)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ (x + 1)[1 - (x + 1)(x - 1)^2] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x = -1; x = 0; x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = -1; x = 0; x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

21. Phương trình tương đương với:

$$\sqrt{x + 9} + \sqrt{2x + 4} = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 3x + 13 + 2\sqrt{(x + 9)(2x + 4)} = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2\sqrt{(x + 9)(2x + 4)} = 12 - 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \geq x \geq -2 \\ 4(x + 9)(2x + 4) = (12 - 3x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 160x = 0 \\ 4 \geq x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 160 \\ 4 \geq x \geq -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

22. Với điều kiện $x \geq 1$ ta có:

$$(\sqrt{x - 1} - 1)(\sqrt{x - 1} - 1 - \sqrt{x(x - 1)}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x - 1} = 1 \quad (1)$$

hoặc $\sqrt{x-1} - 1 - \sqrt{x(x-1)} = 0$ (2). Ta có (1) $\Leftrightarrow x = 2$.

Mặt khác (2) $\Leftrightarrow x - 1 = 1 + x(x-1) + 2\sqrt{x(x-1)}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 2\sqrt{x(x-1)} + 1 = 0$ vô nghiệm.

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

23. $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$. Điều kiện: $x \geq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với: $2\sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} - \sqrt{x+1} = 4$

$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x+1}+1) - \sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

24. $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$

$\Leftrightarrow x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{7-x} - \sqrt{(x-1)(7-x)} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - 2) - \sqrt{7-x}(\sqrt{x-1} - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 2 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{7-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 4 \end{cases}$

25. $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x-9 + 2\sqrt{3x^2-5x+2}$ (1)

$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = (3x-2) + (x-1) - 6 + 2\sqrt{(3x-2)(x-1)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = (\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1})^2 - 6$.

Đặt $t = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} \geq 0$

(1) thành $t = t^2 - 6 \Leftrightarrow t = 3$ hoặc $t = -2$ (loại)

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2+x-1+2\sqrt{(3x-2)(x-1)} = 9 \\ x \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(3x-2)(x-1)} = 12-4x \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(3x-2)(x-1)} = 6-2x \\ x \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2)(x-1) = (6-2x)^2 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 19x + 34 = 0 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

26. Tập xác định: $0 \leq x \leq 1$

Phương trình tương đương với: $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x(1-x)} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

Đặt $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = t \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x)} = \frac{t^2-1}{2}$, ta được:

(2) $\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{3}(t^2-1) = t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1, t_2 = 2$

Với $t_1 = 1$: $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 1$.

Với $t_2 = 2$: $\sqrt{2} + \sqrt{1-x} = 2$: vô nghiệm.

Đáp số: $x_1 = 0; x_2 = 1$.

27. Tập xác định : $\begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x(x+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x \leq -2) \cup (x \geq 1) \text{ và } x = 0.$

+ Thấy ngay $x = 0$ là một nghiệm.

+ Với $x \leq -2$: (4) $\Leftrightarrow \sqrt{-x(1-x)} + \sqrt{-x(-x-2)} = 2\sqrt{(-x)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{-x-2} = 2\sqrt{-x}$

$\Leftrightarrow 1-x-x-2+2\sqrt{(1-x)(-x-2)} = 4(-x)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x-2} = 1-2x$ (với $x \leq -2$, hai vế cùng ≥ 0)

$\Leftrightarrow 4(x^2+x-2) = 1-4x+4x^2 \Leftrightarrow x = \frac{9}{8}$ (loại)

+ Với $x \geq 1$: (4) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 2x+1+2\sqrt{(x-1)(x+2)} = 4x \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2-2x} = 2x-1$

$\Leftrightarrow 4(x^2+x-2) = 4x^2-4x+1 \Leftrightarrow x = \frac{9}{8}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là: $x = 0$; $x = \frac{9}{8}$.

28. Viết phương trình về dạng:

$(x^2+3x-4)^2 + 4(x^2+3x-4) = x^2+4x$

$\Leftrightarrow [(x^2+3x-4)^2 - x^2] + 4[(x^2+3x-4) - x] = 0.$

$\Leftrightarrow (x^2+2x-4)(x^2+4x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{5}; x = 0; x = -4.$

29. Viết lại phương trình: $-x^2-3x+10 = 3\sqrt{x^2+3x}$

Đặt $t = \sqrt{x^2+3x} \geq 0$ thì phương trình trở thành:

$-t^2+10 = 3t \Leftrightarrow t^2+3t-10 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ hoặc } t = -5.$

Vì $t \geq 0$ nên $t = 2 \Leftrightarrow x^2+3x = 4 \Leftrightarrow x^2+3x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -4.$

30. Đặt $u = \sqrt[3]{2-x} \Leftrightarrow u^3 = 2-x$; $v = \sqrt{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow v^2 = x-1$

Khi đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u = 1-v & (1) \\ u^3 + v^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) thế vào phương trình (2):

$(1-v)^3 + v^2 = 1 \Leftrightarrow 1-3v+3v^2-v^3+v^2 = 1$

$\Leftrightarrow v^3-4v^2+3v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = 1 \\ v = 3 \end{cases}$

Từ đó phương trình có 3 nghiệm $x = 1$; $x = 2$; $x = 10.$

Chương 6. Phương trình, bất phương trình qui về bậc nhất, bậc hai

Một số kiến thức cơ bản

$$1) \quad |a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = \pm b \end{cases}$$

$$2) \quad |a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$$

$$3) \quad |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$$

$$4) \quad |a| > b \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ \begin{cases} b \geq 0 \\ \begin{cases} a > b \\ a < -b \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$5) \quad |a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) < 0.$$

Dạng 1: Giải phương trình qui về bậc hai

a. Phương trình chứa ẩn ở mẫu số

Cách giải :

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Qui đồng mẫu số, biến đổi đưa về phương trình bậc hai.

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm.

b. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Nguyên tắc để xét phương trình, bất phương trình loại này là phải khử được dấu trị tuyệt đối.

Cách giải :

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Khử dấu giá trị tuyệt đối, biến đổi đưa về phương trình bậc nhất hoặc phương trình bậc hai.

Bước 3: Giải phương trình bậc nhất hoặc phương trình bậc hai trên.

Bước 4 : So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm

c. Phương trình bậc cao

Để giải các phương trình bậc cao, thông thường người ta sẽ sử dụng một trong các phương pháp sau

1. Phương pháp đưa về dạng tích. Để sử dụng được phương pháp này, các bạn cần luyện lại phương pháp phân tích đa thức thành tích của các thừa số. Nhiều trường hợp đòi hỏi các bạn phải biết cách thêm, bớt các số hạng cần thiết để đạt được mục đích.

2. Phương pháp đặt ẩn số phụ.

2-1. Phương trình trùng phương : $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Cách giải:

Bước 1: Đặt $x^2 = t \geq 0$.

Bước 2: Biến đổi đưa về phương trình bậc hai.

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm

2-2. Phương trình $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e$ với $a+d = b+c$.

Cách giải:

Bước 1: Đặt $t = x^2 + (a+d)x + k = x^2 + (b+c)x + k$ với $k = \frac{1}{2}(ad+bc)$

Bước 2: Biến đổi đưa về phương trình bậc hai.

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện hoặc thử lại và kết luận nghiệm.

2-3. Phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ với $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2; e \neq 0$.

Cách giải:

Bước 1: Đặt $t = x + \frac{d}{bx} \Rightarrow t^2 = \left(x + \frac{d}{bx}\right)^2 = x^2 + 2\frac{d}{b} + \left(\frac{d}{bx}\right)^2$

$$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{d}{bx}\right)^2 = t^2 - 2\frac{d}{b}$$

Bước 2: Biến đổi đưa về phương trình bậc hai.

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện hoặc thử lại và kết luận nghiệm.

2-4. Phương trình bậc 4 dạng: $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$

Cách giải: Đặt $y = x + \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow x+a = y + \frac{a-b}{2}; x+b = y - \frac{a-b}{2}$

Đưa phương trình trên về phương trình trùng phương ẩn y đã biết cách giải.

Dạng 2: Giải bất phương trình quy về bậc hai

Biến đổi bất phương trình về dạng tích

$$A \cdot B \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases} \text{ hay } A \cdot B \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \leq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A \leq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Giải phương trình qui về bậc hai

1. Phương trình chứa ẩn ở mẫu số

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 4} + \frac{1}{x^2 + 11x + 28} + \frac{1}{x^2 + 17x + 70} = \frac{3}{4x - 2}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } x \notin \left\{-10; -7; -4; -1; \frac{1}{2}\right\}$$

Với điều kiện trên thì phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+1)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+7)} + \frac{1}{(x+7)(x+10)} = \frac{3}{4x-2} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+7} - \frac{4}{x+10} \right) = \frac{3}{4x-2} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+10} \right) = \frac{3}{4x-2} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x^2 + 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = -4$. So sánh với điều kiện ta có phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -3$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-3}{x+3} + \frac{x+4}{x-4} = 4$

Giải

Điều kiện $x \notin \{-3; -2; 1; 4\}$. Với điều kiện trên phương trình đã cho tương

$$\text{đương với: } 1 + \frac{2}{x-1} + 1 - \frac{4}{x+2} + 1 - \frac{6}{x+3} + 1 + \frac{8}{x-4} = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-4} \right) - \left(\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-8}{(x-1)(x-4)} - \frac{5x+12}{(x+2)(x+3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (5x-8)(x+2)(x+3) - (5x+12)(x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - \frac{16}{5} = 0$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm:

$$x = \frac{1}{2} \left(-1 - \sqrt{\frac{69}{5}} \right) \text{ và } x = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{\frac{69}{5}} \right).$$

Ví dụ 3: Giải phương trình $\frac{1}{2008x+1} - \frac{1}{2009x+2} = \frac{1}{2010x+4} - \frac{1}{2011x+5}$

Giải

Điều kiện $x \notin \left\{ -\frac{1}{2008}; -\frac{2}{2009}; -\frac{4}{2010}; -\frac{5}{2011} \right\}$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{2008x+1} + \frac{1}{2011x+5} = \frac{1}{2009x+2} + \frac{1}{2010x+4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4019x+6}{(2008x+1)(2011x+5)} = \frac{4019x+6}{(2009x+2)(2010x+4)} \Leftrightarrow 4019x+6=0$$

Hoặc:
$$\frac{1}{(2008x+1)(2011x+5)} = \frac{1}{(2009x+2)(2010x+4)}$$

$$\Leftrightarrow 4019x+6=0 \text{ hoặc } (2008x+1)(2010x+5) - (2009x+2)(2011x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4019x+6=0 \text{ hoặc } 2x^2+5x+3=0$$

Kết luận: phương trình đã cho có ba nghiệm: $x = -\frac{6}{4019}$; $x = -1$; $x = -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\frac{2x}{3x^2-5x+2} + \frac{13x}{3x^2+x+2} = 6$

Giải

Điều kiện $x \notin \left\{ 1; \frac{2}{3} \right\}$. Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với

$$2x(3x^2+x+2) + 13x(3x^2-5x+2) = 6(3x^2-5x+2)(3x^2+x+2)$$
$$\Leftrightarrow 54x^4 - 117x^3 + 105x^2 - 78x + 24 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(3x-4)(9x^2-3x+6) = 0$$

Kết luận: phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = \frac{1}{2}$ và $x = \frac{3}{4}$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Giải

Điều kiện $x > 0$ và $x \neq 1$. Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (1)

* Nếu $0 < x < 1$ thì vế trái của (1) là số âm, trong khi vế phải là số dương (mâu thuẫn). Vậy phương trình không có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

* Nếu $x > 1$ thì hai vế của (1) đều dương, bình phương hai vế ta được:

$$x^2 - 2x^2 - 16x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)^2 - 8(x+1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 - 2\sqrt{2})(x^2 + 2\sqrt{2}x + 3 + 2\sqrt{2}) = 0$$

Kết hợp với điều kiện $x > 1$ ta có: $x = \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2}-1}$

Ví dụ 6: Giải phương trình $\frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^3 + x^2 - x} = 3$

Giải

Điều kiện $x \neq 0$ và $x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Chia cả tử số và mẫu số ở vế trái cho x^2

thì rút gọn ta được: $\frac{x^2 + \frac{1}{x^2} + 3}{x - \frac{1}{x} + 1} = 0$.

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, phương trình trên trở thành

$$\frac{t^2 + t}{t + 1} = 3 \Leftrightarrow t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 2.$$

* Với $t = 1$, ta có: $x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

* Với $t = 2$, ta có: $x - \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Kết luận: phương trình đã cho có bốn nghiệm là: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ và $x = 1 \pm \sqrt{2}$

Ví dụ 7: Giải phương trình: $\frac{2}{3x^2 - 4x + 1} + \frac{13}{3x^2 + 2x + 1} = \frac{6}{x}$

Giải

Điều kiện $x \neq 0, x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{3}$. Biến đổi phương trình đã cho thành:

$$\frac{2}{3x - 4 + \frac{1}{x}} + \frac{13}{3x + 2 + \frac{1}{x}} = 6. \text{ Đặt } 3x + \frac{1}{x} - 4 = t, \text{ phương trình trên trở}$$

$$\text{thành } \frac{2}{t} + \frac{13}{t + 6} = 6. \Leftrightarrow 2t^2 + 7t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ hoặc } t = -4.$$

* Với $t = \frac{1}{2}$, ta có $3x + \frac{1}{x} - 4 = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 11x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ hoặc } x = \frac{1}{2}.$$

* Với $t = -4$, ta có: $3x + \frac{1}{x} - 4 = -4 \Leftrightarrow 3x^2 + 1 = 0$

Phương trình này không có nghiệm thực.

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x = \frac{4}{3}$ và $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 8: Giải phương trình $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = 15$

Giải

Điều kiện $x \neq 0$ và $x \neq -1$, phương trình đã cho tương đương với phương

trình sau: $\frac{(x+1)^2 + x^2}{x^2(x+1)^2} = 15 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x(x+1)}\right)^2 + \frac{2}{x(x+1)} = 15$.

Đặt $\frac{1}{x(x+1)} = t$, phương trình trên trở thành: $t^2 + 2t = 15 \Leftrightarrow t = 3$ hoặc $t = -5$.

* Với $t = 3$, suy ra $3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}$

* Với $t = -5$, suy ra $5x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$

Kết luận phương trình đã cho có bốn nghiệm: $\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}, \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$.

Ví dụ 9: Giải phương trình: $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + \frac{x+1}{x-3} = 12\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2$

Giải

Điều kiện $x \neq 2$ và $x \neq 3$. Đặt $u = \frac{x+1}{x-2}, v = \frac{x-2}{x-3}$.

Phương trình đã cho trở thành $u^2 + uv = 12v^2 \Leftrightarrow (u - 3v)(u + 4v) = 0$

$\Leftrightarrow u = 3v$ hoặc $u = -4v$.

* Với $u = 3v$, ta có: $\frac{x+1}{x-2} = 3 \cdot \frac{x-2}{x-3}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{46}}{2}$

* Với $u = -4v$, ta có $\frac{x+1}{x-2} = 4 \cdot \frac{x-2}{x-3} \Leftrightarrow 5x^2 - 12x + 19 = 0$.

Phương trình này vô nghiệm.

Kết luận: phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{8 \pm \sqrt{46}}{2}$.

Ví dụ 10: Giải phương trình: $\frac{3}{x^2 + x + 3} - \frac{4}{x^2 + 3x + 9} = \frac{1}{2x^2}$

Giải

Điều kiện $x \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với

$\frac{4}{x^2 + 3x + 9} + \frac{1}{2x^2} = \frac{3}{x^2 + x + 3} \quad (*)$

Áp dụng BĐT $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$, với $\forall x, y > 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$, ta có:

$$\frac{4}{x^2 + 3x + 9} + \frac{1}{2x^2} \geq \frac{(2+1)^2}{3x^2 + 3x + 9} = \frac{3}{x^2 + x + 3}$$

Suy ra (*) $\Leftrightarrow x^2 + 3x + 9 = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0$

Kết luận: phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

2. Phương pháp đưa về dạng tích

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$.

Giải

Viết phương trình dưới dạng: $x^4 - (2x - 3)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow [x^2 + 2x - 3][x^2 - 2x + 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Chú ý: Để sử dụng được phương pháp này, các bạn cần luyện lại phương pháp phân tích đa thức thành tích của các thừa số. Nhiều trường hợp đòi hỏi các bạn phải biết cách thêm, bớt các số hạng cần thiết để đạt được mục đích.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^4 - 4x = 1$.

Giải

Đưa phương trình về dạng: $x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 4x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow [x^2 + 1 + \sqrt{2}(x + 1)][x^2 + 1 - \sqrt{2}(x + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + \sqrt{2}(x + 1) = 0 & (1) \\ x^2 + 1 - \sqrt{2}(x + 1) = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có $\Delta = -4\sqrt{2} - 2 < 0$ nên vô nghiệm.

Phương trình (2) có $\Delta = 4\sqrt{2} - 2 > 0$ nên có hai nghiệm:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}. \text{ Đó là hai nghiệm của phương trình đã cho.}$$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = 0$.

Giải

Ta có

$$x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 12x^3 + 36x^2 - 4x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 6x)^2 - 4(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 6x)^2 - 4(x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [x^2 + 6x - 2(x + 1)][x^2 + 6x + 2(x + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 2)(x^2 + 8x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 2 = 0 \\ x^2 + 8x + 2 = 0 \end{cases}, \text{ từ đó ta có phương}$$

trình có các nghiệm sau $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$; $x_{3,4} = -4 \pm \sqrt{14}$

Chú ý: Khi xét số nghiệm (khác nhau) của phương trình tích các bạn cần lưu ý đến những nghiệm giống nhau của các thừa số.

3. Phương pháp đặt ẩn số phụ

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^4 - 4x^3 + 8x - 5 = 0$

Giải

$$x^4 - 4x^3 + 8x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x^4 - 4x^3 + 4x^2) - 4x^2 + 8x - 5 = 0.$$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) - 5 = 0$. Đặt $x^2 - 2x = t$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 4t - 5 = 0$. Giải phương trình này ta có $t_1 = -1$; $t_2 = 5$.

Khi $t_1 = -1$, ta có $x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi $t_2 = 5$, ta có $x^2 - 2x = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$, $x = 1$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$.

Giải

Đây là phương trình dạng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ($a \neq 0$)

Ta thấy: $x = 0$ không phải là nghiệm nên chia hai vế cho x^2 ta có phương

trình tương đương: $2x^2 - 5x + 6 - 5 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0. \text{ Đặt } X = x + \frac{1}{x} \text{ (điều kiện: } |X| \geq 2 \text{)}.$$

Ta có phương trình tương đương:

$$2(X^2 - 2) - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2 \end{cases}$$

Do $|X| \geq 2$ nên chỉ lấy giá trị $X = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Chú ý: Phương trình trên cũng có thể đưa về dạng tích.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4$.

Giải

Ta có $(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4 \Leftrightarrow (x^2 + 12x + 32)(x^2 + 12x + 35) = 4$

Đặt $x^2 + 12x + 32 = t \Rightarrow x^2 + 12x + 35 = t + 3$. Do đó phương trình đã cho trở thành $t(t + 3) = 4 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1; t_2 = -4$

Khi $t = 1$ ta có $x^2 + 12x + 32 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 31 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{5}$

Khi $t = -4$ ta có $x^2 + 12x + 32 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = -6$

Vậy phương trình có các nghiệm sau $x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{5}$, $x = -6$.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = 9$.

Giải

Viết lại phương trình, ta có

$$(x - 1)(x + 5)(x + 1)(x + 3) = 9 \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = 9$$

Đặt: $t = x^2 + 4x$, phương trình trở thành: $(t - 5)(t + 3) = 9$ hay:

$$t^2 - 2t - 24 = 0. \text{ Giải phương trình này ta có: } t = 6; t = -4$$

$$\text{Với } t = 6 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 6, \text{ giải ra: } x = -2 \pm \sqrt{10}$$

$$\text{Với } t = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x = -4, \text{ giải ra: } x = -2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = -2$; $x = -2 \pm \sqrt{10}$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+\sqrt{x}} = \frac{2+\sqrt{x}}{2x}$.

Giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+\sqrt{x}} = \frac{2+\sqrt{x}}{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2x(1+\sqrt{x}) + 4(1+x)x = (1+x)(1+\sqrt{x})(2+\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2x\sqrt{x} + 4x + 4x^2 = (x+1)(2+3\sqrt{x}+x)$$

$$\Leftrightarrow 6x + 4x^2 + 2x\sqrt{x} = 2x + 2 + 3x\sqrt{x} + x^2 + 3\sqrt{x} + x$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3x^2 - x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2 = 0.$$

Đặt $\sqrt{x} = y \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$3y^4 - y^3 + 3y^2 - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(3y^3 + 2y^2 + 5y + 2) = 0$$

Do $y \geq 0 \Rightarrow 3y^3 + 2y^2 + 5y + 2 > 0$, suy ra $y = 1$, nên phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$

Giải

Điều kiện $x \neq 0$; $2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2}$. Đặt $y = \sqrt{2-x^2} > 0$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 & (2) \end{cases}. \text{ Từ (2) có: } x + y = 2xy.$$

Thay vào (1) có: $xy = 1$ hoặc $xy = -\frac{1}{2}$.

* Nếu $xy = 1$ thì $x + y = 2$. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình

$$X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \Rightarrow x = y = 1.$$

* Nếu $xy = -\frac{1}{2}$ thì $x + y = -1$. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình:

$$X^2 + X - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow X = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vì } y > 0 \text{ nên: } y = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 7: Phân tích thành nhân tử: $A = x^4 - 5x^3 + 10x + 4$

Áp dụng: giải phương trình $\frac{x^4 + 4}{x^2 - 2} = 5x$

Giải

$$\begin{aligned} A &= x^4 - 5x^3 + 10x + 4 \\ &= x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x^3 + 4x^2 + 8x - 2x^2 + 2x + 4 \\ &= x^2(x^2 - x - 2) + 4x(x^2 - x - 2) - 2(x^2 - x - 2) \\ &= (x^2 - x - 2)(x^2 - 4x - 2) = (x^2 - 2x + x - 2)(x^2 - 4x - 2) \\ &= [x(x - 2) + (x - 2)](x^2 - 4x - 2) = (x - 2)(x + 1)(x^2 - 4x - 2) \end{aligned}$$

Áp dụng: điều kiện: $x^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \frac{x^4 + 4}{x^2 - 2} = 5x &\Leftrightarrow x^4 + 4 = 5x(x^2 - 2) \\ \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 10x + 4 = 0 &\Leftrightarrow (x - 2)(x + 1)(x^2 - 4x - 2) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \\ x^2 - 4x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \\ (x - 2)^2 = (\sqrt{6})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \\ x = \sqrt{6} + 2 \\ x = -\sqrt{6} + 2 \end{cases}$$

Các giá trị của x tìm được đều khác $\pm\sqrt{2}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = \sqrt{6} + 2; x_4 = -\sqrt{6} + 2$$

4. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Ở đây các bạn cần lưu ý các phép biến đổi cơ bản:

$$1) |a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = \pm b \end{cases} \quad 2) |a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$$

Ví dụ 1: Cho phương trình: $|x^2 - 2x + m| = x - 1$

- Giải phương trình với $m = 0$.
- Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

Đặt $X = x - 1$ thì phương trình đã cho trở thành: $|X^2 + m - 1| = X$ (*)

Với $m = 0$ ta có:

$$\begin{cases} X \geq 0 \\ X^2 - 1 = \pm X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \geq 0 \\ X^2 \pm X - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \geq 0 \\ X = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow X = \frac{\pm 1 + \sqrt{5}}{2}$$

Vì $x = X + 1$ nên suy ra:
$$\begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có bốn nghiệm

phân biệt. (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} X \geq 0 \\ X^2 + m - 1 = \pm X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \geq 0 \\ X^2 \pm X + m - 1 = 0 \end{cases}$

(*) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $X^2 - X + m - 1 = 0$ có hai nghiệm không âm phân biệt và phương trình $X^2 + X + m - 1 = 0$ có hai nghiệm không âm phân biệt.

Nhưng phương trình $X^2 + X + m - 1 = 0$ không thể có hai nghiệm không âm (các bạn tự giải thích).

Vậy, phương trình đã cho không thể có bốn nghiệm phân biệt.

Chú ý: Phép giải câu 2 của ví dụ trên sẽ rất phức tạp nếu các bạn sử dụng phương pháp chia khoảng.

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình: $x^2 - 2x - m|x - 1| + m^2 = 0$ (1) có nghiệm.

Giải

Đặt $X = |x - 1| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(X) = -1$ ta có $x^2 - 2x = X^2 - 1$

nên phương trình (1) trở thành: $X^2 - mX + m^2 - 1 = 0$ (2).

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có ít nhất một nghiệm $X \geq 0$.

Trường hợp 1: (2) có nghiệm $X = 0 \Leftrightarrow P = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Trường hợp 2: (2) có nghiệm

$$X_1 < 0 < X_2 \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Trường hợp 3: (2) có nghiệm $X_1, X_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 4 \geq 0 \\ m^2 - 1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq m \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Kết hợp các kết quả, ta có: $-1 \leq m \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chú ý: Ở thí dụ trên có thể dùng phương pháp chia khoảng những phép giải sẽ dài hơn.

Ví dụ 3: Giải phương trình $|x^2 + x - 2| + |x - 3| = x^2 + 1$

Giải

Đặt $x^2 + x - 2 = a$, $3 - x = b$ khi đó $a + b = x^2 + 1$ và theo tính chất đã biết, ta đưa phương trình đã cho về hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x \leq -2$ hoặc $1 \leq x \leq 3$.

5. Phương trình có chứa tham số

Ví dụ 1: Giả sử m là một tham số để phương trình :

$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = m$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 đều khác không. Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ theo m .

Giải

$$\text{Phương trình } (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = m \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = m.$$

$$\text{Đặt } y = x^2 - 5x + 4 \text{ thì phương trình đã cho trở thành: } y^2 + 2y - m = 0 \quad (2)$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1.$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm nên phương trình (2) có hai nghiệm y_1, y_2 với $y_1 + y_2 = -2$; $y_1 y_2 = -m$ ($m > -1$).

Bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 có vai trò như nhau trong phương trình nên ta có thể coi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 5x + 4 = y_1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 - y_1 = 0$$

và x_3, x_4 là nghiệm phương trình: $x^2 - 5x + 4 - y_2 = 0$.

Ta có :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 ; x_1 x_2 = 4 - y_1 \\ x_3 + x_4 = 5 ; x_3 x_4 = 4 - y_2 \end{cases}$$

Nên
$$P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_3 + x_4}{x_3 x_4} = \frac{5}{4 - y_1} + \frac{5}{4 - y_2}$$

$$= \frac{5[8 - (y_1 + y_2)]}{16 - 4(y_1 + y_2) + y_1 y_2} = \frac{50}{24 - m}.$$

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình: $x^4 - x^2 + 2mx - m^2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

Ta viết phương trình dưới dạng:

$$x^4 - (x^2 - 2mx + m^2) = 0 \Leftrightarrow x^4 - (x - m)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x - m)(x^2 - x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - m = 0 & (1) \\ x^2 - x + m = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) và (2) đồng thời mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt nhưng chúng không có nghiệm chung. Trước hết (1) và (2) đồng thời có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ 1 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < \frac{1}{4}$$

Nhưng nếu (1) và (2) có nghiệm chung x_0 thì:
$$\begin{cases} x_0^2 + x_0 - m = 0 \\ x_0^2 - x_0 + m = 0 \end{cases}$$

Cộng từng vế: $2x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$. Do đó: $m = 0$.

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} < m < \frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình: $(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = m$ (1) có bốn nghiệm phân biệt.

Giải:

Đây là phương trình dạng: $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = l_1$ với $a + b = c + d$.

Ta có: $(x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) = m$

$$\Leftrightarrow [(x - 1)(x + 5)][(x + 1)(x + 3)] = m \Leftrightarrow [x^2 + 4x - 5][x^2 + 4x + 3] = m$$

Đặt $X = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0$, ta có phương trình tương đương

$$(X - 9)(X - 1) = m \Leftrightarrow X^2 - 10X + (9 - m) = 0 \quad (2)$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + m > 0 \\ 9 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -16 < m < 9.$$

Vậy với $-16 < m < 9$, thì phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 4 : Tìm m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt:

$$(x - 2)(x^2 + mx + m^2 - 3) = 0. \quad (*)$$

Giải

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(x) = (x^2 + mx + m^2 - 3) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2. Điều này

tương đương với $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases}$ tức là :

$$\begin{cases} -3m^2 + 12 > 0 \\ m^2 + 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

Vậy giá trị m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt :

$$(x - 2)(x^2 + mx + m^2 - 3) = 0 \text{ là : } \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

Chú ý : Đừng nghĩ rằng phương trình (*) có nghiệm $x = 2$, thì chỉ cần đặt điều kiện phương trình $f(x) = (x^2 + mx + m^2 - 3) = 0$ có hai nghiệm là đủ

Ví dụ 5 : Biện luận số nghiệm của phương trình: $x^3 - m(x + 2) + 8 = 0$ (1) theo m .

Giải

Ta biến đổi phương trình đã cho về dạng phương trình tích :

$$x^3 - m(x + 2) + 8 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 8) - m(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - m(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4 - m) = 0.$$

Số nghiệm của phương trình (1) phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình: $(x^2 - 2x + 4 - m) = 0$ (2) khác -2 , do đó phụ thuộc vào

$\Delta' = m - 3$ và $f(-2) = 12 - m$. Xảy ra các trường hợp như sau :

Trường hợp 1: $\Delta' = m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$, phương trình (2) vô nghiệm, nên phương trình đã cho có một nghiệm $x = -2$.

Trường hợp 2: $\Delta' = m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$, phương trình (2) có nghiệm kép $x = 1$, nên phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -2, x = 1$.

Trường hợp 3: $\Delta' = m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$; $f(-2) = 12 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 12$.

Do đó, nếu $\begin{cases} m \neq 12 \\ m > 3 \end{cases}$ thì phương trình (2) có hai nghiệm, nên phương trình đã cho có ba nghiệm.

Nếu $m = 12$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng phương trình: $x^4 - 2(m^2 + 2)x^2 + m^4 + 3 = 0$ luôn có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 với mọi giá trị của m .

Tìm giá trị m sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 11$

Giải

$x^4 - 2(m^2 + 2)x^2 + m^4 + 3 = 0$. Đặt: $t = x^2$, ta có:

$$t^2 - 2(m^2 + 2)t + m^4 + 3 = 0 \quad (2) \quad (t \geq 0).$$

Ta chứng tỏ (2) luôn có hai nghiệm: $0 < t_1 < t_2$,

$$\Delta' = (m^2 + 2)^2 - (m^4 + 3) = 4m^2 + 1 > 0, \text{ với mọi } m.$$

Vậy (2) luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 : $t_1 \cdot t_2 = m^4 + 3 > 0$ với mọi m . $t_1 + t_2 = 2(m^2 + 2) > 0$ với mọi m . Do đó phương trình (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_1}, +\sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, +\sqrt{t_2}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \\ = (-\sqrt{t_1})^2 + (\sqrt{t_1})^2 + (-\sqrt{t_2})^2 + (\sqrt{t_2})^2 + (-\sqrt{t_1}) \cdot (\sqrt{t_1}) \cdot (-\sqrt{t_2}) \cdot (\sqrt{t_2}) \\ = 2(t_1 + t_2) + t_1 \cdot t_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \\ = 4(m^2 + 2) + m^4 + 3 = m^4 + 4m^2 + 11 \end{aligned}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 11 \Leftrightarrow m^4 + 4m^2 + 11 = 11$$

$$\Leftrightarrow m^4 + 4m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0. \text{ Vậy giá trị } m \text{ sao cho:}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 11 \text{ là } m = 0.$$

Ví dụ 7: Cho phương trình: $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$. Tìm giá trị m để phương trình có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \text{ và } x_4 - x_1 = 3(x_3 - x_2).$$

Giải

$$\text{Từ phương trình } x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Đặt: } t = x^2, \text{ ta có: } t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0 \quad (2) \quad (t \geq 0).$$

$$\Delta' = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 \geq 0 \text{ với mọi } m.$$

Vậy để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt thì phương trình (2) luôn có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 .

$$\text{Tức là: } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = 2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}, m \neq 1 \\ S = 2m > 0 \end{cases} \quad (3).$$

Với điều kiện (3), phương trình (2) có 2 nghiệm dương $0 < t_1 < t_2$ hay phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi:

$$x_1 = -\sqrt{t_2} < x_2 = -\sqrt{t_1} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}.$$

Theo giả thiết:

$$x_4 - x_1 = 3(x_3 - x_2) \Leftrightarrow 2\sqrt{t_2} = 6\sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1 \quad (4)$$

Theo định lý Viét, ta có: $t_1 + t_2 = 2m$ và $t_1 t_2 = 2m - 1$ (5)

Từ (4) và (5) ta có: $10t_1 = 2m$ và $9t_1^2 = 2m - 1$

$\Rightarrow 9m^2 - 50m + 25 = 0 \Leftrightarrow m_1 = \frac{5}{9}; m_2 = 5$. Cả hai giá trị đều thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy để phương trình (1) có 4 nghiệm thỏa mãn điều kiện bài toán thì cần và đủ là: $m = \frac{5}{9}$ và $m = 5$.

Ví dụ 8: Tìm các giá trị của m để phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt: $x^3 - m(x + 1) + 1 = 0$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1 - m = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 - x + 1 - m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(1) có hai nghiệm phân biệt nếu:

a. Phương trình (2) có nghiệm kép, nghiệm đó phải khác -1 .

$$\Delta = 4m - 3. \text{ Giải } \Delta = 0 \text{ được } m = \frac{3}{4}. \text{ Khi đó } x = \frac{1}{2} \neq -1$$

b. Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm là -1 .

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 - (-1) + 1 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{4} \\ m = 3 \end{cases}$$

Khi đó $x_1 = -1, x_2 = m - 1 = 2$.

Kết luận: Với $m = \frac{3}{4}$ thì (1) có hai nghiệm là -1 và $\frac{1}{2}$.

Với $m = 3$ thì (1) có hai nghiệm là -1 và 2 .

Ví dụ 9: Tìm các giá trị của m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt: $x(x - 2)(x + 2)(x + 4) = m$ (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 8) = m.$$

Đặt $x^2 + 2x + 1 = y \geq 0$, khi đó (1) trở thành

$$(y - 1)(y - 9) = m \Leftrightarrow y^2 - 10y + (9 - m) = 0 \quad (2)$$

Với cách đặt ẩn phụ như trên, ứng với mỗi giá trị dương của y có hai giá trị của x . Do đó: (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\text{Do đó ở (2) ta phải có: } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - (9 - m) > 0 \\ 9 - m > 0 \\ 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -16 < m < 9.$$

Kết luận: $-16 < m < 9$.

Dạng 2: Giải bất phương trình

Ví dụ 1: Giải bất phương trình: $\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x-18} \leq \sqrt{2x+7}$

Giải

Bất phương trình tương đương với: $\sqrt{7x+1} \leq \sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x+1 \leq 5x-11+2 \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12+2x \leq 2 \\ x \geq 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+6 \leq \sqrt{(2x+7)(3x-18)} \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 12x + 36 \leq 6x^2 - 15x - 126 \\ x \geq 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 27x - 162 \geq 0 \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x \leq \sqrt{-\frac{18}{5}} \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 9$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$

Giải

Bất phương trình $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$. Điều kiện: $x \geq -1$

* Nếu $\begin{cases} x-4 < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 4$, bất phương trình hiển nhiên thỏa mãn.

* Nếu $x \geq 4$, để ý $\frac{x}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{x(\sqrt{1+x}-1)}{(1+x)-1} = \sqrt{1+x}-1$

Nên bất phương trình: $\Leftrightarrow (\sqrt{1+x}-1)^2 > x-4 \Leftrightarrow 2+x-2\sqrt{1+x} > x-4$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{1+x} < 6 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} < 3 \Leftrightarrow 4 \leq x < 8$

Tổng hợp kết quả ta được: $\begin{cases} -1 \leq x < 4 \\ 4 \leq x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 8$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \leq \sqrt{x^2 + 4x - 5}$

Giải

Bất phương trình tương đương với:

$$\sqrt{(x-1)(x+2)} + \sqrt{(x-1)(x+3)} \leq \sqrt{(x-1)(x+5)}$$

Điều kiện để bất phương trình xác định: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -5 \end{cases}$

* Khi $x = 1$ bất phương trình nghiệm đúng.

* Khi $x > 1$ bất phương trình tương đương với:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} \leq \sqrt{x+5} \Leftrightarrow 2x+5+2 \leq x+5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \leq -x \text{ (Bất phương trình vô nghiệm do } -x < 0)$$

* Khi $x \leq -5$ bất phương trình tương đương với:

$$\sqrt{-(x+2)} + \sqrt{-(x+3)} \leq \sqrt{-(x+5)} \Leftrightarrow -2x-5+2 \leq -x-5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \leq x \text{ (Bất phương trình vô nghiệm)}$$

Vậy bất phương trình chỉ có một nghiệm là $x = 1$.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình: $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-3} \leq \sqrt{4x+9}$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 3x+4 \geq 0, x-3 \geq 0 \\ 4x+9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$

$$\text{Bất phương trình} \Leftrightarrow 4x+1+2\sqrt{(3x+4)(x-3)} \leq 4x+9$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 12 \leq 16 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4 \text{ (do điều kiện } x \geq 3).$$

Ví dụ 5: Giải bất phương trình: $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0.$

Giải

$$\text{Bất phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 3x - 2} = 0 \\ \sqrt{2x^2 - 3x - 2} > 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } \sqrt{2x^2 - 3x - 2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

ABC

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 3x - 2} > 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x > 2 \\ x \leq 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Bất phương trình có tập nghiệm $\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ x \geq 3 \\ x = 2 \end{cases}$.

Ví dụ 6: Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x - 3} > \frac{7 - x}{\sqrt{x - 3}}$

Giải

Điều kiện $x \geq 4$. Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình: $\sqrt{2(x^2 - 16)} + x - 3 > 7 - x \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 16)} > 10 - 2x$

+ Nếu $x > 5$ thì bất phương trình được thỏa mãn, vì vế trái dương, vế phải âm.

+ Nếu $4 \leq x \leq 5$ thì hai vế của bất phương trình không âm. Bình phương hai vế ta có: $2(x^2 - 16) > (10 - 2x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 66 < 0 \Leftrightarrow 10 - \sqrt{34} < x < 10 + \sqrt{34}$

Kết hợp với điều kiện $4 \leq x \leq 5$ ta có: $10 - \sqrt{34} < x \leq 5$.

Đáp số: $x > 10 - \sqrt{34}$.

Ví dụ 7: Giải bất phương trình $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 4}$.

Giải

Bất phương trình $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 4}$.

Điều kiện: $\begin{cases} 5x - 1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ 2x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$.

Khi đó bất phương trình đã cho tương ứng với

$$\sqrt{5x - 1} > \sqrt{2x - 4} + \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow 5x - 1 > 2x - 4 + x - 1 + 2\sqrt{(2x - 4)(x - 1)}$$

$$\Leftrightarrow x + 2 > \sqrt{(2x - 4)(x - 1)} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 > 2x^2 - 6x + 4$$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 10$. Kết hợp với điều kiện, ta có: $2 \leq x < 10$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 8: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 8x + 15} + \sqrt{x^2 + 2x - 15} \leq \sqrt{4x^2 - 13x + 18}$

Giải

Điều kiện căn thức có nghĩa:
$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 15 \geq 0 \\ 4x^2 - 18x + 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 3 \\ x \geq 3 \\ x \leq -5 \\ x \geq 3 \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -5 \\ x = 3 \end{cases}$$

Thay ngay $x = 3$ thì bất phương trình thỏa mãn. Với $x \geq 5$ thì viết bất phương trình về dạng:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-5)(x-3)} + \sqrt{(x+5)(x-3)} \leq \sqrt{(x-3)(4x-6)} \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x-5} + \sqrt{x+5} \leq \sqrt{4x-6} \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2-25} \leq 4x-6 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x^2-25} \leq x-3 \Leftrightarrow x^2-25 \leq x^2-6x+9 \Leftrightarrow x \leq \frac{17}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $5 \leq x \leq \frac{17}{3}$ là nghiệm.

Với $x \leq -5$ thì viết bất phương trình về dạng:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(5-x)(3-x)} + \sqrt{(3-x)(-5-x)} \leq \sqrt{(3-x)(4x-6)} \\ & \Leftrightarrow -2x + 2\sqrt{x^2-25} \leq 6-4x \Leftrightarrow \sqrt{x^2-25} \leq -x+3 \\ & \Leftrightarrow x^2-25 \leq x^2-6x+9 \Leftrightarrow x \leq \frac{17}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $x \leq -5$ là nghiệm.

Tóm lại: $x \in (-\infty; -5) \cup \{3\} \cup \left[5; \frac{17}{3}\right]$

Ví dụ 9: Giải bất phương trình: $3\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} - 7$

Giải

Điều kiện: $x > 0$

$$3\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} - 7 \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) < 2\left(x + \frac{1}{4x}\right) - 7 \quad (7)$$

Đặt $\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = t$ với $t \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$$(7) \Leftrightarrow 3t < 2(t^2 - 1) - 7 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -\frac{3}{2} \\ t > 3 \end{cases}; \text{ chỉ lấy } t > 3.$$

ABC

$$+ \text{Ta có } t = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 3 \Leftrightarrow 2x - 6\sqrt{x} + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < \frac{3-\sqrt{7}}{2} \\ \sqrt{x} > \frac{3+\sqrt{7}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 - \frac{3}{2}\sqrt{7} \\ x > 4 + \frac{3}{2}\sqrt{7} \end{cases}$$

Ví dụ 10: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} + 2\sqrt{49x^2+7x-42} < 181-14x$$

Giải

$$\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} + 2\sqrt{49x^2+7x-42} < 181-14x \quad (1)$$

$$+ \text{Điều kiện : } \begin{cases} 7x+7 \geq 0 \\ 7x-6 \geq 0 \\ 49x^2+7x-42 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{6}{7} \quad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} + 2\sqrt{(7x+7)(7x-6)} + (7x+7) + (7x-6) < 182$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6})^2 + (\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}) - 182 < 0 \quad (3)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} = t \text{ với } t \geq \sqrt{\frac{6}{7}} = \sqrt{13}$$

$$(3) \Leftrightarrow t^2 + t - 182 < 0 \Leftrightarrow -14 < t < 13.$$

Kết hợp với $t \geq \sqrt{13}$ ta được: $\sqrt{13} \leq t < 13$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{13} \leq \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}}_{\text{thỏa mãn}} < 13$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} < 13;$$

Đặt $7x = u$ với $u \geq 6$

$$\Leftrightarrow \sqrt{u+7} + \sqrt{u-6} < 13 \Leftrightarrow 2u+1+2\sqrt{(u+7)(u-6)} < 13^2 = 169$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{u^2+u-42} < 84-u \Leftrightarrow \begin{cases} 6 \leq u \leq 84 \\ u^2+u-42 < 84^2+u^2-168u \end{cases} \quad (4)$$

$$(5) \Leftrightarrow 169u < 84^2 + 42 = 42 \cdot (4 \cdot 42 + 1) = 42 \cdot 169$$

$$\Leftrightarrow u < 42, \text{ kết hợp với (9)} \Rightarrow 6 \leq u < 42$$

$$\text{Vậy } 6 \leq 7x < 42 \Leftrightarrow \frac{6}{7} \leq x < 6.$$

Ví dụ 11: Giải bất phương trình: $2x^2 + 4x + 3\sqrt{3-2x-x^2} > 1$

Giải

Điều kiện có nghĩa: $-3 \leq x \leq 1$. Viết lại bất phương trình thành:

$$2(-x^2 - 2x + 3) - 3\sqrt{-x^2 - 2x + 3} - 5 < 0. \text{ Đặt } t = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t^2 - 3t - 5 < 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t < \frac{5}{2} \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t < \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{-x^2 - 2x + 3} < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ 4x^2 + 8x + 12 > 0 \text{ (thỏa mãn } \forall x) \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$$

Ví dụ 12: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - 1)^2} > 1 - x \Leftrightarrow |x^2 - 1| > 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 1 - x \\ x^2 - 1 < 1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ x^2 - x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \vee x < -2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Ví dụ 13: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq x - 1$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{Bất phương trình} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-3)} - \sqrt{(x-1)(2x-1)} \geq x-1 \quad (1)$$

a) Bằng cách thử trực tiếp ta thấy $x = 1$ nghiệm đúng bất phương trình (1).

b) Với $x \geq 3$ thì $x - 1 > 0$ nên bất phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} - \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{x-1} \Leftrightarrow -2x-1 \geq 2\sqrt{(x-1)(2x-1)} \quad (\text{VN})$$

c) Với $x \leq \frac{1}{2}$ bất phương trình (1)

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{1-x} \geq \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow 2\sqrt{(3-x)(1-x)} \geq -3 \text{ luôn đúng.}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x = 1, x \leq \frac{1}{2}$.

Ví dụ 14: Giải bất phương trình: $\sqrt{(x+5)(3x+4)} > 4(x-1)$ (1)

ABC

Giải

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x+5)(3x+4) > 16(x-1)^2 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ (x+5)(3x+4) \geq 0 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

$$\text{Hệ bất phương trình (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 13x^2 - 51x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -\frac{1}{13} < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 4$$

$$\text{Hệ bất phương trình (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ -\frac{4}{3} \leq x < 4 \end{cases}$$

Ví dụ 15: Giải bất phương trình: $2x^2 + \sqrt{x^2 - 5x - 6} > 10x + 15$

Giải

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 5x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 6 \end{cases} \quad (4).$$

$$\text{Bất phương trình có thể viết: } 2(x^2 - 5x) + \sqrt{x^2 - 5x - 6} - 15 > 0 \quad (5)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2 - 5x - 6} = t \text{ với } x \geq 0.$$

$$(5) \Leftrightarrow 2(t^2 + 6) + t - 15 > 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t < -\frac{3}{2} \\ t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow t > 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x - 6} > 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 > 1 \text{ (thỏa mãn (4))}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 7 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5 - \sqrt{53}}{2} \\ x > \frac{5 + \sqrt{53}}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 16: Giải bất phương trình: $\sqrt{7x-13} - \sqrt{3x-9} \leq \sqrt{5x-27}$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 7x - 13 \geq 0 \\ 3x - 9 \geq 0, 5x - 27 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{27}{5}$$

$$\text{Khi đó bất phương trình } \Leftrightarrow \sqrt{5x-27} + \sqrt{3x-9} \geq \sqrt{7x-13}$$

Bình phương cả 2 vế ta được bất phương trình tương đương

$$2\sqrt{(5x-27)(3x-9)} \geq 23-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 23 \\ \frac{27}{5} \leq x \leq 23 \\ 59x^2 - 458x + 443 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 23 \\ \frac{229 + \sqrt{26304}}{59} \leq x \leq 23 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{229 + \sqrt{26304}}{59}$$

Ví dụ 17: Giải bất phương trình: $\sqrt{\frac{x}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{x}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Giải

Điều kiện: $\frac{x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$.

Đặt $\sqrt{\frac{x}{x-1}} = t (t > 0)$

Bất phương trình $\Leftrightarrow t + \frac{1}{t} - \frac{3}{\sqrt{2}} \geq 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}t^2 - 3t + \sqrt{2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \sqrt{2} \\ t \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

a) $t = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow 1 < x \leq 2$

b) $t \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{x-1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ -1 \leq x < 1 \end{cases}$

Đáp số: $\begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Ví dụ 18: Giải bất phương trình: $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \geq x$.

Giải

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

Với $x \in [-1; 1]$ ta có $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} > 0$ bất phương trình tương đương

với: $(1+x) - (1-x) \geq x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \Leftrightarrow 2x \geq x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$

* $x = 0$ rõ ràng thỏa mãn bất phương trình.

* Nếu $0 < x \leq 1$, bất phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \leq 2$, điều này luôn thỏa mãn vì: $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \leq \sqrt{2(1+x+1-x)} = 2$ (2).

* Nếu $-1 \leq x < 0$, bất phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) > 2$, điều này không thể (suy ngay từ bất đẳng thức (2) hoặc bình phương hai vế sẽ đưa đến bất đẳng thức $\sqrt{1-x^2} \geq 1$).

Tổng hợp lại ta có tập hợp nghiệm của bất phương trình (1) là $0 < x \leq 1$

Bài tập vận dụng

1. Giải bất phương trình: $4\sqrt{(4-x)(2+x)} \leq x^2 - 2x - 8$
2. Tìm các số nguyên x, y thỏa hệ
$$\begin{cases} y - |x^2 - x| - 1 \geq 0 & (1) \\ |y - 2| + |x + 1| - 1 \leq 0 & (2) \end{cases}$$
3. Giải bất phương trình: $\frac{x^2}{(1 + \sqrt{1+x})^2} > x - 4$
4. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq x - 1$
5. Giải bất phương trình: $\sqrt{(x+5)(3x+4)} > 4(x-1)$ (1)
6. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}$
7. Giải bất phương trình: $x^2 - 3 > \sqrt{x^2 - 2x + 1}$
8. Giải bất phương trình: $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-3} \leq \sqrt{4x+9}$
9. Tìm các giá trị của $x; y$ thỏa mãn: $x^2 + xy + y^2 = 3(x+y-1)$
10. Giải phương trình:
 - a. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 2$
 - b. $(|x|-2)^4 + (|x|-6)^4 = 82.$
11. Tìm giá trị nhỏ nhất của $(a^2 + b^2)$ sao cho phương trình:
$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$
 có nghiệm.
12. Giải bất phương trình: $\frac{x^3 - 4x^2 - 2x - 15}{x^2 + x + 3} < 0$
13. Giải bất phương trình: $x + |x-1| > 5.$
14. Chứng minh rằng phương trình sau có hai nghiệm với mọi giá trị của m : $(x+1)^4 - (m-1)(x+1)^2 - (m^2 - m + 1) = 0$
15. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:
$$x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 = 0$$

Hướng dẫn và đáp số

1. Điều kiện : $-2 \leq x \leq 4.$
Đặt $t = \sqrt{(4-x)(2+x)} = \sqrt{8+2x-x^2}$, $0 \leq t \leq 3$; khi đó bất phương trình đã cho trở thành $4t \leq t^2 \Leftrightarrow t(4-t) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 4$: luôn thỏa mãn.
Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $-2 \leq x \leq 4.$
2. (1) $\Leftrightarrow |x^2 - x| \leq y - 1 \Rightarrow y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$ (3)
(2) $\Leftrightarrow |y-2| + |x+1| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} |y-2| \leq 1 \\ |x+1| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq y \leq 3 \\ -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ (4)

Do đó ta suy ra $x \in \{-2, -1, 0\}$ và $y \in \{1, 2, 3\}$

Thử lại ta được tập nghiệm cần tìm là: $\{(-1, 3); (0, 2)\}$

3. Điều kiện : $x \geq -1$

* Nếu $\begin{cases} x - 4 < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 4$, bất phương trình: hiển nhiên thỏa mãn.

* Nếu $x \geq 4$, để ý $\frac{x}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{x(\sqrt{1+x}-1)}{(1+x)-1} = \sqrt{1+x}-1$

Nên bất phương trình: $\Leftrightarrow (\sqrt{1+x}-1)^2 > x-4$

$\Leftrightarrow 2+x-2\sqrt{1+x} > x-4 \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x} < 6 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} < 3 \Leftrightarrow 4 \leq x < 8$.

Tổng hợp kết quả ta được: $\begin{cases} -1 \leq x < 4 \\ 4 \leq x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 8$

4. Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-3)} - \sqrt{(x-1)(2x-1)} \geq x-1$ (1)

a. Bằng cách thử trực tiếp ta thấy $x = 1$ nghiệm đúng bất phương trình (1).

b. Với $x \geq 3$ thì $x-1 > 0$ nên bất phương trình (1)

$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} - \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{x-1} \Leftrightarrow -2x-1 \geq 2\sqrt{(x-1)(2x-1)}$ (VN)

c. Với $x \leq \frac{1}{2}$ bất phương trình (1)

$\sqrt{3-x} + \sqrt{1-x} \geq \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow 2\sqrt{(3-x)(1-x)} \geq -3$ luôn đúng.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x = 1, x \leq \frac{1}{2}$.

5. $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 & (2) \\ (x+5)(3x+4) > 16(x-1)^2 & (3) \\ x < 1 & (4) \\ (x+5)(3x+4) \geq 0 & (5) \end{cases}$

Hệ (2), (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 13x^2 - 51x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -\frac{1}{13} < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 4$

Hệ (4), (5) $\Leftrightarrow (x \leq -5) \cup \left(-\frac{4}{3} \leq x < 4\right)$

$$6. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

a) $x = 1$ là nghiệm đúng bất phương trình.

b) $x < 1$. Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} \geq 2\sqrt{4-x}$. Bất phương trình này vô nghiệm vì $(2-x)$ và $(3-x)$ cùng nhỏ hơn $4-x$.

c) $x \geq 4$. Bất phương trình tương đương với $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} \geq 2\sqrt{x-4}$, luôn đúng vì $(2-x)$ và $(3-x)$ cùng lớn hơn $4-x$.

Kết luận: $x \geq 4$; $x = 1$.

$$7. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 0 < y \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Hệ phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = x^2 & (1) \\ 6y + 6x = y^2 & (2) \end{cases}$$

Từ hệ (1) và (2) suy ra $2(x-y) = x^2 - y^2$.

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} x = y \\ y = 2 - x \end{cases}$$

Thay $y = x$ vào phương trình (1), suy ra $(x = 10, y = 10)$ là nghiệm của hệ. Thay $y = 2 - x$ vào phương trình (1), ta thấy hệ vô nghiệm.

$$8. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} 3x + 4 \geq 0, x - 3 \geq 0 \\ 4x + 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow 4x + 1 + 2\sqrt{(3x+4)(x-3)} \leq 4x + 9$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 12 \leq 16 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4 \text{ (do điều kiện } x \geq 3).$$

$$9. x^2 + xy + y^2 = 3(x+y-1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + xy - x - y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-1)(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) \right]^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1.$$

$$10.a. \text{ Đặt } y = x + 4 \Rightarrow y - 1 = x + 3$$

$$a) \Leftrightarrow (y-1)^4 + (y+1)^4 = 2$$

$$\Leftrightarrow y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 + y^4 + 6y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow 12y^2 + 2y^4 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

b. Tương tự a).

11. Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \quad (1), \text{ do đó } x \neq 0$$

Chia 2 vế của phương trình (1) cho x^2 ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, với $|t| \geq 2$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow t^2 + at + b - 2 = 0.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki có:

$$(a^2 + b^2)(t^2 + 1) \geq (at + b)^2 = (2 - t^2)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(2 - t^2)^2}{t^2 + 1}.$$

$$\text{Đặt } t^2 = u, \quad u \geq 4 \Rightarrow \frac{(2 - t^2)^2}{t^2 + 1} = \frac{(2 - u)^2}{u + 1} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(2 - u)^2}{u + 1}$$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{(2 - u)^2}{u + 1} \geq \frac{4}{5}$ với $u \geq 4$ (*)

$$\text{Thật vậy } (*) \Leftrightarrow 5(2 - u)^2 \geq 4(u + 1)$$

$$\Leftrightarrow (u - 4)(5u - 4) \geq 0 \quad (\text{do } u \geq 4).$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{cases} u = 4 \\ a = bt \\ at + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 4 \\ bt = a \\ at + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ thì phương trình } x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \text{ có nghiệm } x = 1.$$

$$\text{Với } \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ thì phương trình } x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \text{ có nghiệm } x = -1.$$

Vậy $(a^2 + b^2)$ nhỏ nhất bằng $\frac{4}{5}$.

12. Ta có $x^3 - 4x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x^2 + x + 3)$

$$\text{mà } x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \text{ với mọi } x$$

Vậy bất phương trình tương đương với $x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

$$13. x + |x - 1| > 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x + x - 1 > 5 \\ x - 1 \geq 0 \\ x - x + 1 > 5 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 6 \\ x \geq 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1 > 5 \\ x < 1 \end{cases} \text{ (hệ này vô nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm: $x > 3$.

$$14. \text{ Đặt } (x + 1)^2 = y \geq 0 \text{ ta có: } y^2 - (m - 1)y - (m^2 - m + 1) = 0 \quad (1)$$

Do $P = -(m^2 - m + 1) < 0$ nên (1) có hai nghiệm trái dấu.

Gọi nghiệm dương là a . Từ $(x + 1)^2 = a$, ta được $x = -1 \pm \sqrt{a}$, đó là hai nghiệm của phương trình đã cho.

$$15. \text{ Phương trình } x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 = 0 \text{ là phương trình đối xứng bậc bốn.}$$

Chia hai vế cho $x^2 \neq 0$ rồi đặt ẩn phụ là $x + \frac{1}{x} = y$, (1) trở thành:

$$y^2 + my - 1 = 0 \quad (2).$$

Để phương trình $x + \frac{1}{x} = y$ (với y là tham số) có nghiệm hay phương trình $x^2 - yx + 1 = 0$ có nghiệm, ta phải có $y^2 - 4 \geq 0$, tức là $y \geq 2$ hoặc $y \leq -2$. Do đó để (1) có nghiệm thì (2) phải có ít nhất một nghiệm thỏa mãn $y \geq 2$ hoặc $y \leq -2$.

Điều kiện để tồn tại nghiệm của (2) thỏa mãn $y \geq 2$ là $m \leq -\frac{3}{2}$

Điều kiện để tồn tại nghiệm của (2) thỏa mãn $y \leq -2$ là $m \geq \frac{3}{2}$ (xem bài tập 358).

Đáp số $m \leq -\frac{3}{2}$ hoặc $m \geq \frac{3}{2}$.

Chương 7. Bất đẳng thức

Một số kiến thức cơ bản

1. Tính chất

Tính chất 1: $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$

Tính chất 2: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c.$

Hệ quả: $a > b + c \Leftrightarrow a - c > b$ (chuyển vế và đổi dấu)

Tính chất 3: $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$

Chú ý: Không có quy tắc trừ hai vế của hai bất đẳng thức cùng chiều.

Tính chất 4: $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc, c > 0 \\ ac < bc, c < 0 \end{cases}$

Tính chất 5: $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd.$

Chú ý: Không có quy tắc chia hai vế bất đẳng thức cùng chiều.

Tính chất 6: $a > b \geq 0 \Rightarrow a^n > b^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Tính chất 7: $a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}.$

Tính chất 8: $a > b \Rightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}.$

Hệ quả: * Nếu $a > 0$ và $b > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2.$

* Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2.$

2. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Từ định nghĩa ta có: $a \leq |a|; \forall a \in \mathbb{R}$

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \text{ Với } a > 0$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ hoặc } x > a \text{ Với } a > 0$$

$$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

Định lý: (Bất đẳng thức Côsi) Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b.$

Hệ quả:

- a. Nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng đạt giá trị lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.

- b. Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng đạt giá trị nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

Ý nghĩa hình học:

- a. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất.
b. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Chứng minh bất đẳng thức

Cách 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương

Cách 2: Sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc

Dạng 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 1: Chứng minh rằng:
$$\frac{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots \sqrt{3}}}}}{6 - \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots \sqrt{3}}}}} < \frac{1}{4}$$

Trong đó tử số có 2010 dấu căn, mẫu số có 2009 dấu căn.

Giải:

Đặt $a = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots \sqrt{3}}}}$ (có 2010 dấu căn), suy ra

$a^2 = 3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots \sqrt{3}}}}$ (có 2009 dấu căn), nên

$a^2 - 3 = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots \sqrt{3}}}}$, do đó ta có

$$\frac{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots \sqrt{3}}}}}{6 - \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots \sqrt{3}}}}} = \frac{3 - a}{6 - (a^2 - 3)} = \frac{3 - a}{9 - a^2} = \frac{3 - a}{(3 - a)(3 + a)} = \frac{1}{3 + a}$$

Do $a + 3 > 4$, nên $\frac{1}{3 + a} < \frac{1}{4}$, suy ra $\frac{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots \sqrt{3}}}}}{6 - \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots \sqrt{3}}}}} < \frac{1}{4}$.

Ví dụ 2: Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $a \leq b \leq c \leq d$ và $a + d = b + c$.

Chứng minh rằng:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ là tổng của ba số chính phương.

b) $bc \geq ad$.

Giải

Cho a, b, c, d là các số nguyên thoả $a \leq b \leq c \leq d$ và $a + d = b + c$.

- a) Vì $a \leq b \leq c \leq d$ nên ta có thể đặt $a = b - k$ và $d = c + h$ ($h, k \in \mathbb{N}$)

Khi đó do $a + d = b + c \Leftrightarrow b + c + h - k = b + c \Leftrightarrow h = k$.

Vậy $a = b - k$ và $d = c + k$.

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (b - k)^2 + b^2 + c^2 + (c + k)^2$

$$= 2b^2 + 2c^2 + 2k^2 - 2bk + 2ck$$

$$= b^2 + 2bc + c^2 + b^2 + c^2 + k^2 - 2bc - 2bk + 2ck + k^2$$

$$= (b + c)^2 + (b - c - k)^2 + k^2 \text{ là tổng của ba số chính phương}$$

(do $b + c, b - c - k$ và k là số nguyên)

- b) Ta có $ad = (b - k)(c + k) = bc + bk - ck - k^2 = bc + k(b - c) - k^2 \leq bc$ (vì $k \in \mathbb{N}$ và $b \leq c$). Vậy $ad \leq bc$ (điều phải chứng minh).

Ví dụ 3: Cho a, b là hai số thực thoả mãn $a^3 + b^3 = 2$.

Chứng minh: $0 < a + b \leq 2$.

Giải

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 > 0 \Rightarrow a^3 > -b^3 \Rightarrow a > -b \Rightarrow a + b > 0 \quad (1)$$

$$(a - b)^2(a + b) \geq 0 \Rightarrow (a^2 - b^2)(a - b) \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 - ab(a + b) \geq 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \Rightarrow 3(a^3 + b^3) \geq 3ab(a + b)$$

$$\Rightarrow 4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3 \Rightarrow 8 \geq (a + b)^3 \Rightarrow a + b \leq 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0 < a + b \leq 2$.

Ví dụ 4: Chứng minh với mọi số thực x, y, z luôn có:

$$|x + y - z| + |y + z - x| + |z + x - y| + |x + y + z| \geq 2(|x| + |y| + |z|) \quad (*)$$

Giải

Đặt: $a = x + y - z, b = y + z - x, c = z + x - y$. Trong ba số a, b, c bao giờ cũng có ít nhất hai số cùng dấu, chẳng hạn: $a.b \geq 0$.

$$\text{Lúc này: } |x + y - z| + |y + z - x| = |a| + |b| = |a + b| = 2|y|$$

$$\text{Ta có: } x + y + z = a + b + c; \quad 2x = a + c; \quad 2z = b + c.$$

Do đó để chứng minh (*) đúng, chỉ cần chứng tỏ:

$$|c| + |a + b + c| \geq |a + c| + |b + c| \quad (**) \text{ đúng với } a.b \geq 0. \text{ Ta có:}$$

$$(**) \Leftrightarrow |c| \cdot |a + b + c| + ab \geq |a + c| \cdot |b + c|$$

$$\Leftrightarrow |ca + cb + c^2| + ab \geq |(ca + cb + c^2) + ab| \quad (***)$$

Đặt: $ca + cb + c^2 = A$; $ab = B$, ta có $B = |B|$ (do $a, b \geq 0$) ta có:

$$(***) \Leftrightarrow |A| + |B| \geq |A + B| \Leftrightarrow |A| \cdot |B| \geq AB \Leftrightarrow |AB| \geq AB.$$

Dấu đẳng thức xảy ra trong trường hợp các số: $a, b, c, a + b + c$ chia làm 2 cặp cùng dấu. Ví dụ: $ab \geq 0$ và $c(a + b + c) \geq 0$.

Chú ý: Có thể chia ra các trường hợp tùy theo dấu của a, b, c (có 8 trường hợp) để chứng minh(*)

Ví dụ 5: Chứng minh rằng: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ với mọi số thực x, y, z . Suy ra với a, b, c là các số dương ta luôn có: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

Giải

Khai triển vế phải: $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ được về trái

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \geq 0.$$

Đặt: $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$; $x + y + z > 0$ vì a, b, c dương.

Từ đó $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$ hay $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

Ví dụ 6: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq a + b + c$$

Giải

Ta có: $a > 0$; $b > 0$: $(a + b)(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)[(a^2 - ab + b^2) - ab] \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) \geq 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 - ab(a + b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{2ab} \geq \frac{(a + b)}{2}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b^3 + c^3}{2bc} \geq \frac{(b + c)}{2}; \quad \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq \frac{(c + a)}{2}.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq \frac{a + b}{2} + \frac{b + c}{2} + \frac{c + a}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq a + b + c$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Ví dụ 7: Cho $a, b, c > 0$.

Chứng minh rằng: $(a - 1)(a - 3)(a - 4)(a - 6) + 10 > 0; \forall a$

Giải:

Ta có: $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6) + 10 = [(a-1)(a-6)][(a-3)(a-4)] + 10$
 $= (a^2 - 7a + 6)(a^2 - 7a + 12) + 10.$

Đặt $t = a^2 - 7a + 9.$

Ta có: $(t-3)(t+3) + 10 = (t^2 - 9) + 10 = t^2 + 1 > 0; \forall t$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Ví dụ 8: Chứng minh với mọi số thực x, y, z, t ta luôn có bất đẳng thức sau:
 $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq x(y + z + t).$ Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq x(y + z + t)$ (1)

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 \geq 4x(y + z + t)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 4xz + 4z^2) + (x^2 - 4xt + 4t^2) + x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (x - 2t)^2 + x^2 \geq 0 \quad (2)$$

Ta có (2) luôn luôn đúng với mọi $x, y, z, t.$ Vậy (1) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x - 2y = x - 2z = x - 2t = x = 0 \Leftrightarrow x = y = z = t = 0$

Ví dụ 9: Chứng minh với mọi số thực a, b khác 0 ta luôn có bất đẳng thức

sau: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$

Giải

Đặt $T = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$ Ta có: $|T| = \left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| = \left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{a}\right| \geq 2$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \Leftrightarrow T^2 + 2 \geq 3T \Leftrightarrow (T-1)(T-2) \geq 0 \quad (*)$$

Nếu $T \geq 2$ thì $T-1 > 0$ và $T-2 \geq 0$ nên (*) đúng.

Nếu $T \leq -2$ thì $T-1 < 0$ và $T-2 < 0$ nên (*) đúng.

Vậy với mọi số thực a, b khác 0 ta luôn có $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right).$

Ví dụ 10: Cho x, y là hai số thực khác 0. Chứng minh:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

Giải

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow |t| = \left|\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right| = \left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right|$ mà $\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| \geq 2$ (do bất đẳng thức

Côsi) $\Rightarrow |t| \geq 2 \Rightarrow t \leq -2$ hay $t \geq 2.$ Khi đó: $t^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2$

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow t^2 + 2 \geq 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) \geq 0$ (2)

(2) là hiển nhiên đúng do $t \leq -2$ hay $t \geq 2$.

Ví dụ 11: Cho các số dương x, y, z thỏa $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Chứng minh:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2$$

Giải

Ta có:
$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^3}{x\sqrt{1-x^2}} \geq \frac{x^3}{\frac{x^2+1-x^2}{2}} = 2x^3$$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} \geq 2y^3$ và $\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2z^3$

Suy ra:
$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2(x^3 + y^3 + z^3) = 2$$

Ví dụ 12 : Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $(x+y)^2 + 7(x+y) + y^2 + 10 = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + 1$.

Giải:

Từ giả thiết ta suy ra $(x+y)^2 + 7(x+y) + y^2 + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + 2 \cdot \frac{7}{2}(x+y) + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 10 = -y^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y+\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x+y+\frac{7}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left|x+y+\frac{7}{2}\right| \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x+y+\frac{7}{2} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -4 \leq x+y+1 \leq -1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -4 , giá trị lớn nhất của P là -1 .

Ví dụ 13: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$

Giải

Ta có $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x$, $P = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{3(x^2 + 1)}{3(x^2 - x + 1)}$

$$= \frac{2(x^2 - x + 1) + x^2 + 2x + 1}{3(x^2 - x + 1)} = \frac{2}{3} + \frac{(x+1)^2}{3(x^2 - x + 1)} \geq \frac{2}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2}{3}$, khi $x = -1$.

Mặt khác ta có:

$$P = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{2x^2 - 2x + 2 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - x + 1} = \frac{2(x^2 - x + 1) - (x - 1)^2}{x^2 - x + 1}$$

$$= 2 - \frac{(x - 1)^2}{x^2 - x + 1} \leq 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 2 khi $x = 1$.

Ví dụ 14: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy$

Với $x > 0; y > 0; x + y \leq 1$

(Đề TS lớp 10 chuyên Toán Lê Hồng Phong –TPHCM –2000-2001)
Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương a, b ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (1)

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}.$$

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (2); \frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) ta có :

$$A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy = \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy}\right) + \left(4xy + \frac{1}{4xy}\right) + \frac{5}{4xy}$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{4}{x^2 + y^2 + 2xy} + 2\sqrt{4xy \cdot \frac{1}{4xy}} + \frac{5}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{4}{(x+y)^2} + 2 + \frac{5}{(x+y)^2} \geq 11 \Rightarrow A \geq 11.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là 11, khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 15 : Cho $x > 0; y > 0; x + y \leq 1$.

Chứng minh $\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{1}{y^2 + xy} \geq 4$

(Đề TS lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong –TPHCM –2003-2004)

ABC

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương a, b ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}, \text{ suy ra}$$

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}. \text{ Áp dụng vào bài toán ta có}$$

$$\frac{1}{x^2+xy} + \frac{1}{y^2+xy} \geq \frac{4}{x^2+xy+y^2+xy} = \frac{4}{(x+y)^2}$$

Ví dụ 16: Chứng minh rằng: $\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{2002^2 + 2003^2} < \frac{1}{2}$.

Giải

- Ta có: $\frac{1}{n^2 + (n+1)^2} = \frac{1}{2n^2 + 2n + 1} < \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$
- Với $n=1$: $\frac{1}{2^2 + 1^2} = \frac{1}{5} < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right)$
- Với $n=2$: $\frac{1}{3^2 + 2^2} = \frac{1}{13} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$
- Do đó: $\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{2002^2 + 2003^2} < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2003} \right) < \frac{1}{2}$.

Ví dụ 17: Cho ba số dương x, y, z thỏa điều kiện $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right)$.

Giải

$$\text{Ta có: } P = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xyz}$$

Với $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{1}{xyz} \geq 27$$

$$\cdot \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq 3^3 \sqrt{\left(\frac{1}{xyz} \right)^2} \geq 27$$

$$\cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3^3 \sqrt{\frac{1}{xyz}} \geq 9$$

$$\cdot \text{Vậy: } P \geq 1 + 9 + 27 + 27 = 64$$

Nên giá trị nhỏ nhất của $P = 64$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 18: Cho $0 < a < b < c < d$. Chứng minh $(b + c)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) < \frac{(a + d)^2}{ad}$

Giải

$$\begin{aligned} (b + c)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) < \frac{(a + d)^2}{ad} &\Leftrightarrow \frac{(b + c)^2}{bc} - \frac{(a + d)^2}{ad} < 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(b + c)^2 ad - (a + d)^2 bc}{abcd} < 0 &\Leftrightarrow (b + c)^2 ad - (a + d)^2 bc < 0 \end{aligned}$$

(vì a, b, c, d dương)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow b^2 ad + c^2 ad - a^2 bc - d^2 bc < 0 &\Leftrightarrow bd(ab - cd) + ac(cd - ab) < 0 \\ \Leftrightarrow (ad - cd)(bd - ac) < 0 \end{aligned}$$

Mà $0 < a < d$ và $0 < b < c$, nên $ab < cd \Leftrightarrow ab - cd < 0$

$d > c > 0$ và $b > a > 0$, nên $bd > ac \Leftrightarrow bd - ac > 0$

Suy ra $(ab - cd)(bd - ac) < 0$ (đpcm).

Ví dụ 19: Cho $a^3 + b^3 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = a + b$

Giải

Đặt $a = 1 + x$ (1)

Ta có: $b^3 = 2 - (1 + x)^3 = 1 - 3x - 3x^2 - x^3 \leq 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = (1 - x)^3$

. Vậy: $b^3 \leq (1 - x)^3 \Leftrightarrow b \leq 1 - x$ (2)

. Từ (1) và (2) suy ra: $a + b \leq 2$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$ hay $a = b = 1$

Vậy A đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $a = b = 1$.

Ví dụ 20: Chứng minh rằng với mọi $x, y \neq 0$, ta có: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

Giải

Biến đổi tương đương: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)xy + 2x^2y^2 - 2xy(x^2 + y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 - 2xy) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right](x - y)^2 \geq 0$$

Ví dụ 21: Với $a > 0, b > 0, c > 0$, hãy chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$

b. $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$

c. $\frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq a + b + c$

Giải

a. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} \Leftrightarrow \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$$

b. $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b.$

Chứng minh tương tự câu a ta có: $\frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} \geq 2a; \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c$

Do đó $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2b + 2a + 2c.$

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq b + a + c.$$

c. $a, b > 0.$

Ta có: $(a + b)(a - b)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow (a + b)[(a^2 - ab + b^2) - ab] \geq 0 \Rightarrow (a^3 + b^3 - ab(a + b)) \geq 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{2ab} \geq \frac{a + b}{2}$$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{b^3 + c^3}{2bc} \geq \frac{b + c}{2}; \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq \frac{c + a}{2}$

Do đó: $\frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq \frac{a + b}{2} + \frac{b + c}{2} + \frac{c + a}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq a + b + c$$

Ví dụ 22: Cho a, b là các số thực dương.

Chứng minh rằng: $(a + b)^2 + \frac{a + b}{2} \geq 2a\sqrt{b} + 2b\sqrt{a}.$

Giải

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0; \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \forall a, b > 0$$

$$\Rightarrow a - \sqrt{a} + \frac{1}{4} \geq 0; b - \sqrt{b} + \frac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow \left(a - \sqrt{a} + \frac{1}{4}\right) + \left(b - \sqrt{b} + \frac{1}{4}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow a + b + \frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0 (\forall a, b > 0).$$

Mặt khác $a + b \geq 2\sqrt{ab} > 0$

Nhân từng vế ta có: $(a + b) \left[(a + b) + \frac{1}{2} \right] \geq 2\sqrt{ab} (\sqrt{a} + \sqrt{b})$

$$\Rightarrow (a + b)^2 + \frac{(a + b)}{2} \geq 2a\sqrt{b} + 2b\sqrt{a}.$$

Ví dụ 23: Cho các số dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 \geq x^3 + y^4$.

Chứng minh: $x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2 \leq x + y \leq 2$.

Ta có $(y^2 - y) + 2 \geq 0 \Rightarrow 2y^3 \leq y^4 + y^2$

$$\Rightarrow (x^3 + y^2) + (x^2 + y^3) \leq (x^2 + y^2) + (y^4 + x^3)$$

Mà $x^3 + y^4 \leq x^2 + y^3$ do đó: $x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2$ (1)

+ Ta có: $x(x - 1)^2 \geq 0; y(y + 1)(y - 1)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow x(x - 1)^2 + y(y + 1)(y - 1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 + x + y^4 - y^3 - y^2 + y \geq 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2) + (x^2 + y^3) \leq (x + y) + (x^3 + y^4)$$

Mà $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq x + y$ (2)

Và $(x + 1)(x - 1) \geq 0; (y - 1)(y^3 - 1) \geq 0$

$$x^3 - x^2 - x + 1 + y^4 - y - y^3 + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x + y) + (x^2 + y^3) \leq 2 + (x^3 + y^4)$$

Mà $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4 \Rightarrow x + y \leq 2$

Từ (1), (2), (3) ta có: $x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2 \leq x + y \leq 2$.

Ví dụ 24: Chứng minh các bất đẳng thức:

a. $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ với $a > 0, b > 0$

b. $x^2 + x + 1 \geq 2|x|\sqrt{x+1}$ với $x \geq -1$.

Giải

$$\begin{aligned}
\text{a. } a^3 + b^3 &\geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2 - ab) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0 \text{ (Bất đẳng thức này luôn đúng)}
\end{aligned}$$

Vậy $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ là bất đẳng thức đúng.

$$\text{b. } x \geq -1 \text{ nên } x+1 \geq 0$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm, ta được:

$$x^2 + (x+1) \geq 2\sqrt{x^2(x+1)} \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \geq 2|x|\sqrt{x+1}$$

Ví dụ 25: Chứng minh: $(ab+cd)^2 \leq (a^2+c^2)(b^2+d^2)$

Áp dụng: Cho $x+4y=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=4x^2+4y^2$

Giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } (ab+cd)^2 &\leq (a^2+c^2)(b^2+d^2) \\
&\Leftrightarrow a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 \leq a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2 \\
&\Leftrightarrow 0 \leq a^2d^2 - 2abcd + c^2b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (ad-bc)^2 \text{ (đpcm)}
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $ad=bc$.

Áp dụng hằng đẳng thức trên ta có:

$$\begin{aligned}
5^2 &= (x+4y)^2 \leq (x^2+y^2)(1+16) \Rightarrow x^2+y^2 \geq \frac{25}{17} \\
\Rightarrow 4x^2+4y^2 &\geq \frac{25}{17} \Rightarrow 4x^2+4y^2 \geq \frac{100}{17}
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{5}{17}, y=\frac{20}{17}$.

Ví dụ 26: Chứng minh rằng a, b, c là các số dương bất kì, ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Giải

Có thể giả thiết $a \geq b \geq c$. Khi đó: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} + \frac{b}{c+a} - \frac{1}{2} + \frac{c}{a+b} - \frac{1}{2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{a-b+a-c}{b+c} + \frac{b-c+b-a}{c+a} + \frac{c-a+c-b}{a+b} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (a-b)\left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a}\right) + (b-c)\left(\frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b}\right) \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức sau cùng hiển nhiên theo giả thiết ban đầu.

Ví dụ 27: Chứng minh rằng ta có: $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ với a, b, c là ba cạnh và p là nửa chu vi của một tam giác.

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b+c-a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a+c-b} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b-c} - \frac{1}{c} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(a-b)^2}{(b+c-a)(a+c-b)} + \frac{2(b-c)^2}{(a+c-b)(a+b-c)} + \frac{2(c-a)^2}{(a+b-c)(b+c-a)} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng do các bất đẳng thức của ba cạnh trong một tam giác.

Ví dụ 28: Cho $x, y \geq 0$ và $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x^3 + y^3 \leq 1$.

Giải

$$\text{Từ giả thiết suy ra } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 \leq x^2 \\ y^3 \leq y^2 \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2 = 1.$$

$$\text{Ta lại có: } (x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2 \Rightarrow x+y \leq \sqrt{2}.$$

$$1 = (x^2 + y^2)^2 = (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{y^3}) \leq (x+y)(x^3 + y^3) \leq \sqrt{2}(x^3 + y^3)$$

$$\text{suy ra } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq (x^3 + y^3)$$

Ví dụ 29: Cho $x > 0$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}}$$

Giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 6 \quad (x > 0). \text{ Vậy } P_{\min} = 6 \text{ đạt được khi } x = 1.$$

Ví dụ 30: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$.

Giải

Để dàng chứng minh với $a, b > 0$:

$$a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \Leftrightarrow \frac{a^3}{b} + b^2 \geq a(a + b) \quad (1)$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự: } \frac{b^3}{c} + c^2 \geq b(b + c) \quad (2); \quad \frac{c^3}{a} + a^2 \geq c(c + a) \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 31: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ với mọi a, b, c

b. $\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$

c. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$ với mọi a, b, c, d, e

Giải

a. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0. \text{ Bất đẳng thức này đúng.}$$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ là bất đẳng thức đúng.

b. Áp dụng câu a) ta có:

$$\begin{aligned} a^8 + b^8 + c^8 &\geq a^4 b^4 + b^4 c^4 + c^4 a^4 = (a^2 b^2)^2 + (b^2 c^2)^2 + (c^2 a^2)^2 \\ &\geq (a^2 b^2)^2 (b^2 c^2) + (b^2 c^2)(c^2 a^2) + (a^2 b^2)(c^2 a^2) = a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) \\ &\geq a^2 b^2 c^2 (ab + bc + ca) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{a^2 b^2 c^2 (ab + bc + ca)}{a^3 b^3 c^3} \Leftrightarrow \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

c. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - ab - ac - ad - ae \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{4} + b^2 - ab \right) + \left(\frac{a^2}{4} + c^2 - ac \right) + \left(\frac{a^2}{4} + d^2 - ad \right) + \left(\frac{a^2}{4} + e^2 - ae \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e \right)^2 \geq 0 \text{ Bất đẳng thức này đúng.}$$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$ là BĐT đúng.

Ví dụ 32: Cho $x + y = 1 (x > 0; y > 0)$.

Tìm giá trị lớn nhất của $A = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Giải

Do $A > 0$ nên A lớn nhất $\Leftrightarrow A^2$ lớn nhất

$$\text{Xét } A^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} = 1 + 2\sqrt{xy} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \text{ (Bất đẳng thức Côsi)} \Rightarrow 1 \geq 2\sqrt{xy} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } A^2 = 1 + 2\sqrt{xy} \leq 1 + (x + y) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{Max } A^2 = 2 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}, \quad \text{Max } A = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 33: Cho biểu thức: $M = x^2 - 5x + y^2 + xy - 4y + 2014$.

Với giá trị nào của x, y thì M đạt giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Giải

$$\text{Ta có } M = (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) + (xy - x - 2y + 2) + 2007$$

$$M = (x - 2)^2 + (x - 2)(y - 1) + (y - 1)^2 + 2007$$

$$\Rightarrow M = \left[(x - 2) + \frac{1}{2}(y - 1) \right]^2 + \frac{3}{4}(y - 1)^2 + 2007$$

$$\text{Do } (y - 1)^2 \geq 0 \text{ và } \left[(x - 2) + \frac{1}{2}(y - 1) \right]^2 \geq 0, \forall x, y$$

$$\Rightarrow M \geq 2007 \Rightarrow M_{\min} = 2007 \Leftrightarrow x = 2; y = 1.$$

Ví dụ 34: Cho $x \geq 1, y \geq 1$, Chứng minh: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$

Giải

Chuyển vế, quy đồng ta được:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2(xy-1) \geq 0 \text{ đúng vì } xy \geq 1.$$

Ví dụ 35: Cho các số x, y, z dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$$

ABC

Giải

Trước hết ta phải chứng minh bất đẳng thức phụ

Với mọi a, b thuộc $\mathbb{R}$; $x, y > 0$ ta có $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ (*)

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq (a+b)^2xy$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2 + a^2xy + b^2x^2 + b^2xy \geq a^2xy + 2abxy + b^2xy$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 \geq 2abxy \Leftrightarrow a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0 \quad (**) \text{ bất đẳng thức } (**) \text{ đúng với mọi } a, b \text{ và } x, y > 0$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $ay = bx$ hay $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Áp dụng bất đẳng thức (*) hai lần ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+y+z} &= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2}{2x+y+z} \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{x+y} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{x+z} = \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^2}{x+y} + \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^2}{x+z} \\ &\leq \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{x} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{y} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{x} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{z} = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right); \quad \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right)$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \\ &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right) \\ &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} \right) \leq \frac{4}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq \frac{1}{4} \cdot 4 = 1. \text{ Vì } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \end{aligned}$$

Ví dụ 36: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{x^2 - 2x + 2006}{x^2}$ (với $x \neq 0$)

Giải

$$B = \frac{x^2 - 2x + 2006}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$\text{Ta có: } B = \frac{x^2 - 2x + 2006}{x^2} \Leftrightarrow B = \frac{2006x^2 - 2 \cdot 2006x + 2006^2}{2006x}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{(x - 2006)^2 + 2006x^2}{x^2} \Leftrightarrow B = \frac{(x - 2006)^2}{2006x^2} + \frac{2005}{2006}$$

Vì $(x - 2006)^2 \geq 0$ với mọi x ; $x^2 > 0$ với mọi x khác 0

$$\Rightarrow \frac{(x - 2006)^2}{2006x^2} \geq 0 \Rightarrow B \geq \frac{2005}{2006} \Rightarrow B \text{ nhỏ nhất } = \frac{2005}{2006} \text{ khi } x = 2006.$$

Ví dụ 37: Cho các số dương a, b, c , Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{b+a} < \frac{a+c}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c} \quad (3)$$

$$\text{Cộng từng vế (1), (2), (3): } 1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

Ví dụ 38: Chứng minh:

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+d} + \frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+d} > \frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+d}$$

Trong đó A, a, B, b, C, c, d là số dương.

Giải

Bài toán phụ: Cho $0 < x < y, z > 0$. Chứng minh rằng $\frac{x+z}{y+z} > \frac{x}{y}$

Ta có $0 < x < y; z > 0 \Rightarrow zy > zx \Rightarrow zx + zy > xz + xy$

$$\Rightarrow y(x+z) > x(y+z) \Rightarrow \frac{x+z}{y+z} > \frac{x}{y}$$

Áp dụng bài toán phụ, ta có: $\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+d} > \frac{A+a}{A+a+c+d}$

Tương tự: $\frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+d} > \frac{C+c}{C+c+a+d}$

Mà $\frac{A+a}{A+a+c+d} + \frac{C+c}{A+a+c+d} > \frac{A+a}{C+c+A+a+b+d} + \frac{C+c}{C+c+A+a+b+d}$

Do đó $\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+d} + \frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+d} > \frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+d}$

Ví dụ 39: Cho $x, y > 0$ và $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy.$$

ABC

Giải

Với $a, b > 0$, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}, \text{ và } \frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}$$

Áp dụng (1); (2); (3) ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2xy} \right) + \left(4xy + \frac{1}{4xy} \right) + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{xy} \\ &\geq \frac{4}{x^2+y^2+2xy} + 2\sqrt{4xy \cdot \frac{1}{4xy}} + \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{(x+y)^2} = \frac{4}{(x+y)^2} + 2 + \frac{5}{(x+y)^2} \\ &\geq 4 + 2 + 5 = 11 \Rightarrow A \geq 11 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là 11.

Ví dụ 40: Cho $a, b > 0$, chứng minh: $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Giải

$$\text{Ta có } \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \Leftrightarrow (a-b)\sqrt{a} - (a-b)\sqrt{b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \geq 0.$$

Ví dụ 41: Chứng minh: Với $a \geq b \geq 1$: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} - \frac{1}{1+ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab-a^2}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{ab-b^2}{(1+b^2)(1+ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b-a)}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{b(a-b)}{(1+b^2)(1+ab)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b-a}{1+ab} \left(\frac{a}{1+a^2} - \frac{b}{1+b^2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{1+ab} \left(\frac{a+ab^2-b-ba^2}{(1+a^2)(1+b^2)} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)} \geq 0.$$

$$\text{Vì } a \geq b \geq 1 \Rightarrow ab \geq 1 \Leftrightarrow ab-1 \geq 0.$$

Ví dụ 42: Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$; $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Giải

$$a. \quad a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0.$$

Ví dụ 43: a. Chứng minh: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$

b. Chứng minh: $x^4 + y^4 \geq \frac{(x+y)^4}{8}$

c. Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y = 1$. Chứng minh $8(x^4 + y^4) + \frac{1}{xy} \geq 5$

Giải

a. **Cách 1:**

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= \frac{x^2 + y^2 + x^2 + y^2}{2} = \frac{(x^2 + y^2 + 2xy) + (x^2 + y^2 - 2xy)}{2} \\&= \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2} \geq \frac{(x+y)^2}{2} \text{ vì } (x-y)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Cách 2: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$

$$= 2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \text{ (BĐT đúng)}. \text{ Do đó } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \text{ là BĐT đúng.}$$

b. Áp dụng câu a) ta có: $x^4 + y^4 = (x^2)^2 + (y^2)^2 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2}$ (1)

Theo a) ta có: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 \geq \left[\frac{(x+y)^2}{2} \right]^2$ (bình phương hai vế không âm).

$$\text{Vậy } (x^2 + y^2)^2 \geq \frac{(x+y)^4}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có: } x^4 + y^4 \geq \frac{(x+y)^4}{8}$$

c. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \text{ mà } x + y = 1. \text{ Do đó: } 2\sqrt{xy} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{xy} \geq 4 \quad (3)$$

$$\text{Theo b) có } x + y = 1. \text{ Do đó: } x^4 + y^4 \geq \frac{1}{8}$$

$$\text{Từ (3) và (4) ta có: } 8(x^4 + y^4) + \frac{1}{xy} \geq 8 \cdot \frac{1}{8} + 4 = 5.$$

Ví dụ 44: Chứng minh:

$$a. \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}; a, b, c \geq 0 \quad b. \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2.$$

Giải

a. Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2ca}{9} \geq \frac{ab + bc + ca}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \text{ (ĐPCM).}$$

b. Ta có: $3(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)$

$$\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

Ví dụ 45: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 7}$ để y xác định với mọi x

Giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 7} \Leftrightarrow yx^2 - 5yx + 7y = x^2 \Leftrightarrow (y-1)x^2 - 5yx + 7y = 0$$

$$* \text{ Xét } y = 1, \text{ ta có: } -5x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$$

* Xét $y \neq 1$, ta có:

$$\Delta = 25y^2 - 28y(y-1) = 25y^2 - 28y^2 + 28y = -3y^2 + 28y = y(-3y + 28).$$

Để có x thì phải có $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0; -3y + 28 \geq 0 \\ y \leq 0; -3y + 28 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0; y \leq \frac{28}{3} \\ y \leq 0; y \geq \frac{28}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{28}{3}$$

$$y = 0 \text{ thì } x = \frac{5y}{2(y-1)} = 0; y = \frac{28}{3} \text{ thì } x = \frac{5y}{2(y-1)} = \frac{14}{5}$$

Vậy: giá trị nhỏ nhất của y là 0 với $x = 0$.

Giá trị lớn nhất của y là $\frac{28}{3}$ với $x = \frac{14}{5}$

Ví dụ 46: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

a. $y = -2x^2 + x - 1$

b. $y = \frac{x+1}{x^3 - x^2 + 2x + 4}$.

Giải

a.
$$y = -2x^2 + x - 1 = -2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) - 1 = -2\left[x^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] - 1$$
$$= -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8} \leq -\frac{7}{8}, \forall x.$$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{7}{8}$ khi $x - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

b.
$$y = \frac{x+1}{x^3 - x^2 + 2x + 4} = \frac{x+1}{(x^2 - 2x + 4)(x+1)} = \frac{1}{x^2 - 2x + 4}$$
$$= \frac{1}{(x-1)^2 + 3} \leq \frac{1}{3}, \forall x \neq -1.$$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{3}$ khi $x = 1$.

Ví dụ 47: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a. $y = \frac{x^2}{4} + x - 1$

b. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3}$.

Giải

a.
$$y = \frac{x^2}{4} + x - 1 = \frac{1}{4}(x^2 + 4x) - 1 = \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4 - 4) - 1$$
$$= \frac{1}{4}(x+2)^2 - 2 \geq -2, \forall x.$$

Hàm số có giá trị nhỏ nhất $\text{Min}_y = -2$ khi $x = -2$.

b.
$$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{(x^2 + 2x + 3) - 1}{x^2 + 2x + 3} = 1 - \frac{1}{x^2 + 2x + 3} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2 + 2}$$

Hàm số có giá trị nhỏ nhất khi $\frac{1}{(x+1)^2 + 2}$ có giá trị lớn nhất, tức là khi

$(x+1)^2 + 2$ nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi $x = -1$.

Vậy hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất $\text{Min}_y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ khi $x = -1$.

Ví dụ 48: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a. $y = 2x^2 - x + 5$

b. $y = 5 - \sqrt{(x-2)(4-x)}$

c. $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 4x + 9}$

d. $y = \frac{1}{2}|x+3| - 4$.

Giải

a. $y = 2x^2 - x + 5 = 2\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + 5 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{39}{8} \geq \frac{39}{8}$ với mọi giá trị của x . Hàm số có giá trị nhỏ nhất: $\text{Min}y = \frac{39}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

b. $y = 5 - \sqrt{(x-2)(4-x)}$ có giá trị nhỏ nhất khi $\sqrt{(x-2)(4-x)}$ có giá trị lớn nhất. Ta thấy $\sqrt{(x-2)(4-x)}$ có giá trị lớn nhất bằng 1 khi $x = 3$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $\text{Min}y = 4$ đạt được khi $x = 3$.

c. $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 4x + 9} = \frac{\frac{1}{2}(2x^2 + 4x + 9) - \frac{11}{2}}{2x^2 + 4x + 9} = \frac{1}{2} - \frac{11}{4x^2 + 8x + 18}$
 $= \frac{1}{2} - \frac{11}{4(x+1)^2 + 14}$.

Hàm số có giá trị nhỏ nhất khi $\frac{11}{4(x+1)^2 + 14}$ có giá trị lớn nhất, hay khi

$4(x+1)^2 + 14$ có giá trị nhỏ nhất, đạt được khi $x = -1$.

Vậy: $\text{Min}y = \frac{1}{2} - \frac{11}{14} = -\frac{2}{7}$ đạt được khi $x = -1$.

d. Vì $|x+3| \geq 0$ với mọi giá trị của x nên $y = \frac{1}{2}|x+3| - 4 \geq -4$ với mọi giá trị của x . Hàm số có giá trị nhỏ nhất: $\text{Min}y = -4$ đạt được khi $x = -3$.

Ví dụ 49: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số:

a. $y = -2x + 1$ nếu x lấy các giá trị không âm và không lớn hơn 10.

b. $y = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}$ nếu x lấy các giá trị không nhỏ hơn 2 và không lớn hơn 5.

Giải

a. Với $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 10$, ta có:

$$f(x_1) - f(x_2) = (-2x_1 + 1) - (-2x_2 + 1) = 2(x_2 - x_1) \geq 0$$

nghĩa là $f(x_1) \geq f(x_2)$, hàm số nghịch biến với $0 \leq x \leq 10$.

Từ đó suy ra $f(0) \geq f(x)$ và $f(x) \geq f(10)$ với mọi x trong đoạn $[0; 10]$.

Vậy giá trị lớn nhất của $f(x)$ là $f(0) = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $f(10) = -19$ (với x lấy các giá trị không âm và không lớn hơn 10).

b. Lấy x_1, x_2 tùy ý sao cho $2 \leq x_1 \leq x_2 \leq 5$, ta có:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \left(-\frac{x_1^2}{2} + x_1 + \frac{3}{2} \right) - \left(-\frac{x_2^2}{2} + x_2 + \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) - (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1) \left(\frac{x_2 + x_1}{2} - 1 \right) > 0 \end{aligned}$$

Nghĩa là hàm số $f(x)$ nghịch biến với $2 \leq x \leq 5$.

Lập luận như câu a, ta thấy $f(2) \geq f(x)$ và $f(x) \geq f(5)$ với mọi x mà $2 \leq x \leq 5$. Giá trị lớn nhất của $f(x)$ với $2 \leq x \leq 5$ là $\text{Max} f = f(2) = \frac{3}{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ với $2 \leq x \leq 5$ là: $\text{Min} f = f(5) = -6$.

Ví dụ 50: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a. $y = (\sqrt{3} - 1)x + \frac{3}{2}$ nếu x lấy các giá trị sao cho $\frac{3}{2} \leq x \leq 4$.

b. $y = -\frac{x^2}{2} + x + 1$ nếu x lấy các giá trị sao cho $-3 \leq x \leq 0$.

Giải

a. Do $\sqrt{3} - 1 > 0$, hàm số bậc nhất $y = f(x) = (\sqrt{3} - 1)x + \frac{3}{2}$ đồng biến.

Tại giá trị x_0 tùy ý thỏa mãn $\frac{3}{2} \leq x_0 \leq 4$ ta đều có $f\left(\frac{3}{2}\right) \leq f(x_0) \leq f(4)$.

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số với $\frac{3}{2} \leq x_0 \leq 4$ là:

$$f(4) = (\sqrt{3} - 1) \cdot 4 + \frac{3}{2} = 4\sqrt{3} - \frac{5}{2}.$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số với $\frac{3}{2} \leq x_0 \leq 4$ là:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

b. Hàm số $y = -\frac{x^2}{2} + x + 1$ nghịch biến khi biến số x lấy giá trị sao cho $-3 \leq x \leq 0$ nên giá trị lớn nhất của hàm số đó trên đoạn này là:

$$f(-3) = \frac{(-3)^2}{2} - 3 + 1 = \frac{5}{2}, \text{ giá trị nhỏ nhất là } f(0) = 1.$$

Ví dụ 51: a. Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y \leq 1$. Chứng minh: $\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{1}{y^2 + xy} \geq 4$

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{3}{2 + \sqrt{2x - x^2} + 7}$

ABC

Giải

- a. Bài toán phụ: Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

Chứng minh: Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}$$

$$\text{Do đó: } (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \Rightarrow (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Áp dụng bài toán phụ trên ta có:

$$\frac{1}{x^2+xy} + \frac{1}{y^2+xy} \geq \frac{4}{x^2+xy+y^2+xy} = \frac{4}{(x+y)^2}.$$

$$\text{Mà } x, y > 0 \text{ và } x+y \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x+y} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{(x+y)^2} \geq 1.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{x^2+xy} + \frac{1}{y^2+xy} \geq 4$$

- b. A có nghĩa $\Leftrightarrow 2x - x^2 + 7 \geq 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 2x + 1) + 8 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 8 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq x-1 \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -2\sqrt{2}+1 \leq x \leq 2\sqrt{2}+1$$

$$\text{Điều kiện } -2\sqrt{2}+1 \leq x \leq 2\sqrt{2}+1 \quad (*).$$

$$\text{Ta có: } 2x - x^2 + 7 = -(x-1)^2 + 8 \leq 8. \text{ Do đó: } \sqrt{2x - x^2 + 7} \leq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Nên } 2 + \sqrt{2x - x^2 + 7} \leq 2 + 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{2} + 1)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2 + \sqrt{2x - x^2 + 7}} \geq \frac{1}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}. \text{ Vậy } A \geq \frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra } \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \quad (\text{thỏa } (*))$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của A là } \frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow x=1$$

Bài tập vận dụng

1. Chứng minh: $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc.$

2. Chứng minh: $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$

3. Chứng minh: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2zx + 2yz.$

4. Chứng minh: $x^4 + y^4 + z^4 + 1 \geq 2xy(xy^2 - x + z + 1).$

5. Chứng minh: Nếu $a + b \geq 1$ thì: $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$.

6. Chứng minh: $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$; với $a, b, c \geq 0$

7. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{2002}{\sqrt{2003}} + \frac{2003}{\sqrt{2002}} > \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$

8. Chứng minh: $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$; với $a, b, c \geq 0$.

9. Chứng minh: $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3$ với $a, b, c \geq 0$.

10. Cho a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Chứng minh rằng $ab + bc + ca + a + b + c \leq 6$

11. Chứng minh: $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$; với $a, b, c \geq 0$.

12. Chứng minh: $\frac{x^6 + y^9}{4} \geq 3x^2y^3 - 16$; với $x, y \geq 0$

13. Chứng minh: $2a^4 + \frac{1}{1 + a^2} \geq 3a^2 - 1$.

14. Chứng minh: $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$.

15. Cho $a, b > 0$. Chứng minh: $\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{b^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + c^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

16. Cho $a, b \geq 1$, Chứng minh: $ab \geq a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}$.

17. Cho $x, y, z > 1$ và $x + y + z = 4$.

Chứng minh: $xyz \geq 64(x-1)(y-1)(z-1)$.

18. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$, Chứng minh:

a. $b + c \geq 16abc$.

b. $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$.

c. $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64$.

19. Đặt $S_1 = 1 + \frac{1}{5}$; $S_2 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}$; $S_3 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3}$

...

$$S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{35}{36}$.

20. Chứng minh: a. $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

b. $\frac{x+8}{\sqrt{x-1}} \geq 6, \forall x > 1$.

c. $\frac{a^2 + 5}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 4$.

21. Chứng minh: $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$; với $a, b, c > 0$.

22. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2bc} + \frac{1}{b^2+2ac} + \frac{1}{c^2+2ab} \geq 9$$

23. Chứng minh: $\frac{x^2}{1+16x^4} + \frac{y^2}{1+16y^4} \leq \frac{1}{4}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

24. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn: $a+b+c=abc$ và $a^2=bc$.
Chứng minh $a^2 \geq 3$.

25. Chứng minh rằng:

a) Với mọi số tự nhiên n , ta có: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

Từ đó suy ra: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2005}} < 2\sqrt{2005}$.

b) Nếu $a > c, b > c, c > 0$ thì: $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$.

c) Nếu $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$$

26. Cho a, b, c là số đo độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Chứng minh:

a. $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$.

b. $abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

c. $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 > 0$.

27. Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh:

$$\frac{3}{xy+yz+zx} + \frac{2}{x^2+y^2+z^2} > 14.$$

28. Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$; với $a, b, c > 0$

29. Cho $a, b, c > 0$, Chứng minh:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

30. Cho $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}, x > 1$. Định x để y đạt giá trị nhỏ nhất.

31. Cho $y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{x+1}, x > -1$. Định x để y đạt giá trị nhỏ nhất.

32. Cho $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{2x-1}, x > \frac{1}{2}$. Định x để y đạt giá trị nhỏ nhất.

33. Cho $y = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}$, $0 < x < 1$. Định x để y đạt giá trị nhỏ nhất.
34. Cho $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$, $x > 0$. Định x để y đạt giá trị nhỏ nhất.
35. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x}$, với $x > 0$.
36. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^3}$, với $x > 0$.
37. Tìm giá trị lớn nhất của $f(x) = (2x - 1)(3 - 5x)$.
38. Cho $y = (6 - x)$, $0 \leq x \leq 6$. Định x để y đạt giá trị lớn nhất.
39. Cho $y = (x + 3)(5 - 2x)$, $-3 \leq x \leq \frac{5}{2}$. Định x để y đạt giá trị lớn nhất.
40. Cho $y = (2x + 5)(5 - x)$, $-\frac{5}{2} \leq x \leq 5$. Định x để y đạt giá trị lớn nhất.
41. Cho $y = (6x + 3)(5 - 2x)$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$. Định x để y đạt giá trị lớn nhất.
42. Cho $y = \frac{x}{x^2 + 2}$. Định x để y đạt giá trị lớn nhất.
43. Cho $y = \frac{x^2}{(x^2 + 2)^3}$. Định x để y đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn và đáp số

- $$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - a(b - c) + b^2 + c^2 = 2bc \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - (b - c)\right)^2 \geq 0.$$
- $$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + 2a + 1 + b^2 + 2b + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0.$$
- $$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2zx + 2yz$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz \geq 0 \Leftrightarrow (x - y + z)^2 \geq 0.$$
- $$x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2xy(xy^2 - x + z + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^2 + 1 - 2x^2y^2 + 2x^2 - 2xz - 2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 + (x - z)^2 + (x - 1)^2 \geq 0.$$

$$5. \quad a + b \geq 1 \Rightarrow b \geq 1 - a \Rightarrow b^3 = (1 - a)^3 = 1 - a + a^2 + a^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 = 3\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}, \text{ ĐPCM.}$$

6. Áp dụng BĐT Côsi cho hai số không âm:

$$\Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geq 2\sqrt{bc}, \quad a + c \geq 2\sqrt{ac}$$

$$\Rightarrow (a + b)(b + c)(a + c) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$$

$$7. \quad \frac{2002}{\sqrt{2003}} + \frac{2003}{\sqrt{2002}} > \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$$

$$\Leftrightarrow 2002\sqrt{2002} + 2003\sqrt{2003} > 2002\sqrt{2003} + 2003\sqrt{2002}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2003} > \sqrt{2002} \text{ (đúng).}$$

8. Áp dụng BĐT Côsi cho ba số không âm:

$$\Rightarrow a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}, \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$\Rightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 9abc.$$

9. Ta có: $(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc.$

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}, \quad ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + abc = (1 + \sqrt[3]{abc})^3.$$

10. Ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab; \quad b^2 + c^2 \geq 2bc; \quad c^2 + a^2 \geq 2ac$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \Rightarrow ab + bc + ca \leq 3 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } a^2 + 1 \geq 2a; \quad b^2 + 1 \geq 2b; \quad c^2 + 1 \geq 2c$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c) \Rightarrow a + b + c \leq 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $ab + bc + ca + a + b + c \leq 6.$

11. Áp dụng BĐT Côsi cho hai số không âm:

$$\Rightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2\sqrt{\frac{abc^2}{ab}} = 2c; \quad \frac{bc}{a} + \frac{ba}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b^2ac}{ac}} = 2b;$$

$$\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a^2bc}{bc}} = 2a \Rightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$$

$$12. \quad \frac{x^6 + y^9}{4} \geq 3x^2y^3 - 16; \text{ với } x, y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^6 + y^9 + 64 \geq 12x^2y^3 \Leftrightarrow (x^2)^3 + (y^3)^3 + 4^3 \geq 12x^2y^3$$

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số không âm:

$$\Rightarrow (x^2)^3 + (y^3)^3 + 4^3 \geq 3x^2y^3 \cdot 4 = 12x^2y^3.$$

$$13. 2a^4 + \frac{1}{1+a^2} \geq 3a^2 - 1 \Leftrightarrow a^4 + a^4 + a^2 + 1 + \frac{1}{1+a^2} \geq 4a^2.$$

Áp dụng BĐT Côsi cho bốn số không âm $a^4, a^4, a^2 + 1, \frac{1}{1+a^2}$:

$$\Rightarrow a^4 + a^4 + a^2 + 1 + \frac{1}{1+a^2} \geq 4\sqrt[4]{a^4 a^4 (a^2 + 1) \frac{1}{1+a^2}} = 4a^2.$$

$$14. \text{Ta có: } a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) = a^2 + a^2b^2 + b^2 + b^2a^2 + c^2 + c^2a^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho sáu số không âm:

$$\Rightarrow a^2 + a^2b^2 + b^2 + b^2c^2 + c^2 + c^2a^2 \geq 6\sqrt[6]{a^6 b^6 c^6} = 6abc$$

$$15. \text{Ta có: } \frac{a}{a^2+b^2} \leq \frac{a}{2ab} = \frac{1}{2b}; \frac{b}{b^2+c^2} \leq \frac{b}{2bc} = \frac{1}{2c}; \frac{c}{a^2+c^2} \leq \frac{c}{2ac} = \frac{1}{2a}$$

$$\text{Vậy: } \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

$$16. \text{Ta có: } a = (a-1) + 1 \geq 2\sqrt{a-1}; b = (b-1) + 1 \geq 2\sqrt{b-1}$$

$$ab \geq 2a\sqrt{b-1}, ab \geq 2b\sqrt{a-1}; ab \geq a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}$$

$$17. \text{Ta có: } x = (x-1) + 1 = (x-1) + x + y + z - 3$$

$$= (x-1) + (x-1) + (y-1) + (z-1) \geq 4\sqrt[4]{(x-1)^2(y-1)(z-1)}$$

$$\text{Tương tự: } y \geq 4\sqrt[4]{(x-1)^2(y-1)(z-1)}; z \geq 4\sqrt[4]{(x-1)(y-1)(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow xyz \geq 64(x-1)(y-1)(z-1).$$

$$18.a. \text{Ta có: } \left(\frac{b+c}{2} \right)^2 \geq bc \Leftrightarrow 16abc \leq 16a \left(\frac{b+c}{2} \right)^2 = 16a \left(\frac{1-a}{2} \right)^2 = 4a(1-a)^2$$

$$= (1-a)(4a - 4a^2) = (1-a) \left[1 - (1-2a)^2 \right] \leq 1-a = b+c.$$

b. Ta

có:

$$(1-a)(1-b)(1-c) = (b+c)(a+c)(a+b) \geq 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{ab} = 8abc$$

$$c. \text{Ta có: } \left(1 + \frac{1}{a} \right) = \left(\frac{a+a+b+c}{a} \right) \geq \frac{4\sqrt[4]{a^2bc}}{a}. \text{ Tương tự:}$$

$$\left(1 + \frac{1}{b} \right) \geq \frac{4\sqrt[4]{ab^2c}}{b}; \left(1 + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{4\sqrt[4]{abc^2}}{c} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{a} \right) \left(1 + \frac{1}{b} \right) \left(1 + \frac{1}{c} \right) \geq 64.$$

$$19. \text{Với } k \geq 2, \text{ ta chứng minh được: } \frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k} = \frac{S_k - S_{k-1}}{S_{k-1}S_k} = \frac{1}{5^k S_{k-1}S_k} > \frac{1}{5^k S_k^2}$$

Lần lượt thay k từ 2 đến n, ta có:

$$\frac{1}{5^2 S_2^2} < \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}; \frac{1}{5^3 S_3^2} < \frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3}; \dots; \frac{1}{5^n S_n^2} < \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{1}{5^2 S_2^2} + \frac{1}{5^3 S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^n S_n^2} < \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_n} < \frac{1}{S_1}$$

Do đó: $\frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2 S_2^2} + \frac{1}{5^3 S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^n S_n^2} < \frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{S_1} < \frac{35}{36}$.

20.a. $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 \geq 2\sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow x^2 + 1 + 1 \geq 2\sqrt{x^2 + 1}$.

b. Ta có: $\frac{x+8}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-1+9}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + \frac{9}{\sqrt{x-1}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x-1} \cdot \frac{9}{\sqrt{x-1}}} = 6$.

c. Ta có: $(a^2 + 1) + 4 \geq 2\sqrt{4(a^2 + 1)} = 4\sqrt{a^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{a^2 + 5}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 4$.

21. Vì $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a+b} \leq \frac{ab}{2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{2}, \quad \frac{bc}{b+c} \leq \frac{bc}{2\sqrt{bc}} = \frac{\sqrt{bc}}{2}, \quad \frac{ac}{a+c} \leq \frac{ac}{2\sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{ac}}{2}$$

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}, \text{ dựa vào } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{2} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

22. Đặt $X = a^2 + 2bc$; $Y = b^2 + 2ac$; $Z = c^2 + 2ab$, ta có:

$$X + Y + Z = (a + b + c)^2 \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức $(X + Y + Z)\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}\right) \geq 9$, ta có:

$$\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \geq 9$$

23. Ta có: $\frac{x^2}{1+16x^4} = \frac{x^2}{1+(4x)^2} \leq \frac{x^2}{2 \cdot 4x^2} = \frac{1}{8}$

$$\frac{y^2}{1+16y^4} = \frac{y^2}{1+(4y)^2} \leq \frac{y^2}{2 \cdot 4y^2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{x^2}{1+16x^4} = \frac{y^2}{1+16y^4} \leq \frac{1}{4}$$

24. Từ giả thiết $a + b + c = abc$ và $a^2 = bc \Rightarrow b + c = a^3 - a \Rightarrow b$ và c là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - (a^3 - a)x + a^2 = 0$ (1)

$$\Delta = (a^3 - a)^2 - (2a)^2 = (a^3 + a)(a^3 - 3a) = a^2(a^2 + 1)(a^2 - 3)$$

Vì (1) có nghiệm nên $\Delta = a^2(a^2 + 1)(a^2 - 3) \geq 0$

Mà $a^2 > 0$; $a^2 + 1 > 0$ nên $a^3 - 3 \geq 0$ hay $a^2 \geq 3$.

25.a. Với $n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. Cho n lần lượt bằng 0, 1, 2, ..., 2004, ta

$$\text{được: } 1 < 2(1 - 0); \frac{1}{\sqrt{2}} < 2(\sqrt{2} - 1); \frac{1}{\sqrt{3}} < 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$\dots; \frac{1}{\sqrt{2005}} < 2(\sqrt{2005} - \sqrt{2004})$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên thì được:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2005}} < 2(1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{2005} - \sqrt{2004})$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2005}} < 2\sqrt{2005}, \text{ DPCM.}$$

b. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}} \leq 1 \quad (1).$$

Từ giả thiết: $a > c$, $b > c$, $c > 0$, ta có thể viết (1) dưới dạng:

$$\sqrt{\frac{c}{b}} \sqrt{\frac{(a-c)}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \sqrt{\frac{(b-c)}{b}} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương $x > 0$, $y > 0$:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \text{ ta có: } \sqrt{\frac{c}{b}} \sqrt{\frac{(a-c)}{a}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{b} + \frac{a-c}{a} \right) \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{c}{a}} \sqrt{\frac{(b-c)}{b}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a} + \frac{b-c}{b} \right) \quad (3)$$

Cộng (2) và (3) vế theo vế, ta được (1).

c. Sử dụng giả thiết $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, ta có:

$$A = \sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z}} = \sqrt[3]{ax^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = x\sqrt[3]{a}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{x} = \sqrt[3]{a}. \text{ Tương tự ta có: } \frac{A}{y} = \sqrt[3]{b}; \frac{A}{z} = \sqrt[3]{c}$$

ABC

Do đó: $\frac{A}{x} + \frac{A}{y} + \frac{A}{z} = A \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \right) = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$, ĐPCM.

26.a. Ta có: $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$

và $a > |b-c|; b > |a-c|; c > |a-b|$

$\Rightarrow a^2 > b^2 - 2ac + c^2; b^2 > a^2 - 2ac + c^2; c^2 > a^2 - 2ab + b^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

b. Ta có: $a^2 > a^2 - (b-c)^2 \Rightarrow a^2 > (a+c-b)(a+b-c)$

$b^2 > b^2 - (a-c)^2 \Rightarrow b^2 > (b+c-a)(a+b-c)$

$c^2 > c^2 - (a-b)^2 \Rightarrow c^2 > (b+c-a)(a+c-b)$

$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 > (a+b-c)^2 (a+c-b)^2 (b+c-a)^2$

$\Leftrightarrow abc > (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

c. $2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2 - a^4 - b^4 - c^4 > 0$

$\Leftrightarrow 4a^2 b^2 + 2c^2 (b^2 + a^2) - a^4 - b^4 - 2a^2 b^2 - c^4 > 0$

$\Leftrightarrow 4a^2 b^2 + 2c^2 (b^2 + a^2) - (a^2 + b^2)^2 - c^4 > 0$

$\Leftrightarrow (2ab)^2 - [(a^2 + b^2) - c^2]^2 > 0$

$\Leftrightarrow [c^2 - (a-b)^2][(a+b)^2 - c^2] > 0$

$\Leftrightarrow (c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c) > 0$, đúng.

Vì a, b, c là cạnh của tam giác

$\Rightarrow c-a+b > 0, c+a-b > 0, a+b-c > 0, a+b+c > 0$.

27. Từ $x+y+z=1$ suy ra

$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1$

$\frac{3}{xy + yz + zx} = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2) + 6(xy + yz + zx)}{xy + yz + zx} = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} + 6$

$\frac{2}{xy + yz + zx} = \frac{2(x^2 + y^2 + z^2) + 4(xy + yz + zx)}{xy + yz + zx} = \frac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} + 4$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$\frac{3}{xy + yz + zx} + \frac{2}{xy + yz + zx}$

$\geq 6 + 2 + 2\sqrt{\frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} \cdot \frac{4(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx}} = 8 + 2\sqrt{12} > 14$

28. Cách 1: Đặt $X = b + c$, $Y = c + a$, $Z = a + b$; $a + b + c = \frac{1}{2}(X + Y + Z)$

$$a = \frac{Y + Z - X}{2}, \quad b = \frac{Z + X - Y}{2}, \quad c = \frac{X + Y - Z}{2}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{Y}{X} + \frac{X}{Y} \right) + \left(\frac{Z}{X} + \frac{X}{Z} \right) + \left(\frac{Z}{Y} + \frac{Y}{Z} \right) - 3 \right] \geq \frac{3}{2}.$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &= \left(\frac{a}{b+c} + 1 \right) + \left(\frac{b}{a+c} + 1 \right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1 \right) - 3 \\ &= \frac{1}{2} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left(\frac{1}{b+c} \right) + \left(\frac{1}{a+c} \right) + \left(\frac{1}{a+b} \right) - 3 \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số không âm:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left(\frac{1}{b+c} \right) + \left(\frac{1}{a+c} \right) + \left(\frac{1}{a+b} \right) \geq \frac{3}{2}.$$

29. Ta có: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a+b)ab$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + abc \geq (a+b)ab + abc = ab(a+b+c)$$

Tương tự: $b^3 + c^3 + abc \geq (b+c)bc + abc = bc(a+b+c)$

$$c^3 + a^3 + abc \geq (c+a)ca + abc = ca(a+b+c)$$

$$VT \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} + \frac{1}{bc(a+b+c)} + \frac{1}{ca(a+b+c)} = \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{a+b+c}{abc} \right)$$

30. Ta có: $y = \frac{x-1}{2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2}.$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm $\frac{x-1}{2}; \frac{2}{x-1}$:

$$\Rightarrow y = \frac{x-1}{2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1}} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

Vậy khi $x = 3$ thì y đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{5}{2}$.

31. Ta có: $y = \frac{3(x+1)}{2} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{2}.$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm $\frac{3(x+1)}{2}; \frac{1}{x+1}$:

$$\Rightarrow y = \frac{3(x+1)}{2} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{2} \geq 2\sqrt{\frac{3(x+1)}{2} \cdot \frac{1}{x+1}} - \frac{3}{2} = \sqrt{6} - \frac{3}{2}$$

ABC

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{3(x+1)}{2} = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}}{3} - 1 \\ x = -\frac{\sqrt{6}}{3} - 1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy khi $x = \frac{\sqrt{6}}{3} - 1$ thì y đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{6} - \frac{3}{2}$.

32. Ta có: $y = \frac{2x-1}{6} + \frac{5}{2x-1} + \frac{1}{3}$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm $\frac{2x-1}{6}$, $\frac{5}{2x-1}$:

$$\Rightarrow y = \frac{2x-1}{6} + \frac{5}{2x-1} + \frac{1}{3} \geq 2\sqrt{\frac{2x-1}{6} \cdot \frac{5}{2x-1}} + \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{30}+1}{3}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{6} = \frac{5}{2x-1} \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{30}+1}{2} \\ x = \frac{-\sqrt{30}+1}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy khi $x = \frac{\sqrt{30}+1}{2}$ thì y đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{30}+1}{3}$.

33. Ta có: $y = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x} = \frac{x}{1-x} + \frac{5(1-x)+5x}{x} = \frac{x}{1-x} + 5\frac{1-x}{x} + 5$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm $\frac{x}{1-x}$; $5\frac{1-x}{x}$:

$$\Rightarrow \frac{x}{1-x} + 5\frac{1-x}{x} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{x}{1-x} \cdot 5\frac{1-x}{x}} + 5 = 2\sqrt{5} + 5.$$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = 5\frac{1-x}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5-\sqrt{5}}{4} \quad (0 < x < 1)$$

Vậy khi $x = \frac{5-\sqrt{5}}{4}$ thì y đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{5} + 5$.

34. Ta có: $\frac{x^3+1}{x^2} = x + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm $\frac{x}{2}$; $\frac{x}{2}$; $\frac{1}{x^2}$:

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{x}{2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}.$$

Vậy khi $x = \sqrt[3]{2}$ thì y đạt giá trị nhỏ nhất $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

$$35. \text{ Ta có: } \frac{x^2 + 4x + 4}{x} = x + \frac{4}{x} + 4 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} + 4 = 8$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow x = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x = 2 \ (x > 0).$$

Vậy khi $x = 2$ thì y đạt giá trị nhỏ nhất là 8.

$$36. \text{ Ta có: } x^2 + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} \geq 5\sqrt[5]{\left(\frac{x^2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{x^3}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt[5]{27}}$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} = \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{3}$$

Vậy khi $x = \sqrt[5]{3}$ thì y đạt giá trị nhỏ nhất là $y = \frac{5}{\sqrt[5]{27}}$.

37. Ta có:

$$f(x) = -10x^2 + 11x - 3 = 10\left(x^2 - \frac{11}{10}x\right) - 3 = -10\left(x - \frac{11}{20}\right)^2 + \frac{1}{40} \leq \frac{1}{40}$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow x = \frac{11}{20}$$

Vậy khi $x = \frac{11}{20}$ thì y đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{40}$.

38. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm x và $6 - x$

$$(\text{vì } 0 \leq x \leq 6) \Rightarrow 6 = x + (6 - x) \geq 2\sqrt{x(6 - x)} \Rightarrow x(6 - x) \leq 9$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow x = 6 - x \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy khi $x = 3$ thì y đạt giá trị lớn nhất bằng 9.

$$39. \text{ Ta có: } y = (x + 3)(5 - 2x) = \frac{1}{2} (2x + 6)(5 - 2x).$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số không âm $2x + 6$ và

$$5 - 2x \left(-3 \leq x \leq \frac{5}{2} \right) \Rightarrow 11 = (2x + 6) + (5 - 2x) \geq 2\sqrt{(2x + 6)(5 - 2x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (2x + 6)(5 - 2x) \leq \frac{121}{8}.$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow 2x + 6 = 5 - 2x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Vậy khi $x = -\frac{1}{4}$ thì y đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{121}{8}$.

ABC

40. Ta có: $y = (2x + 5)(5 - x) = \frac{1}{2} (2x + 5)(10 - 2x)$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm

$$2x + 5; 10 - 2x \left(-\frac{5}{2} \leq x \leq 5 \right):$$

$$\Rightarrow (2x + 5) + (10 - 2x) \geq 2\sqrt{(2x + 5)(10 - 2x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(2x + 5)(10 - 2x) \leq \frac{625}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x + 5 = 10 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$

Vậy khi $x = \frac{5}{4}$ thì y đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{625}{8}$.

41. Ta có: $y = 3(2x + 1)(5 - 2x)$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số không âm

$$2x + 1, 5 - 2x \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \right):$$

$$\Rightarrow (2x + 1) + (5 - 2x) \geq 2\sqrt{(2x + 1)(5 - 2x)} \Rightarrow (2x + 1)(5 - 2x) \leq 9$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x + 1 = 5 - 2x \Leftrightarrow x = 1$

Vậy khi $x = 1$ thì y đạt giá trị lớn nhất bằng 9.

42. Ta có: $2 + x^2 \geq 2\sqrt{2x^2} = 2x\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \geq \frac{x}{2 + x^2} \Rightarrow y \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Dấu "=" xảy ra .

Vậy khi $x = \sqrt{2}$ thì y đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

43. Ta có: $x^2 + 2 = x^2 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot 1 \cdot 1}$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^3 \geq 27x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{(x^2 + 2)^3} \leq \frac{1}{27}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy khi $x = \pm 1$ thì y đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{27}$.

Chương 8. Bài tập tổng hợp

Ví dụ 1: Cho $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

Giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{x+1-1}{x+1} + \frac{y+1-1}{y+1} + \frac{z+1-1}{z+1} = 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$$

$$P \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \text{ nhỏ nhất}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpski:

$$\begin{aligned} & [(x+1) + (y+1) + (z+1)] \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \geq 9 \\ \Rightarrow & \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất } P = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 2: Cho m nhận giá trị nhỏ nhất của một trong các giá trị

$$\left\{ x, \frac{y}{z}, \frac{z}{t}, \frac{1}{x}, t \right\} \text{ với } x, y, z, t > 0. \text{ Tìm giá trị lớn nhất của } m.$$

Giải

Ta có: $x \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{t} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot t = 1$. Tích 6 số dương bằng 1, nên có ít nhất một số nhỏ hơn hay bằng 1 $\Rightarrow m \leq 1$. Dễ thấy khi: $x = y = z = t = 1$ thì $m = 1$. Vậy giá trị lớn nhất của m là 1.

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x^2 + 1 + 2x + \frac{a^2}{(x+1)^2}$

Giải

$$\text{Ta có: } y = x^2 + 1 + 2x + \frac{a^2}{(x+1)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho $a \geq 0, b \geq 0$ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

$$\text{Ta có: } y \geq 2\sqrt{(x+1)^2 \cdot \frac{a^2}{(x+1)^2}} = 2\sqrt{a^2} = 2|a|$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{a^2}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^4 = a^2$$

$$\Leftrightarrow x+1 = \pm \sqrt[4]{a^2} \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{|a|}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là: $y = 2|a|$ khi $x = -1 \pm \sqrt{|a|}$.

Ví dụ 4: Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x \geq m-1 \\ mx \geq 1 \end{cases}$ có một nghiệm duy nhất.

Giải

Từ hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x \geq m-1 & (a) \\ mx \geq 1 & (b) \end{cases}$. Ta có: $(a) \Leftrightarrow x \geq \frac{m-1}{2}$.

Xét (b): * $m > 0$: $(b) \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{m}$.

* $m = 0$: $(b) \Leftrightarrow 0x \geq 1$ (Vô nghiệm)

* $m < 0$: $(b) \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{m}$.

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \frac{1}{m} = \frac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Ví dụ 5: Cho hai số thực sao cho $x + y$, $x^2 + y^2$, $x^4 + y^4$ là các số nguyên. Chứng minh $x^3 + y^3$ cũng là các số nguyên.

Giải

$$\text{Ta có } (x+y)(x^2+y^2) = x^3+y^3+xy(x+y) \quad (1)$$

$$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy \quad (2)$$

$$x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 \quad (3)$$

Vì $x+y$, x^2+y^2 là số nguyên nên từ (2) $\Rightarrow 2xy$ là số nguyên.

Vì x^2+y^2 , x^4+y^4 là số nguyên nên từ (3) $\Rightarrow 2x^2y^2 = \frac{1}{2}(2xy)^2$ là số nguyên

$\Rightarrow (2xy)^2$ chia hết cho 2 $\Rightarrow 2xy$ chia hết cho 2 (do 2 là nguyên tố)

$\Rightarrow xy$ là số nguyên. Do đó từ (1) suy ra x^3+y^3 là số nguyên.

Ví dụ 8: Một tấm bìa dạng tam giác vuông có độ dài ba cạnh là các số nguyên. Chứng minh rằng có thể cắt tấm bìa thành sáu phần có diện tích bằng nhau và diện tích mỗi phần là số nguyên.

Giải

Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác vuông ABC, c là cạnh huyền.

Ta có $a^2 + b^2 = c^2$; $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, diện tích tam giác ABC là $S = \frac{ab}{2}$

Trước hết ta chứng minh ab chia hết cho 12.

+ Chứng minh $ab \vdots 3$

Nếu cả a và b đồng thời không chia hết cho 3 thì $a^2 + b^2$ chia 3 dư 2.

Suy ra số chính phương c^2 chia 3 dư 2, vô lý.

+ Chứng minh $ab \vdots 4$ - Nếu a, b chẵn thì $ab \vdots 4$.

- Nếu trong hai số a, b có số lẻ, chẳng hạn a lẻ.

Lúc đó c lẻ. Vì nếu c chẵn thì $c^2 \vdots 4$, trong lúc $a^2 + b^2$ không thể chia hết cho 4. Đặt $a = 2k + 1, c = 2h + 1, k, h \in \mathbb{N}$. Ta có :

$$b^2 = (2h + 1)^2 - (2k + 1)^2 = 4(h - k)(h + k + 1)$$

$$= 4(h - k)(h - k + 1) + 8k(h - k) \vdots 8. \text{ Suy ra } b \vdots 4.$$

Nếu ta chia cạnh AB (chẳng hạn) thành 6 phần bằng nhau, nối các điểm chia với C thì tam giác ABC được chia thành 6 tam giác, mỗi tam giác này có diện tích bằng $\frac{ab}{12}$ là một số nguyên.

Ví dụ 9: Tìm các số thực u, v biết: $u^3 + v^3 = 7$ và $u \cdot v = -2$.

Giải

Ta có: $u^3 + v^3 = 7$ và $u^3 \cdot v^3 = -8$

u^3 và v^3 là các nghiệm của phương trình: $x^2 - 7x - 8 = 0$

Do đó: $(u^3 = -1; v^3 = 8)$ hoặc $(u^3 = 8; v^3 = -1)$

Vậy: $(u = -1; v = 2)$ hoặc $(u = 2; v = -1)$.

Ví dụ 10: Cho các số a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau, thỏa mãn điều kiện

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc. \text{ Tính: } \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right) \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right).$$

(Đề thi HSG lớp 9 tỉnh Phú Thọ năm 2003-2004)

Giải

$$\text{Ta có } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c) \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 0 \text{ (do } a, b, c \text{ đôi một khác nhau).}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = \frac{a(c-a)(a-b) + b(b-c)(a-b) + c(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c) - 2(a^3 + b^3 + c^3)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{-9abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

ABC

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác: } \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} &= \frac{bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)}{abc} \\ &= \frac{-bc[(a-b) + (c-a)] + ca(c-a) + ab(a-b)}{abc} = \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right) \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) = 9.$$

Ví dụ 13: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy \\ (x-1)\sqrt{y} + (y-1)\sqrt{x} = \sqrt{2xy} \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy & (1) \\ (x-1)\sqrt{y} + (y-1)\sqrt{x} = \sqrt{2xy} & (2) \end{cases}$$

- Điều kiện: $x, y \geq 1$. $(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y-1}}{y} + \frac{\sqrt{x-1}}{x} = 1$.
- Vì $(\sqrt{y-1}-1)^2 = y - 2\sqrt{y-1} \geq 0$, suy ra $\frac{\sqrt{y-1}}{y} \leq \frac{1}{2}$ và suy ra $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$.

$$\text{Do đó: } \frac{\sqrt{y-1}}{y} + \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq 1.$$

$$\text{Nên } (1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y-1}}{y} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } \begin{cases} \sqrt{y-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Thử lại: thỏa mãn, vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x=2; y=2)$.

Ví dụ 14: Với 8 số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 3.

Giải

Ký hiệu số tự nhiên thỏa đề bài là: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Các số $a_1, a_2, \dots, a_6$ khác nhau lấy từ 8 số đã cho, $a_1 \neq 0$.

- $a_1 = 3$, khi đó a_2 có 7 cách chọn, sau đó a_3 có 6 cách chọn,...

Do đó trường hợp này có: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ (số).

- $a_1 \neq 3$ khi đó có 6 cách chọn a_1 (vì $a_1 \neq 0, a_1 \neq 3$), chọn số 3 hay vào 1 trong 5 số $a_2, \dots, a_6$, sau đó còn lại 4 chữ số và lần lượt chọn 4 số khác nhau lấy từ 8 số đã cho và khác a_1, a_2 .

Do đó trường hợp này có: $6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 10800$ (số).

- Đáp số: 13320 số.

Ví dụ 15: Trong một cuộc đua xe mô tô, ba tay đua đã khởi hành cùng một lúc. Mỗi giờ, người thứ hai chạy chậm hơn người thứ nhất 15km và nhanh hơn người thứ ba 3km nên người thứ hai đến đích chậm hơn người thứ nhất 12 phút và sớm hơn người thứ ba 3 phút. Tính vận tốc của ba tay đua mô tô trên.

Giải

♦ Gọi x (km/h) là vận tốc người thứ hai.

y (km) là chiều dài quãng đường đua. Điều kiện: $x \geq 3, y > 0$

♦ Ta có: $x + 15$ (km/h) là vận tốc mô tô thứ nhất.

$x - 3$ (km/h) là vận tốc mô tô người thứ ba.

$$12 \text{ phút} = \frac{1}{5} \text{ giờ}; 3 \text{ phút} = \frac{1}{20} \text{ giờ}$$

♦ Theo đề bài ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5} \\ \frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20} \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5} \\ \frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y(x+15) - 5yx = (x+15)x \\ 20xy - 20(x-3)y = x(x-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5xy + 75y - 5xy = x^2 + 15x \\ 20xy - 20xy + 60y = x^2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75y = x^2 + 15x \quad (1) \\ 60y = x^2 - 3x \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2 + 15x}{75} \\ 60\left(\frac{x^2 + 15x}{75}\right) = x^2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2 + 15x}{75} \\ 4(x^2 + 15x) = 5(x^2 - 3x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2 + 15x}{75} \\ x^2 - 75x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 75 \\ y = 90 \end{cases}$$

♦ Vậy: vận tốc mô tô thứ nhất là: 90 km/h;

vận tốc mô tô thứ hai là: 75 km/h;

vận tốc mô tô thứ ba là: 72 km/h.

Ví dụ 16: Giải phương trình : $x^4 + (x+2)^4 = 184$.

Giải

Đặt: $t = x+1$, phương trình đã cho trở thành:

$$(t+1)^4 + (t-1)^4 = 184 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 91 = 0$$

. Đặt $z = t^2$ (với $z \geq 0$).

Với điều kiện trên phương trình trở thành:

$$z^2 + 6z - 91 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 \\ z = -13 \text{ (loại)} \end{cases}$$

. Với $z = 7 \Rightarrow t = \pm\sqrt{7} \Rightarrow x = -1 \pm\sqrt{7}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_{1,2} = -1 \pm\sqrt{7}$

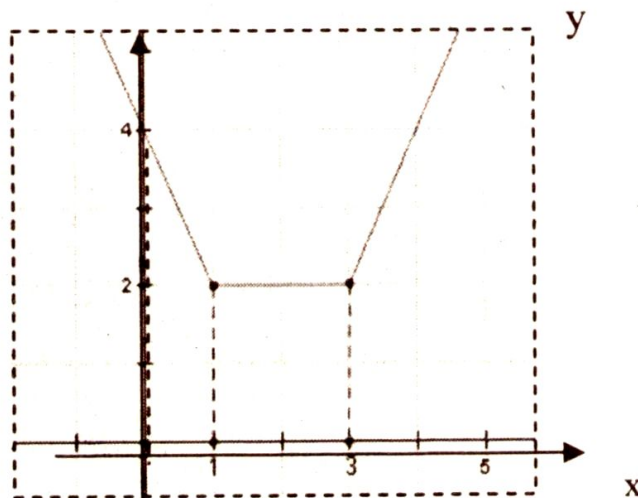
Ví dụ 17: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

a/ Vẽ đồ thị của hàm số trên.

b/ Với giá trị nào của x thì $y \geq 4$.

Giải

$$a) y = |x - 1| + |x - 3| \Leftrightarrow y = \begin{cases} -2x + 4 & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{khi } x > 3 \end{cases}$$



$$b) \text{ Ta có: } y \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4 \geq 4 \\ 2x - 4 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

Ví dụ 18: Bốn học sinh Hồng, Hà, Long, Giang làm trực nhật, trong đó có một học sinh vẽ tranh lên tường. Thầy Chủ nhiệm hỏi: “Ai đã vẽ tranh lên tường?”. Các bạn lần lượt trả lời:

Hà: - Thưa Thầy, có thể bạn Giang, cũng có thể bạn Long đã vẽ ạ!

Giang: - Thưa Thầy, em không vẽ đâu ạ!

Hồng: - Thưa Thầy, chính bạn Long vẽ ạ!

Long: - Bạn Hồng ơi, bạn nhầm rồi. Thưa Thầy, em không vẽ đâu ạ!

Biết rằng có ba học sinh nói đúng, còn một học sinh nói sai. Hỏi ai đã vẽ tranh lên tường?

Giải

Dùng phương pháp loại suy:

- + Giả sử Hà nói sai, thì 3 người còn lại nói đúng: Khi đó, cả 2 bạn Giang và Long đều không vẽ, do đó bạn Giang nói đúng, nhưng bạn Hồng nói sai (mâu thuẫn, vì cả Hà và Hồng đều nói sai). Khả năng này không xảy ra.
- + Giả sử Giang nói sai: Khi đó Hà nói đúng, nghĩa là Long không vẽ, do đó bạn Hồng lại nói sai (Giang và Hồng đều nói sai, dẫn đến mâu thuẫn). Khả năng này không xảy ra.
- + Giả sử Hồng nói sai: Khi đó, Long không vẽ, Long nói đúng, mà Giang không thể nói sai, do đó Hà nói sai vì cả Long và Giang đều không vẽ (cả Hồng và Hà đều nói sai, mâu thuẫn). Khả năng này không xảy ra.
- + Chỉ còn lại khả năng Long nói sai: tức là Long đã vẽ tranh lên tường, Hồng nói đúng, Giang nói đúng (không thể nói sai) và Hà cũng nói đúng. Vậy: người vẽ tranh lên tường chính là Long.

Ví dụ 19: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình $a^2x^2 + (a^2 + b^2 - c^2)x + b^2 = 0$ vô nghiệm.

Giải

$$\begin{aligned}\Delta &= (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 - (2ab)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + 2ab - c^2)(a^2 + b^2 - 2ab - c^2) \\ &= [(a + b)^2 - c^2][(a - b)^2 - c^2]\end{aligned}$$

Do a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên:

$$a + b > c \Rightarrow (a + b)^2 > c^2 \Rightarrow (a + b)^2 - c^2 > 0$$

$$\text{Và } |a - b| < c \Rightarrow (a - b)^2 < c^2 \Rightarrow (a - b)^2 - c^2 < 0.$$

Vì vậy $\Delta < 0$ nên phương trình $a^2x^2 + (a^2 + b^2 - c^2)x + b^2 = 0$ vô nghiệm.

Ví dụ 20: Tìm giá trị của m để phương trình sau vô nghiệm:

$$x + \sqrt{x - 2} + m = 0 \quad (1)$$

Giải

Điều kiện: $x \geq 2$. Đặt $\sqrt{x - 2} = t$ ($t \geq 0$), ta có:

$$x + \sqrt{x - 2} + m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 2 + m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 2 = -m \quad (2)$$

Ta có: phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm

Mặt khác: $\min_{t \geq 0} (t^2 + t + 2) = 2$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow -m < 2 \Leftrightarrow m > -2$$

Vậy phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow m > -2$.

Ví dụ 21: Cho hai phương trình: $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ (1); $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ (2)

có các hệ số thỏa mãn điều kiện $a_1a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$

Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm.

Giải

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{(1)} = a_1^2 - 4b_1 \\ \Delta_{(2)} = a_2^2 - 4b_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} = a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a_1 a_2 \geq 2(b_1 + b_2) &\Rightarrow -2a_1 a_2 \leq -4(b_1 + b_2) \\ &\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \leq a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2) \\ &\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2) \geq (a_1 - a_2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } \Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} \geq 0 \text{ suy ra } \begin{cases} \Delta_{(1)} \geq 0 \\ \Delta_{(2)} \geq 0 \end{cases}$$

Vậy ít nhất một trong hai phương trình (1), (2) có nghiệm.

Ví dụ 22: Cho hai phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1); $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ (2)

Biết hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung. Chứng minh rằng:

$$(ac_1 - a_1c)^2 = (a_1b - ab_1)(b_1c - bc_1).$$

Giải

Giả sử α là nghiệm chung của hai phương trình đã cho:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ b_1^2 - 4a_1c_1 \geq 0 \end{cases} \text{ . Thế thì } \begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c \geq 0 & (1) \\ a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} aa_1\alpha^2 + a_1b\alpha + a_1c = 0 \\ aa_1\alpha^2 + ab_1\alpha + ac_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (ab_1 - a_1b)\alpha = (a_1c - ac_1) \Rightarrow (ab_1 - a_1b)^2\alpha^2 = (a_1c - ac_1)^2 \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác lại có: } \begin{cases} ab_1\alpha^2 + bb_1\alpha + b_1c = 0 \\ a_1b\alpha^2 + bb_1\alpha + bc_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (ab_1 - a_1b)\alpha^2 = bc_1 - b_1c$$

$$\Rightarrow (ab_1 - a_1b)^2\alpha^2 = (ab_1 - a_1b)(bc_1 - b_1c) \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) ta suy ra } (ac_1 - a_1c)^2 = (ab_1 - a_1b)(bc_1 - b_1c)$$

$$\text{hay } (ac_1 - a_1c)^2 = (a_1b - ab_1)(b_1c - bc_1).$$

Ví dụ 23: Với giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm: $x + 3(m - x^2) = m$

Giải

$$x + 3(m - x)^2 = m \Leftrightarrow x + 3m^2 - 6mx + 3x^2 = m$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + (1 - 6m)x + 3m^2 - m = 0$$

$$\Delta = (1 - 6m)^2 - 4.3(3m^2 - m) = 1 - 12m + 36m^2 - 36m^2 + 12m$$

$\Delta = 1 > 0 \forall m$. Do $\Delta > 0$ do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị m .

Ví dụ 24: Tìm giá trị của m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$2x^2 - |x| + m^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Giải

Đặt $|x| = t$, với $t \geq 0$. Ta có:

$$2x^2 - |x| + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t + m^2 - 1 = 0 \quad (2).$$

Nếu phương trình (2) có nghiệm $t > 0$ thì phương trình (1) không có nghiệm duy nhất, do đó loại. Vậy phương trình (1) muốn có nghiệm duy nhất thì phương trình (2) phải có nghiệm $t = 0$. Với $t = 0$ thì phương trình (2) có dạng: $2 \cdot 0^2 - 0 + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

$$\text{Nếu } m = \pm 1 \text{ thì } (2) \Leftrightarrow 2t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} > 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình (2) lại có nghiệm $t = \frac{1}{2} > 0$ (vô lý)

Vậy không tồn tại giá trị m nào để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 25: a. Cho parabol $y = \frac{1}{4}x^2$, điểm $A(0; 1)$ và đường thẳng d có phương trình $y = -1$. Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc parabol. Chứng minh rằng MA bằng khoảng cách MH từ điểm M đến đường thẳng d .

b. Cho điểm $A(0; a)$, gọi d là đường thẳng có phương trình $y = -a$. Chứng minh rằng quỹ tích của điểm $M(x; y)$ sao cho khoảng cách MH từ M tới d bằng MA là một parabol.

Giải

a. Ta luôn có: $MH = y - (-1) = y + 1$ (1)

Để tính MA , ta kẻ $MI \perp Oy$.

Ta có $MI = |x|$, $AI = |y - 1|$ nên

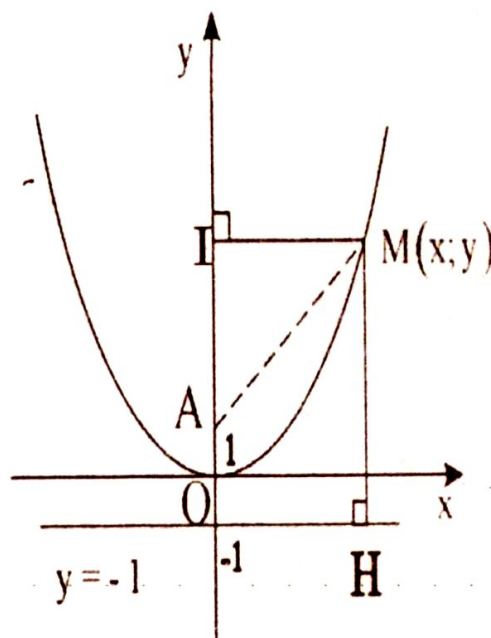
$$\begin{aligned} MA^2 &= MI^2 + AI^2 = x^2 + (y - 1)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2y + 1. \end{aligned}$$

Do $y = \frac{1}{4}x^2$ nên thay x^2 bởi $4y$ ta được:

$$MA^2 = 4y + y^2 - 2y + 1 = (y + 1)^2$$

Do đó $MA = |y + 1| = y + 1$ (do $y \geq 0$) (2)

Từ (1) và (2) ta có: $MA = MH$.



- b. (hình ứng với $a > 0$) theo công thức tính khoảng cách giữa hai điểm $M(x; y)$ và $A(0; a)$ ta có:

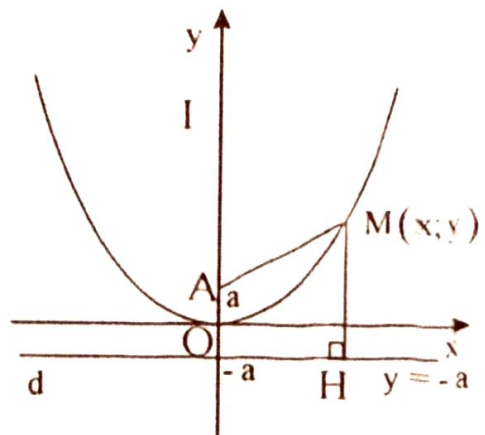
$$\begin{aligned} MA^2 &= (x - 0)^2 + (y - a)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2ay + a^2. \end{aligned}$$

Ta lại có: $MH = |y + a|$ nên

$$MH^2 = (y + a)^2 = y^2 + 2ay + a^2;$$

$$MA^2 = MH^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2 \Leftrightarrow x^2 = 4ay \Leftrightarrow y = \frac{1}{4a}x^2.$$

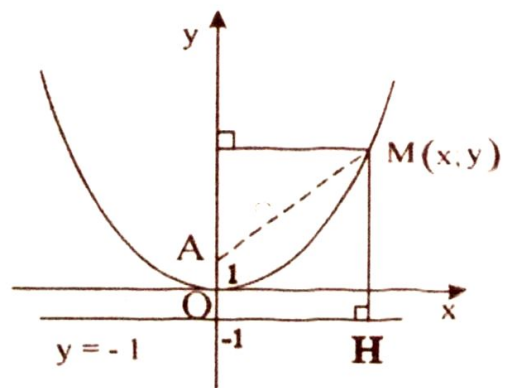


Do đó, quỹ tích của M là parabol $y = \frac{1}{4a}x^2$.

Chú ý: tổng quát, cho một điểm A và đường thẳng d không đi qua A, quỹ tích các điểm M sao cho khoảng cách MA bằng khoảng cách từ M đến d là một parabol.

Ví dụ 26 a. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$

- b. Gọi C là một điểm tùy ý nằm trên parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$. Gọi K là trung điểm của OC. Khi điểm C di chuyển trên parabol đó thì điểm K di chuyển trên đường nào?



Giải

a. Xem hình

b. Gọi tọa độ của điểm C là $(m; n)$.

Điểm C thuộc parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$ nên

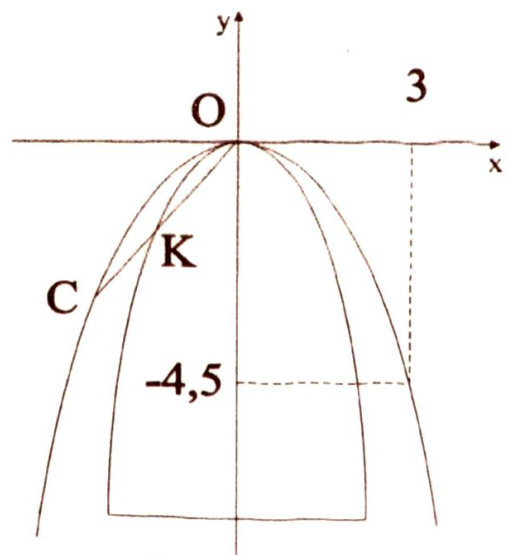
$$n = -\frac{1}{2}m^2 \quad (1). \text{ Gọi tọa độ của điểm K}$$

là $(x; y)$, ta cần biểu thị y theo x.

K là trung điểm của OC nên $x = \frac{m}{2}; y = \frac{n}{2},$

suy ra $m = 2x, n = 2y$. Thay vào (1) ta được: $2y = -\frac{1}{2}(2x)^2 = -2x^2$

Do đó $y = -x^2$. Điểm K di chuyển trên parabol $y = -x^2$.



Ví dụ 27. Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 3$.

- Xác định tọa độ các giao điểm A, B của parabol và đường thẳng đã cho.
- Xác định tọa độ điểm C thuộc cung AB của parabol đó sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

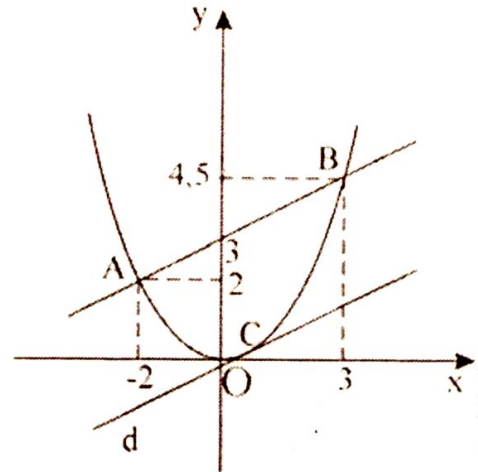
Giải

- Hoành độ giao điểm của parabol $y = \frac{1}{2}x^2$

và đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 3$ là nghiệm của

phương trình: $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$. (1)

Phương trình (1) có hai nghiệm $x = -2$ và $x = 3$. Với $x = -2$ thì $y = 2$, với $x = 3$ thì $y = 4\frac{1}{2}$.



Giao điểm của parabol với đường thẳng là $A(-2; 2)$ và $B(3; 4\frac{1}{2})$.

- Ta cần tìm điểm C thuộc cung AB và cách xa AB nhất. Ta xác định đường thẳng d song song với AB và tiếp xúc với parabol, tiếp điểm là điểm C cần tìm.

Đường thẳng d song song với AB có dạng: $y = \frac{1}{2}x + n$.

Điều kiện để d tiếp xúc với parabol là phương trình sau có nghiệm kép:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + n. (2) \Leftrightarrow x^2 - x - 2n = 0$$

Phương trình (2) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 8n = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{1}{8}$.

Với $n = -\frac{1}{8}$ thì nghiệm kép của (2) là $x = \frac{1}{2}$.

Khi đó: $y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$.

Tọa độ tiếp điểm C của đường thẳng d với parabol là $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$. Mọi điểm C'

khác C thuộc cung AB của parabol đều có khoảng cách AB nhỏ hơn khoảng cách từ C đến AB.

Vậy ABC có diện tích lớn nhất khi điểm C có tọa độ $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$

Ví dụ 28. Cho parabol $y = x^2$. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc đường thẳng $y = -\frac{1}{4}$, các tiếp tuyến kẻ từ M với parabol vuông góc với nhau.

Giải

(Hình) trước hết lập phương trình đường thẳng $y = mx + n$ đi qua $M\left(x_0; -\frac{1}{4}\right)$ được

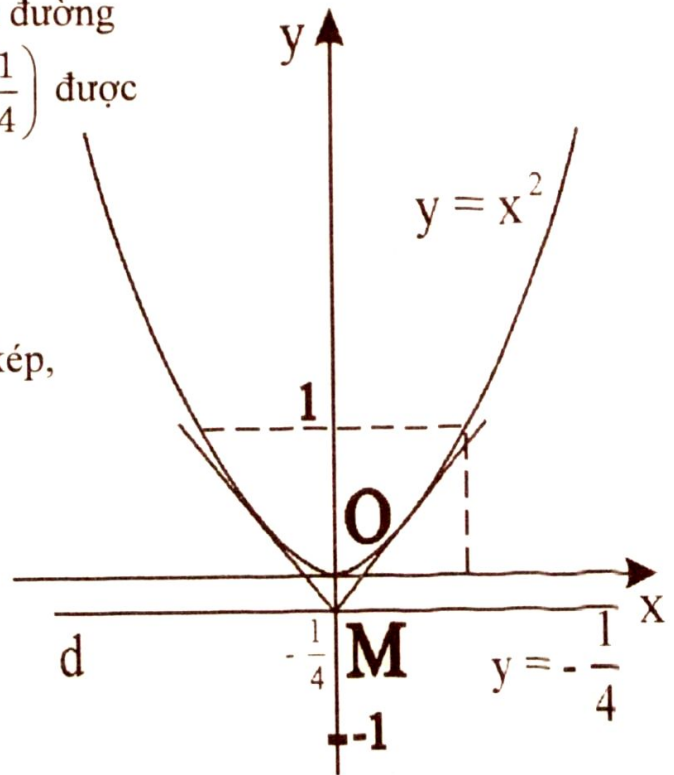
$$y = mx - \left(mx_0 + \frac{1}{4}\right)$$

Giải điều kiện phương trình

$$x^2 = mx - \left(mx_0 + \frac{1}{4}\right) \text{ có nghiệm kép,}$$

$$\text{được } m^2 - 4mx_0 - 1 = 0$$

Hai nghiệm m_1, m_2 của phương trình này có tích $m_1 m_2 = -1$ (theo hệ thức Vi-ét) chứng tỏ rằng hai tiếp tuyến của parabol kẻ từ M vuông góc với nhau.



Bài tập vận dụng

- Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung: $2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0$ (1); $4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0$ (2)
- Với giá trị nào của m thì hai phương trình:
 $x^2 - (m + 1)x + m = 0$ (1); $2x^2 - x + 2m = 0$ (2)
 a. Có hai nghiệm chung. b. Tương đương.
- Cho phương trình: $x + 3(m - 3x^2)^2 = m$ (1). Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có nghiệm?
- Tìm giá trị của k để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:
 $(x - 3)[x^2 + (k - 1)x + k^2] = 0$ (1)
- Tìm giá trị của k để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt và cùng âm: $(x - 1)(x^2 + kx + k - 1) = 0$ (1')
- Cho phương trình $x^2 - 6mx + 4 = 0$. Tìm giá trị của m , biết rằng phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{7}{2}$.

7. Chứng minh rằng, nếu phương trình $x^2 + 2mx + n = 0$ (1) có nghiệm, thì phương trình: $x^2 + 2\left(k + \frac{1}{k}\right)mx + n\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = 0$ (2) cũng có nghiệm.
(m, n, k là các tham số; $k \neq 0$)
8. Tính giá trị biểu thức: $A = \sqrt{a^2 + 4ab^2 + 4b^4} - \sqrt{4a^2 - 12ab^2 + 9b^4}$ với $a = \sqrt{2}$; $b = 1$.
9. Chứng minh: $\left(\frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}{x - \sqrt{3x} + 3} - 2\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3 - x}\right) = 1$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 3$).
10. Cho phương trình: $mx^2 - 2mx + 1 = 0$ (m là tham số).
- Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm và tính các nghiệm của phương trình theo m .
 - Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm sao cho một nghiệm gấp đôi nghiệm kia.
11. Hai vòi nước cùng chảy vào bể thì đầy sau 16 giờ. Nếu vòi I chảy trong 3 giờ và vòi II chảy trong 6 giờ thì được thể tích nước bằng 25% bể. Tính thời gian cần thiết để riêng mỗi vòi chảy đầy bể.
12. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$
- Tính $f(-1)$; $f(5)$.
 - Tìm x để $f(x) = 10$.
 - Rút gọn $A = \frac{f(x)}{x^2 - 4}$ khi $x \neq \pm 2$
13. a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2$ và đường thẳng (D): $y = x - 2$ trên cùng một trục tọa độ.
b. Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) ở câu trên bằng phép tính.
14. Cho đường thẳng (d_m): $2mx + (3m - 1)y - 6 = 0$
- Tìm đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; -3)$ và xác định hệ số góc của đường thẳng đó.
 - Tìm điểm cố định B của (d_m) với mọi m
15. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 4 điểm $A(-3; 4)$, $B(-2; 1)$, $C(1; 2)$, $D(0; 5)$.
- Cho biết đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét (cm), tính độ dài các cạnh và các đường chéo của tứ giác ABCD. Tứ giác ABCD là hình gì?
 - Dựa vào hình vẽ, cho biết tọa độ giao điểm của 2 đường chéo của tứ giác ABCD.

16. Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

- Xác định hệ số a biết rằng đồ thị của hàm số đã cho cắt đường thẳng $d: y = -2x + 3$ tại điểm A có tung độ bằng -1 .
- Vẽ đồ thị (P) của hàm số ứng với giá trị a vừa tìm được trong câu a) và vẽ đường thẳng d trên cùng một mặt phẳng tọa độ. Tìm giao điểm thứ hai B của (P) và d .

17. Trong cùng một hệ trục tọa độ, cho (P) và (D) lần lượt là đồ thị của $y = x^2$ và $y = -x + 2$.

- Gọi (D') là đường thẳng song song với (D) và (D') đi qua điểm $M(0; m)$ (m là tham số). Viết phương trình của (D') .
- Với giá trị nào của m :
+ (D') cắt (P) tại 2 điểm khác nhau?
+ (D') và (P) không có điểm chung?
+ (D') tiếp xúc với (P) ?

18. Cho đường thẳng: $(m - 2)x + (m - 1)y = 1$ (m là tham số)

- Chứng minh rằng đường thẳng luôn luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m .
- Tính giá trị của m để khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng là lớn nhất.

19. Xét các đường thẳng d có phương trình:

$$(2m + 3)x + (m + 5)y + (4m - 1) = 0 \quad (m \text{ là tham số})$$

- Vẽ đồ thị đường thẳng d ứng với $m = -1$.
- Tìm điểm cố định mà mọi đường thẳng d đều đi qua.

20. Cho hàm số $y = mx + m - 1$. Chứng minh rằng với mọi m đồ thị hàm số trên luôn đi qua một điểm cố định.

21. Cho hàm số $y = (2m - 1)x$ với $m \neq \frac{1}{2}$

- Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến? nghịch biến?
- Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$.
- Vẽ đồ thị hàm số với giá trị m vừa tìm được ở câu b.
- Đồ thị vừa vẽ có quan hệ như thế nào với các đường thẳng sau:

$$3x + y = 1 \quad (1); \quad 3y - x - 12 = 0 \quad (2)$$

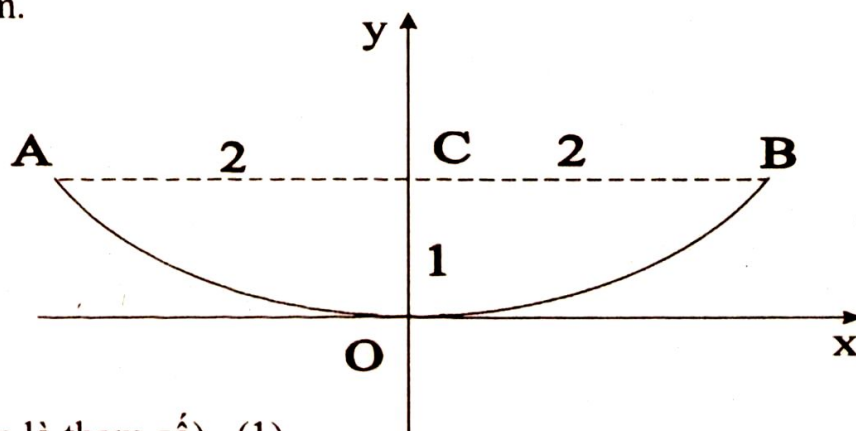
22. a. Xác định các hệ số a, b, c của hàm số $y = ax^2 + bx + c$, biết đồ thị (P) của hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; -5)$, cắt trục Ox tại điểm $(-1; 0)$ và đi qua điểm $(1; -6)$.

- Với giá trị nào của x thì hàm số vừa xác định có giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó của hàm số.

c. Xác định sự biến thiên của hàm số đã tìm được ở câu a) khi $x < \frac{3}{4}$ và

khi $x > \frac{3}{4}$.

23. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng $x + 2y = 1$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1 : 2x - 3y = 4$ và $d_2 : 3x + y = 5$.
24. Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị (D) và hàm số $y = kx^2$ có đồ thị (P).
1. Tìm a, b biết rằng (D) đi qua $A(-1; 3)$ và $B(2; 0)$.
 2. Tìm $k \neq 0$ sao cho (P) tiếp xúc với đường thẳng (D) vừa tìm được. Viết phương trình của (P).
25. Cho parabol (P) có đỉnh ở gốc tọa độ O và đi qua điểm $A\left(1; -\frac{1}{4}\right)$.
- a. Viết phương trình của parabol (P).
 - b. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng $x + 2y = 1$ và đi qua điểm $B(0; m)$. Với giá trị nào của m thì đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho $3x_1 + 5x_2 = 5$.
26. Cho hai đường thẳng có phương trình: $mx - (n + 1)y - 1 = 0$ (d) và $nx + 2my + 2 = 0$ (d'). Xác định các giá trị của m và n sao cho (d) và (d') cắt nhau tại điểm $P(-1; 3)$.
27. Thiết diện đi qua trục của một chiếc gương có dạng parabol (hình). Hãy xác định phương trình của parabol đó, biết rằng độ sâu $OC = 1\text{cm}$ và đường kính $AB = 4\text{cm}$.



28. Cho đường thẳng $(m + 2)x - my = -1$ (m là tham số) (1)
- a. Tìm điểm cố định mà đường thẳng (1) luôn đi qua.
 - b. Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (1) là lớn nhất.
29. Trong hệ trục tọa độ Oxy, lấy các điểm A và B sao cho $A(1; 1)$, $B(9; 1)$. Viết phương trình của đường thẳng d vuông góc với AB và chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau.
30. a. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$.
- b. Có bao nhiêu điểm nằm trên cạnh hoặc nằm trong tam giác tạo bởi ba đường thẳng $x = 6$, $y = 0$, $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ và có hoành độ và tung độ là các số nguyên?

Hướng dẫn và đáp số

1. Cho hai phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$; $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$

Biết hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung. Ta có :

$$(ac_1 - a_1c)^2 = (a_1b - ab_1)(b_1c - bc_1).$$

Áp dụng vào bài ta có:

$$(72 - 48)^2 = [-2(9m - 2) + 4(3m + 2)][-36(3m + 2) + 12(9m - 2)]$$

$$\Leftrightarrow (12 - 6m).(-96) = 24^2 \Leftrightarrow m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = 3.$$

Thử lại, ta có giá trị $m = 3$ thì hai phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm chung.

2. a. Điều kiện: $\begin{cases} (m+1)^2 - 4m \geq 0 \\ 1 - 16m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 \geq 0 \\ m \leq \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{16}.$

Gọi α là một nghiệm chung của phương (1) và (2)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \alpha^2 - (m+1)\alpha + m = 0 \\ 2\alpha^2 - \alpha + 2m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 - 2(m+1)\alpha + 2m = 0 & (*) \\ 2\alpha^2 - \alpha + 2m = 0 & (**) \end{cases}$$

Lấy (*) trừ (**), ta có:

$$-2(m+1)\alpha + \alpha = 0 \Leftrightarrow (-2m-1)\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Nếu $\alpha = 0$ thì từ (1) ta có $m = 0$

+ $m = 0$, suy ra phương trình (1) và (2) có dạng:

$$x^2 - x = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}; 2x^2 - x = 0 \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Do đó (1) và (2) không có cả hai nghiệm chung (loại)

+ $m = -\frac{1}{2}$, suy ra phương trình (1) và (2) có dạng:

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$2x^2 - x + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \quad (2)$$

Suy ra $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn.

b. Phương trình (1) và (2) tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \text{ và } (2) \text{ cùng vô nghiệm} \\ (1) \text{ và } (2) \text{ có 2 nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \\ m = -\frac{1}{2} \text{ (do câu a)} \end{cases}$$

$$\text{Xét trường hợp: } \begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 4m < 0 \\ 1 - 16m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)^2 < 0 \\ 1 - 16m < 0 \end{cases} :$$

trường hợp này loại.

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thì hai phương trình (1) và (2) tương đương.

$$3. \text{Đặt } m - 3x^2 = y, \text{ ta có: } \begin{cases} x + 3y^2 = m & (*) \\ y + 3x^2 = m & (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y^2 = m \\ (x-y) + 3(y^2 - x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y^2 = m \\ (x-y)(1-3x-3y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + 3y^2 = m \\ x = y \end{cases} & \text{(I)} \\ \begin{cases} x + 3y^2 = m \\ 1 - 3x - 3y = 0 \end{cases} & \text{(II)} \end{cases}$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (I) hoặc (II) có nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 + y - m = 0 \\ 3y^2 + \frac{3y-1}{-3} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 12m \geq 0 \\ 9 - 4.9(1 - 3m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{12} \\ m \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}.$$

4. Tìm giá trị của k để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$(x-3)[x^2 + (k-1)x + k^2] = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 + (k-1)x + k^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt và cả 2 nghiệm đó đều khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ 3^2 + 3(k-1) + k^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)^2 - 4k^2 > 0 \\ k^2 + 3k + 6 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3k^2 + 2k - 1 > 0 \\ k^2 + 3k + 6 \neq 0 \text{ (hiển nhiên)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{1}{3} \\ k < -1 \end{cases}$$

Vậy giá trị của k để phương trình có 3 nghiệm phân biệt:

$$k > \frac{1}{3} \text{ hoặc } k < -1.$$

$$5. (x-1)(x^2 + kx + k-1) = 0 \quad (1')$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + kx + (k-1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1') có 2 nghiệm phân biệt và cùng âm $\Leftrightarrow$ phương trình (2') có 2 nghiệm phân biệt và cùng âm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ x_2 = \frac{-k + \sqrt{\Delta_{(2)}}}{2} < 0 \\ x_1 = \frac{-k - \sqrt{\Delta_{(2)}}}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 4(k-1) > 0 \\ x_2 = -1 < 0 \\ x_1 = 1 - k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-2)^2 > 0 \\ x_2 = -1 < 0 \\ x_1 = 1 - k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 1 \\ k \neq 2 \end{cases}$$

6. Ta có: $\Delta' = 9m^2 - 4$. Để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 cần và đủ là:

$$\Delta' = 9m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq \frac{4}{9} \Leftrightarrow |m| \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow m \leq -\frac{2}{3} \text{ hay } m \geq \frac{2}{3}$$

$$\text{Theo giả thiết: } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{36m^2 - 8}{16} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow m^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow m = \pm \frac{4}{3}. \text{ Cả hai giá trị này của } m \text{ đều thỏa mãn điều kiện } |m| \geq \frac{2}{3}.$$

Vậy các giá trị của m thỏa mãn điều kiện của bài toán là: $m = \pm \frac{4}{3}$.

7. Xét phương trình: $x^2 + 2mx + n = 0$.

$$\Delta'_1 = m^2 - n \geq 0 \text{ (do giả thiết phương trình (1) có nghiệm)}$$

Xét phương trình (2), ta có:

$$\Delta'_2 = \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 m^2 - n \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = (m^2 - n) \left(k + \frac{1}{k}\right)^2$$

$$\text{Do } m^2 - n = \Delta'_1 \geq 0. \text{ Mặt khác, } \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \Delta'_2 \geq 0$$

Vậy phương trình (2) cũng có nghiệm, ĐPCM.

$$8. A = \sqrt{(a + 2b^2)^2} - \sqrt{(2a - 3b^2)^2} = |a + 2b^2| - |2a - 3b^2|$$

$$\text{Với } a = \sqrt{2}; b = 1 \text{ thì } A = |\sqrt{2} + 2| - |2\sqrt{2} - 3|$$

$$= \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} - 3 = 3\sqrt{2} - 1$$

9. Với giả thiết đã cho: $x \geq 0$ và $x \neq 3$, ta có:

$$\frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}{x - \sqrt{3x} + 3} - 2\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{3})^3}{(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{x} = \sqrt{3} - \sqrt{x},$$

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3 - x} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{(\sqrt{3} - \sqrt{x})(\sqrt{3} + \sqrt{x})} = \frac{1}{(\sqrt{3} - \sqrt{x})}$$

Vậy: $\left(\frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}{x - \sqrt{3x} + 3} - 2\sqrt{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3 - x} \right) = (\sqrt{3} - \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{x}} = 1$

10. a. + Nếu $m = 0$ thì phương trình trở thành $1 = 0$, nên phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m \neq 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm khi:

$$\Delta' = m^2 - m = m(m - 1) \geq 0. \text{ Suy ra } m < 0 \text{ hoặc } m \geq 1 (*).$$

Khi đó các nghiệm của phương trình là:

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - m}}{m}; \quad x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - m}}{m}.$$

b. Với điều kiện (*), phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1 x_2 = \frac{1}{m}$.

Theo giả thiết, ta có: $x_1 = 2x_2$ (hoặc $x_2 = 2x_1$), suy ra $x_1 = \frac{4}{3}$; $x_2 = \frac{2}{3}$
(hoặc $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{4}{3}$).

Suy ra: $x_1 x_2 = \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{8}{9} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = \frac{9}{8} > 1$, thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy với $m = \frac{9}{8}$ thì phương trình có một nghiệm gấp đôi nghiệm kia.

11. Gọi x (giờ) và y (giờ) là thời gian để riêng vòi I và vòi II chảy đầy bể ($x > 0$; $y > 0$). Mỗi giờ vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Theo giả thiết thứ nhất, ta có phương trình: $\frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1$.

Theo giả thiết thứ hai, ta có phương trình: $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{25}{100} \Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4}$.

Đặt $u = \frac{1}{x}$; $v = \frac{1}{y}$, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16u + 16v = 1 \\ 3u + 6v = \frac{1}{4} \end{cases}$$

ABC

Giải hệ phương trình trên, ta được $(u; v) = \left(\frac{1}{24}; \frac{1}{48}\right)$.

Suy ra $(x; y) = (24; 48)$ thỏa điều kiện bài toán. Vậy nếu chảy riêng, thì vòi I chảy đầy bể trong 24 giờ và vòi II chảy đầy bể trong 48 giờ.

12. a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$

suy ra $f(-1) = 3$; $f(5) = 3$

b. $f(x) = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=10 \\ x-2=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ x=-8 \end{cases}$

c. $A = \frac{f(x)}{x^2 - 4} = \frac{|x-2|}{(x-2)(x+2)}$

Với $x > 2$ suy ra $x-2 > 0$ suy ra $A = \frac{1}{x+2}$

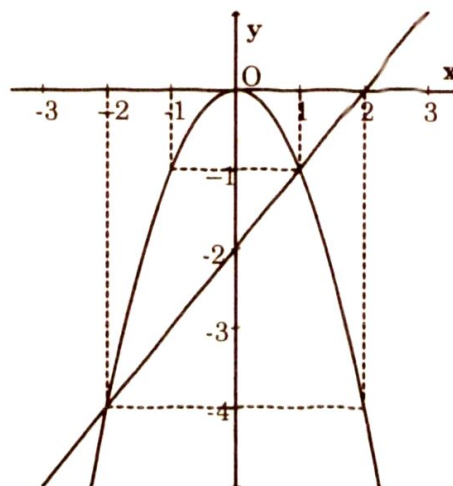
Với $x < 2$ suy ra $x-2 < 0$ suy ra $A = -\frac{1}{x+2}$

13. a. * Bảng giá trị đặc biệt của hàm số $y = -x^2$:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

* Bảng giá trị đặc biệt của hàm số $y = x-2$:

x	0	2
$y = x-2$	-2	0



Đồ thị của Parabol(P) và đường thẳng (D) được vẽ như sau:

b. Phương trình hoành độ giao điểm của Parabol (P) và đường thẳng (D) là: $-x^2 = x-2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -2$ ($a + b + c = 0$)
 Khi $x = 1$ thì $y = -1$; Khi $x = -2$ thì $y = -4$. Vậy Parabol (P) cắt đường thẳng (D) tại hai điểm là $(1; -1)$ và $(-2; -4)$.

14. a. Tìm đường thẳng (d) đi qua điểm A(-1; -3) và xác định hệ số góc của đường thẳng đó.

Do $A(-1; -3) \in (d_m)$ thế tọa độ điểm A vào phương trình (d_m) ta có

$$2m(-1) + (3m-1)(-3) - 6 = 0 \Leftrightarrow -11m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{11}$$

Khi $m = -\frac{3}{11}$ đường thẳng (d): $3x + 10y + 33 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{10}x - \frac{33}{10}$

Hệ số góc của đường thẳng (d) là $k = -\frac{3}{10}$

Vậy đường thẳng (d) cần tìm là: $y = -\frac{3}{10}x - \frac{33}{10}$ và hệ số góc $k = -\frac{3}{10}$.

b. Tìm điểm cố định B của (d_m) với mọi m

Giả sử $B(x; y)$ là điểm cố định của họ (d_m) với mọi m

$$\Leftrightarrow 2mx + (3m - 1)y - 6 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3y)m - 6 - y = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -6 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -6 \end{cases}$$

Vậy điểm cố định mà mọi đường thẳng (d_m) đi qua là : $B(9; -6)$.

15. a. + Tứ giác ABCD có:

– Các cạnh bằng nhau vì cùng bằng cạnh huyền của tam giác vuông có các cạnh góc vuông là 3cm và 1cm. Do đó độ dài mỗi cạnh của tứ giác

$$\text{là: } \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}(\text{cm})$$

– Các đường chéo bằng nhau vì cùng bằng cạnh huyền của tam giác vuông có các cạnh góc vuông là 2cm và 4cm. Do đó độ dài mỗi đường chéo của tứ giác là:

$$AC = BD = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}(\text{cm})$$

+ Tứ giác ABCD có 4 cạnh bằng nhau và hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.

b. + Từ hình vẽ suy ra giao điểm của 2 đường chéo là: $I(-1; 3)$.

16. a.+ Điểm A ở trên d và có tung độ bằng -1 nên: $-1 = -2x + 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Do đó $A(2; -1)$.

+ A là giao điểm của đồ thị hàm số $y = ax^2$ với d nên A thuộc (P)

$$\text{suy ra } -1 = a.2^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$$

b. + Vẽ đúng parabol (P): $y = -\frac{1}{4}x^2$

+ Vẽ đúng đường thẳng d

+ Hoàn thiện giao điểm của (P) và d là nghiệm của phương trình:

$$-\frac{1}{4}x^2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

+ Giải phương trình ta được nghiệm thứ hai là: $x_2 = 6 \Rightarrow y_2 = -9$

Vậy giao điểm thứ hai của (P) và d là $B(6; -9)$.

17. a.(D') có dạng $y = ax + b$.

+ Vì $(D') \parallel (D) \Rightarrow a = -1$

+ $M(0; m) \in (D') \Leftrightarrow m = a.0 + b \Leftrightarrow b = m$

Vậy phương trình của (D') là: $y = -x + m$.

ABC

- b. Số giao điểm của (D') và (P) chính là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D').

Với (P): $y = x^2$ và (D'): $y = -x + m$, ta có phương trình hoành độ giao điểm của (D') và (P) là: $x^2 = -x + m \Leftrightarrow x^2 + x - m = 0$ (1).

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}.$$

Vậy với $m > -\frac{1}{4}$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt suy ra (D') và (P) cắt nhau tại hai điểm khác nhau.

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 + 4m < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}.$$

Vậy với $m < -\frac{1}{4}$ phương trình (1) vô nghiệm suy ra (D') và (P) không có điểm chung.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}.$$

Vậy với $m = -\frac{1}{4}$ phương trình (1) có nghiệm kép suy ra (D') và (P) tiếp xúc nhau.

18. a. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $(m-2)x + (m-1)y = 1$ (1) đi qua điểm cố định là: $(m-2)x + (m-1)y = 1$ với mọi m

$$\Leftrightarrow mx - 2x + my - y - 1 = 0 \quad \text{với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow (x+y)m - (2x+y+1) = 0 \quad \text{với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng (1) luôn đi qua điểm cố định $N(-1; 1)$.

- b. Gọi A là giao điểm của đường thẳng (1) với trục tung.

$$\text{Ta có: } x=0 \Rightarrow y = \frac{1}{1-m}. \text{ Do đó } OA = \frac{1}{|m-1|}.$$

Gọi B là giao điểm của đường thẳng (1) với trục hoành.

$$\text{Ta có: } y=0 \Rightarrow x = \frac{1}{m-2}$$

Do đó $OB = \frac{1}{|m-2|}$. Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng (1).

Ta có:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = (m-1)^2 + (m-2)^2 = 2m^2 - 6m + 5 = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Suy ra $h^2 \leq 2$, $\max h = \sqrt{2}$ khi và chỉ khi $m = \frac{3}{2}$.

19. a. $x + 4y - 5 = 0$

b. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng

$(2m+3)x + (m+5)y + (4m-1) = 0$ đi qua điểm cố định là:

$$2mx + 3x + my + 5y + 4m - 1 = 0 \quad \text{với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow m(2x + y + 4) + 3x + 5y - 1 = 0 \quad \text{với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ 3x + 5y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng trên luôn đi qua điểm cố định $A(-3; 2)$.

20. Xét điểm $A(x_0; y_0)$ trên mặt phẳng tọa độ.

Ta có $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số

$$y = mx + m - 1, \forall m \Leftrightarrow y_0 = mx_0 + m - 1, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 1)m - (y_0 + 1) = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; -1).$$

Vậy đồ thị hàm số $y = mx + m - 1$ luôn đi qua một điểm cố định $A(-1; -1) \forall m$.

21. a. Hàm số đồng biến nếu $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

$$\text{nghịch biến nếu } 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}.$$

b. Ta có: $\frac{3}{2} = (2m - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m = -1$.

c. Học sinh tự làm.

d. Song song với đường thẳng (1). Vuông góc với đường thẳng (2).

22. a. + (P) cắt Oy tại $(0; -5)$, nên $c = -5$.

$$+ (P) \text{ cắt Ox tại } (-1; 0), \text{ nên } 0 = a - b - 5 \Leftrightarrow a - b = 5 \quad (1)$$

$$+ (P) \text{ đi qua điểm } (1; -6), \text{ nên } -6 = a + b - 5 \Leftrightarrow a + b = -1 \quad (2)$$

+ Giải hệ (1) và (2) ta có: $a = 2; b = -3$.

Hàm số cần xác định là: $y = 2x^2 - 3x - 5$ (P).

ABC

b. + Ta có: $y = 2x^2 - 3x - 5 = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

$$y = 2x^2 - 3x - 5 \geq -\frac{49}{8}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y_{\min} = -\frac{49}{8}$ khi và chỉ khi:

$$x - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

c. $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 < \frac{3}{4} \Rightarrow x_1 - \frac{3}{4} < x_2 - \frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 > \left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2$

$$\Rightarrow \left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} > \left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow 2\left[\left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] > 2\left[\left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$$

$$\Rightarrow 2x_1^2 - 3x_1 - 5 > 2x_2^2 - 3x_2 - 5 \Rightarrow y_1 > y_2$$

Vậy hàm số nghịch biến khi $x < \frac{3}{4}$.

d. $\forall x_1, x_2 : \frac{3}{4} < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1 - \frac{3}{4} < x_2 - \frac{3}{4} \Rightarrow \left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 < \left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2$

$$\Rightarrow \left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} < \left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow 2\left[\left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] < 2\left[\left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$$

$$\Rightarrow 2x_1^2 - 3x_1 - 5 < 2x_2^2 - 3x_2 - 5 \Rightarrow y_1 < y_2$$

Vậy hàm số đồng biến khi $x > \frac{3}{4}$.

23. + Đường thẳng $x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ nên có hệ số góc $a = -\frac{1}{2}$

+ Đường thẳng d song song với đường thẳng $x + 2y = 1$ nên

$$d : y = -\frac{1}{2}x + b \quad \left(b \neq \frac{1}{2}\right)$$

+ Tọa độ giao điểm M của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}. \text{ Giải hệ phương trình ta có } M\left(\frac{19}{11}; -\frac{2}{11}\right)$$

+ Đường thẳng d đi qua M nên $-\frac{2}{11} = -\frac{19}{22} + b \Leftrightarrow b = \frac{15}{22} \neq \frac{1}{2}$

+ Vậy phương trình của đường thẳng d : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{22} \Leftrightarrow 11x + 22y = 15$

24. a) $A(-1; 3) \in (D) \Leftrightarrow 3 = -a + b$

$B(2; 0) \in (D) \Leftrightarrow 0 = 2a + b.$

Ta có hệ phương trình có ẩn a, b:

$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 + a \\ 3a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình của đường thẳng (D) là: $y = -x + 2.$

b) Ta biết rằng (D) tiếp xúc với (P) khi phương trình hoành độ giao điểm của chúng có nghiệm kép. Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P): $kx^2 = -x + 2 \Leftrightarrow kx^2 + x - 2 = 0 \quad (1)$

(1) có nghiệm kép khi $\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = 1 + 8k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$

Vậy phương trình của (P) là: $y = -\frac{1}{8}x^2.$

25. a. Phương trình của parabol (P) có dạng: $y = ax^2 \quad (a \neq 0)$

(P) đi qua điểm $A\left(1; -\frac{1}{4}\right)$ nên $a = -\frac{1}{4}.$

Vậy phương trình của parabol (P) là: $y = -\frac{1}{4}x^2.$

b. + Đường thẳng d song song với đường thẳng $x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

nên phương trình của d có dạng: $y = -\frac{1}{2}x + b \quad \left(b \neq \frac{1}{2}\right).$

+ $B(0; m) \in d \Leftrightarrow m = 0 + b = b.$

Suy ra phương trình đường thẳng d là: $y = -\frac{1}{2}x + m \quad \left(m \neq \frac{1}{2}\right).$

ABC

+ Phương trình cho hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$-\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4m = 0$$

+ Để d cắt (P) tại 2 điểm thì cần và đủ là:

$$\Delta' = 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4} \quad (*).$$

+ Với điều kiện (*), d cắt (P) tại 2 điểm có hoành độ x_2 và x_1 .

Theo giả thiết, ta có: $3x_1 + 5x_2 = 5 \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + 2x_2 = 5$

+ Áp dụng định lý Viét, ta có: $6 + x_2 = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

+ Thay nghiệm x_2 vào phương trình:

$$\frac{1}{4} + 1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{16}.$$

+ Đối chiếu điều kiện (*) ta có $m = -\frac{5}{16}$.

26. Parabol $y = ax^2$ đi qua $B(2; 1)$ nên $1 = a \cdot 2^2$, do đó $a = \frac{1}{4}$. Phương trình

của parabol là $y = \frac{1}{4}x^2$.

27. (hình) Học sinh tự giải

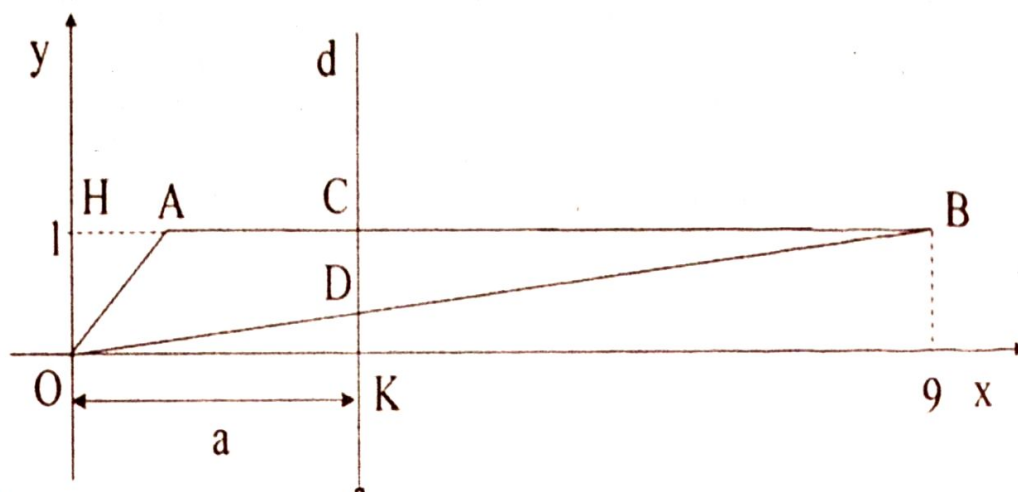
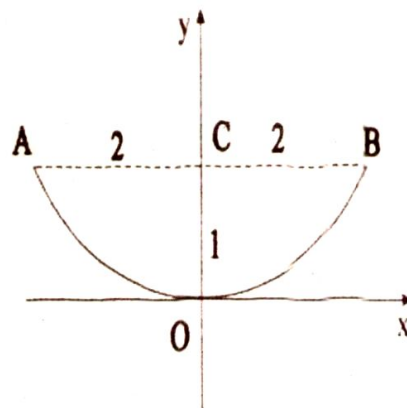
28. a. Điểm cố định $N\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

b. Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng (I).

Ta tính được $\frac{1}{h^2} \geq 2$, $\max h = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = -1$

29. (hình) Gọi H là giao điểm của AB và Oy, ta có:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 = 4.$$



Gọi giao điểm của d với AB, OB, Ox theo thứ tự là C, D, K.

Đặt $OK = a$ với $0 < a < 9$, ta có $CB = HB - HC = 9 - a$.

Đường thẳng OB có phương trình $y = \frac{1}{9}x$. Điểm D có hoành độ $OK = a$

và nằm trên đường thẳng OB nên có tung độ $KD = \frac{a}{9}$. Do đó:

$$DC = KC - KD = 1 - \frac{a}{9} = \frac{9-a}{9}.$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot (9-a) \cdot \frac{9-a}{9} = \frac{(9-a)^2}{18}$$

$$\text{Do } S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{OAB} \text{ nên } \frac{(9-a)^2}{18} = 2.$$

Ta tìm được $a = 15$ (loại) và $a = 3$. Đường thẳng phải tìm có phương trình $x = 3$.

30. a. Hình vẽ bên

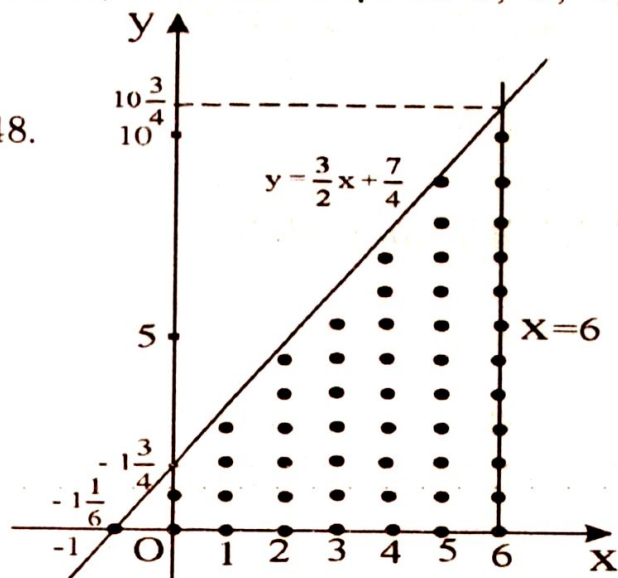
b. Đường thẳng $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ (d) cắt đường thẳng $y = 0$ (trục hoành) tại điểm có hoành độ $x = -1\frac{1}{6}$. Đường thẳng d cắt đường thẳng $x = 6$ tại điểm có tung độ $y = 10\frac{3}{4}$.

Xét hàm số $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$.

Lần lượt cho x nhận các giá trị $-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$ ta được các giá trị tương ứng là $\frac{1}{4}; 1\frac{3}{4}; 3\frac{1}{4}; 6\frac{1}{4}; 7\frac{3}{4}; 9\frac{1}{4}; 10\frac{3}{4}$. Do đó số điểm có tọa độ nguyên phải tìm trên các đường thẳng $x = -1, x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, x = 6$ lần lượt là 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11.

Tổng số điểm phải đếm là:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 11 = 48.$$



ABC

Chương 9. Một số đề thi học sinh giỏi và đề tự luyện.

Đề số 1

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP Hồ Chí Minh năm học 2007-2008

Bài 1: Cho phương trình: $2x^2 - (6m - 3)x - 3m + 1 = 0$ (x là ẩn số)

- Định m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt đều âm.
- Gọi $x_1 + x_2$ là hai nghiệm của phương trình trên. Định m để $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 2: a. Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

- Cho $a \geq 1; b \geq 1$. Chứng minh: $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$.

Bài 3: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

Bài 4: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) và có trực tâm là H.

- Xác định vị trí của điểm M thuộc cung BC không chứa điểm A sao cho tứ giác BHCM là một hình bình hành.
- Lấy M là điểm bất kỳ trên cung BC không chứa A. Gọi N và E lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AB và AC. Chứng minh ba điểm N, H, E thẳng hàng.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD có O là giao điểm hai đường chéo và diện tích tam giác AOB bằng 4, diện tích tam giác COD bằng 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác ABCD.

Đề số 2

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP Huế năm học 2008-2009

Bài 1: Chứng minh rằng với hai số thực bất kỳ a, b ta luôn có: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$. Dấu

đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 2: Cho ba số a, b, c không âm sao cho $a + b + c = 1$. Chứng minh $b + c \geq 16abc$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 3: Với giá trị nào của góc nhọn α thì biểu thức $P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$ có giá trị bé nhất? Cho biết giá trị bé nhất đó.

Bài 4: 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB lần lượt tại D, E và F. Đặt $x = DB$, $y = DC$, $z = AE$.

a. Tìm hệ thức giữa x , y và z .

b. Chứng minh rằng: $AB.AC = 2DB.DC$.

2. Cho tam giác ABC cân tại A, $BC = a$. Hai điểm M và N lần lượt trên AC và AB sao cho $AM = 2MC$, $AN = 2NB$ và hai đoạn BM và CN vuông góc với nhau. Tính diện tích tam giác ABC theo a .

Bài 5: Một tấm bìa hình chữ nhật có kích thước 1×5 . Hãy cắt tấm bìa thành các mảnh để ráp lại thành một hình vuông. Giải thích.

Đề số 3

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên Lê Quý Đôn Bình Định năm học 2009-2010

Bài 1: Cho a , b , c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Bài 2: Cho 3 số phân biệt m , n , p . Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{1}{x-m} + \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x-p} = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt.}$$

Bài 3: Với số tự nhiên n , $n \geq 3$.

$$\text{Đặt } S_n = \frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

$$\text{Chứng minh rằng } S_n < \frac{1}{2}.$$

Bài 4: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O có độ dài các cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. E là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A sao cho cung EB bằng cung EC. Nối AE cắt cạnh BC tại D.

a. Chứng minh: $AD^2 = AB.AC - DB.DC$

b. Tính độ dài đoạn AD theo a , b , c .

Bài 5: Chứng minh rằng: $\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$ với mọi số nguyên dương

m, n .

ABC

Đề số 4

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên Hà Nam năm học 2009-2010

Bài 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{1 - x} + \frac{(\sqrt{x} - 2)^2 + 3\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}}$

- Tìm điều kiện xác định của P.
- Rút gọn P
- Tìm x để $P > 0$.

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \\ (2 + \sqrt{2})x - y = 1 \end{cases}$$

Bài 3: a. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $y = x + 6$ và parabol $y = x^2$.

- Tìm m để đồ thị hàm số $y = (m + 1)x + 2m + 3$ cắt trục Ox, Oy tại các điểm A và B và $\triangle OAB$ cân (đơn vị trên hai trục Ox và Oy bằng nhau).

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ vuông đỉnh A, đường cao AH, I là trung điểm của AH, K là trung điểm của HC. Đường tròn đường kính AH ký hiệu là (AH) cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N.

- Chứng minh $\triangle ABC$ và $\triangle AMN$ đồng dạng.
- Chứng minh KN là tiếp tuyến của đường tròn (AH).
- Tìm trực tâm của tam giác ABK.

Bài 5: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$.

Đề số 5

Bài 1: Cho phương trình: $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$ (1).

- Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt.
- Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^3 + x_2^3 = \frac{5}{2}$.
- Giải phương trình (1) có hai nghiệm không âm. Tìm giá trị của m để nghiệm dương của phương trình đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = 4x - x^2$ (2)

Bài 3: Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 60^\circ$; $BC = a$; $AB = c$ (a, c là hai độ dài cho trước). Hình chữ nhật MNPQ có đỉnh M trên cạnh AB, N trên cạnh AC, P và Q ở trên cạnh BC được gọi là hình chữ nhật nội tiếp trong tam giác ABC.

- Tìm vị trí của M trên cạnh AB để hình chữ nhật MNPQ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.
- Đựng hình vuông EFGH nội tiếp trong tam giác ABC bằng thước kẻ và com-pa. Tính diện tích của hình vuông đó.

Đề số 6

Bài 1: (4,0 điểm) Cho biểu thức: $A = \frac{x\sqrt{x} - 4x - \sqrt{x} + 4}{2x\sqrt{x} - 14x + 28\sqrt{x} - 16}$

- Tìm x để A có nghĩa, từ đó rút gọn biểu thức A .
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Bài 2: ((4,0 điểm) Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ (m là tham số)

- Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1 và x_2 sao cho

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{18}{17}$$

- Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1 và x_2 sao cho $|x_1| + |x_2| = 8$

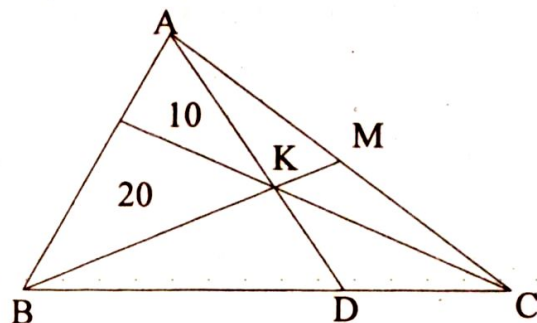
Bài 3: (3,0 điểm) a. Cho 4 số thực bất kì a, b, c, d . Chứng minh:

$$|ab + cd| \leq \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?}$$

- Với giá trị nào của góc nhọn α thì biểu thức $P = 3\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha$ có giá trị lớn nhất? Cho biết giá trị lớn nhất đó.

Bài 4: a. Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không qua tâm O, điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Gọi M là trung điểm của CD. Hỏi M di chuyển trên đường nào? Nêu cách dựng đường này và giới hạn của nó.

- Trong hình bên, cho biết M là trung điểm của AC và các đường thẳng AD, BM và CE đồng quy tại K. Hai tam giác AKE và BKE có diện tích là 10 và 20. Tính diện tích tam giác ABC.



- Bài 5:** (3,0 điểm) a. Tìm số tự nhiên n để $n + 18$ và $n - 41$ là hai số chính phương.
b. Tính các số ô nhỏ nhất phải quét sơn trên một bảng 5×5 để cho bất kì vùng 3×3 nào đó trên bảng này cũng chứa ít nhất 4 ô đã quét sơn.

Đề số 7

Bài 1: a. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + 3 = 4y \\ y^4 + 3 = 4x \end{cases}$$

b. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thỏa mãn bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{c^2}{a+b} + \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} \geq \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{a+c} + \frac{a^2}{c+a}$$

Thì: $|a| = |b| = |c|$

Bài 2: a. Xác định hình vuông có độ dài cạnh là số nguyên và diện tích cũng là số nguyên gồm 4 chữ số, trong đó các chữ số hàng đơn vị bằng chục và hàng trăm giống nhau.

A, B, C là một nhóm ba người thân thuộc. Cha của A thuộc nhóm đó, cũng vậy con gái của B và người song sinh của C cũng ở trong nhóm đó. Biết rằng C và người song sinh của C là hai người khác giới tính và C không phải là con của B. Hỏi trong ba người A, B, C ai là người khác giới tính với hai người kia?

Bài 3: Cho đường tròn (O) tâm O, bán kính R, hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Đường tròn (O_1) nội tiếp trong tam giác ACD. Đường tròn (O_2) tiếp xúc với 2 cạnh OB và OD của tam giác OBD và tiếp xúc trong với đường tròn (O). Đường tròn (O_3) tiếp xúc với 2 cạnh OB và OC của tam giác OBC và tiếp xúc trong với đường tròn (O). Đường tròn (O_4) tiếp xúc với 2 tia CA và CD và tiếp xúc ngoài với đường tròn (O_1). Tính bán kính của các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3), (O_4) theo R.

Đề số 8

Bài 1: (8 điểm) Cho (P): $y = \frac{1}{3}x^2$

Viết phương trình các tiếp tuyến của (P), biết các tiếp tuyến này đi qua điểm $A(2; 1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(2; 1)$ và có hệ số góc m. Với giá trị nào của m thì đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M và N, khi đó tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng MN khi m thay đổi. Tìm quỹ tích các điểm M_0 từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến của parabol (P) và hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau.

Bài 2: (4 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 19 \\ x + y + xy = -7 \end{cases}$$

Bài 3: (8 điểm) Cho nửa đường tròn đường kính AB cố định. C là một điểm bất kì thuộc nửa đường tròn. Ở phía ngoài tam giác ABC vẽ các hình vuông BCDE và ACFG. Gọi Ax, By là các tiếp tuyến của nửa đường tròn.

- Chứng minh rằng khi C di chuyển trên nửa đường tròn đã cho thì đường thẳng ED luôn đi qua một điểm cố định và đường thẳng FG luôn đi qua điểm cố định khác.
- Tìm quỹ tích các điểm E và G khi C di chuyển trên nửa đường tròn đã cho.
- Tìm quỹ tích các điểm D và F khi C di chuyển trên nửa đường tròn đã cho.

Hướng dẫn và đáp số

Đề số 1

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP Hồ Chí Minh năm học 2007-2008

Bài 1: a. $\Delta = (6m - 3)^2 - 8(-3m + 1) = (6m - 1)^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6m - 3 \pm 6m - 1}{4}$

$$\Rightarrow x_1 = 3m - 1 \text{ và } x_2 = -\frac{1}{2}$$

Để hai nghiệm phân biệt đều âm thì
$$\begin{cases} 3m - 1 < 0 \\ 3m - 1 \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{3} \\ m \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

b. Ta có $A = x_1^2 + x_2^2 = (3m - 1)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$

A đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{4}$ khi $m = \frac{1}{3}$.

Bài 2: a. Với a, b, c, d là các số dương, ta có:

$$\frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}; \quad \frac{b}{b+c+d} > \frac{b}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c}{c+d+a} > \frac{c}{a+b+c+d}; \quad \frac{d}{d+a+b} > \frac{d}{a+b+c+d}$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên ta được:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b}.$$

Ta lại có:

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c}; \frac{c}{c+d+a} < \frac{c}{a+c} \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} + \frac{c}{c+d+a} < 1$$

$$\frac{b}{b+c+d} < \frac{b}{b+d}; \frac{d}{d+a+b} < \frac{d}{d+b} \Rightarrow \frac{b}{b+c+d} + \frac{d}{d+a+b} < 1$$

Từ đó ta có ĐPCM.

b. Ta có: $\sqrt{a-1} = \sqrt{1 \cdot (a-1)} \leq \frac{1+a-1}{2} = \frac{a}{2} \quad (a, b \geq 1)$

Suy ra $b\sqrt{a-1} \leq \frac{ba}{2} \quad (1)$; Tương tự: $a\sqrt{b-1} \leq \frac{ab}{2} \quad (2)$

Cộng (1) và (2) ta có ĐPCM.

Bài 3: Giả sử $n^2 + n + 1$ chia hết cho 9 thì ta có:

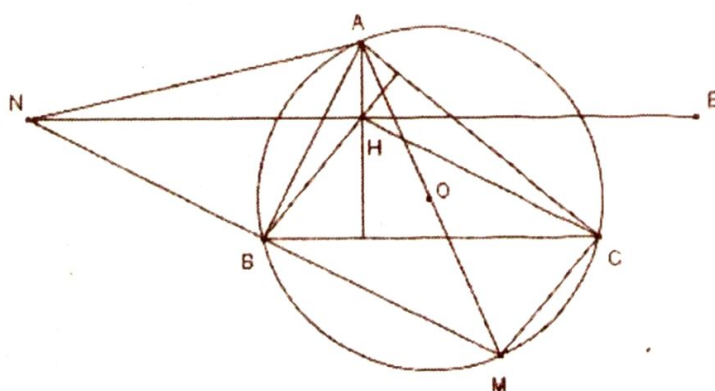
$$n^2 + n + 1 = k \cdot 9 \quad (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow n^2 + n + 1 - k \cdot 9 = 0 \quad (1)$$

$\Delta = 1 - 4(1 - k \cdot 9) = 36k - 3 = 3(12k - 1)$. Ta thấy Δ chia hết cho 3 và không chia hết cho 9 nên không là số chính phương. Do vậy phương trình (1) trên không thể có nghiệm nguyên.

Vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9 (ĐPCM).

Bài 4: a. Gọi M_0 là điểm đối xứng của A qua tâm O của đường tròn.

Ta có $CM_0 \parallel BH$ vì cùng vuông góc với AC; $BM_0 \parallel CH$ vì cùng vuông góc với AB. Vậy tứ giác $BHCM_0$ là một hình bình hành. Điểm M_0 chính là vị trí của M mà ta cần xác định.



b. Ta có N và M đối xứng qua AB nên: $\widehat{NHB} + \widehat{EHC} = \widehat{BAC}$

H là trực tâm tam giác ABC nên: $\widehat{AHB} + \widehat{ACB} = 180^\circ$

Suy ra: $\widehat{ANB} + \widehat{AHB} = 180^\circ$. Tứ giác AHBN nội tiếp được cho ta:

$$\widehat{NHB} = \widehat{NAB}. \text{ Mà } \widehat{NAB} = \widehat{MAB} \text{ nên } \widehat{NHB} = \widehat{MAB} \quad (1)$$

Tương tự ta cũng có: $\widehat{EHC} = \widehat{MAC} \quad (2)$.

Cộng (1) và (2) ta có: $\widehat{NHB} + \widehat{EHC} = \widehat{BAC}$.

Mà ta lại có: $\widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^\circ$

Nên: $\widehat{NHB} + \widehat{EHC} + \widehat{BHC} = 180^\circ$. Vậy N, H, E thẳng hàng.

Bài 6: Đặt $S_{BOC} = x$, $S_{AOD} = y$

$$\text{Ta có } \frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{OB}{OD} = \frac{S_{BOC}}{S_{COD}}$$

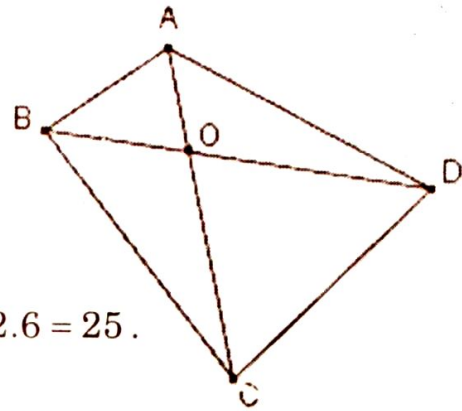
$$\text{Suy ra: } \frac{4}{y} = \frac{x}{9} \Rightarrow xy = 36.$$

Ta lại có

$$S_{ABCD} = 4 + 9 + x + y \geq 13 + 2\sqrt{xy} = 13 + 2 \cdot 6 = 25.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = 6$.

Vậy diện tích tứ giác ABCD đạt giá trị nhỏ nhất là 25.



Đề số 2

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP Huế năm học 2008-2009

Bài 1: Ta có:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - ab = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab, \forall a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Bài 2: Ta có: $(a+b+c)^2 = [a+(b+c)]^2 \geq 4a(b+c)$

Mà $a+b+c=1$ (giả thiết). Nên $1 \geq 4a(b+c) \Leftrightarrow b+c \geq 4a(b+c)^2$ (vì a, b, c không âm nên $b+c$ không âm). Nhưng: $(b+c)^2 \geq 4bc$ (không âm). Suy ra $b+c \geq 16abc$.

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} a = b+c \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow b = c = \frac{1}{4}; a = \frac{1}{2}.$$

Bài 3: Ta có: $P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3$

$$P = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) [\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha]$$

$$P = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

Ta có:

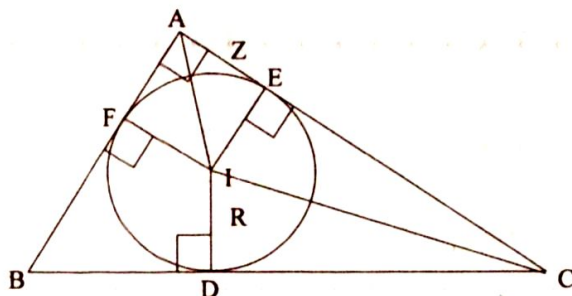
$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 \geq 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \leq \frac{1}{4}$$

Suy ra:

$$P = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \geq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$



Do đó: $P_{\min} = \frac{1}{4}$ khi và chỉ khi $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha$ (vì α là góc nhọn) $\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$.

Bài 4: 1a. Ta có: $BD = BF$, $CD = CE$ và $AE = AF$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau). Do đó: $BC = x + y$, $AC = y + z$, $AB = x + z$.

Theo định lý Pytago $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow (x + y)^2 = (x + z)^2 + (y + z)^2$
 $\Leftrightarrow 2xy = 2z(x + y) + 2z^2 \Leftrightarrow xy = z(x + y + z)$ (a)

1b. Gọi r là bán kính, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} CA \cdot r + \frac{1}{2} AB \cdot r = (x + y + z)r$ (b)

Tứ giác $AEIF$ có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.

Nhưng $AE = AF$ (CM trên), nên $AEIF$ là hình vuông. Do đó: $z = EI = r$ (c).

Từ (a), (b), (c) suy ra $AB \cdot AC = 2xy \Leftrightarrow AB \cdot AC = 2DB \cdot DC$.

2. Theo giả thiết $AM = 2MC$ và $AN = 2NC$ suy ra:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{2}{3}.$$

Gọi E là giao điểm của BM và CN . Theo

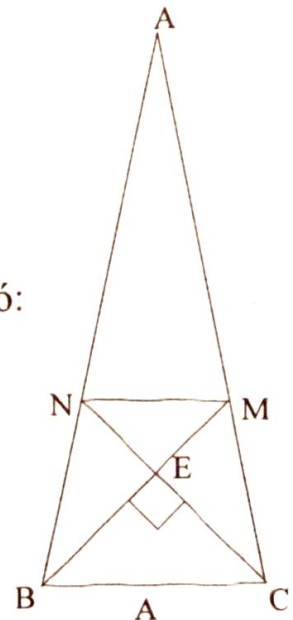
định lý Talet, ta có: $\frac{EM}{EB} = \frac{EN}{EC} = \frac{MN}{BC} = \frac{2}{3}$.

Gọi BK là đường cao hạ từ B của tam giác ABC , ta có:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCM}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BK}{\frac{1}{2} CM \cdot BK} = \frac{AC}{CM} = 3 \Rightarrow S_{ABC} = 3S_{BCM}.$$

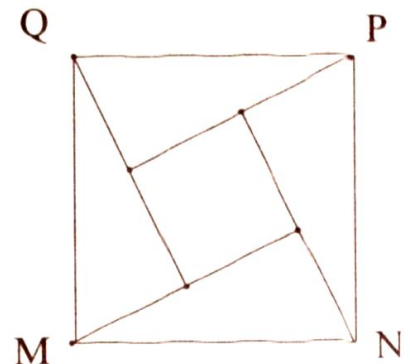
$$\frac{S_{BEC}}{S_{BMC}} = \frac{BE}{BM} = \frac{3}{5} \Rightarrow S_{BMC} = \frac{5}{3} S_{BEC} = \frac{5a^2}{12}.$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{5a^2}{4}.$$



Bài 5: Tắt bìa hình chữ nhật 1×5 có diện tích là 5(đvdt). Để cắt hình chữ nhật thành các mảnh ráp thành hình vuông thì cạnh của hình vuông bằng $\sqrt{5}$, bằng độ dài cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông có kích thước là 1 và 2 có diện tích bằng 1 (đvdt).

Do đó nếu cắt hình chữ nhật 1×5 theo đường chéo của 2 hình chữ nhật $AEFD$ và $GBCH$ và cắt theo 2 đường EF và GH xong ráp lại thì được hình vuông $MNPQ$ như hình bên.



Đề số.3

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên Lê Quý Đôn Bình Định năm học 2009-2010

Bài 1: Chứng minh $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$ (với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác).

Ta có: $\frac{m}{n} < \frac{m+k}{n+k}$, (với $0 < m < n, \forall k > 0$) (1)

Thật vậy:

$$(1) \Leftrightarrow 0 < m(n+k) < n(m+k) \Leftrightarrow 0 < mk < nk \Leftrightarrow 0 < m < n (0 < m, n, k)$$

Áp dụng: $0 < a < b+c \Rightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$

$$0 < b < c+a \Rightarrow \frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}; \quad 0 < c < a+b \Rightarrow \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}.$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (2)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức phụ:

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \quad (x, y, z > 0)$$

Ta có: $(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq 9$

Thay $x = a+b, y = b+c, z = c+a$ vào (2):

$$2(a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} > 1 \quad (3).$$

Từ (2), (3) suy ra $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

Bài 2: Phương trình $\frac{1}{x-m} + \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x-p} = 0$ (1)

ABC

Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq m, n, p$.

Biến đổi phương trình tương đương:

$$(1) \Leftrightarrow (x-n)(x-p) + (x-m)(x-p) + (x-m)(x-n) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x(m+n+p) + mn + np + mp = 0$$

$$\Delta' = (m+n+p)^2 - 3(mn + np + mp)$$

$$= m^2 + n^2 + p^2 - mn - np - mp = \frac{1}{2}[(m-n)^2 + (n-p)^2 + (m-p)^2] > 0$$

(vì $m \neq n \neq p$)

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài 3: Ta có bất đẳng thức: $2n+1 > 2\sqrt{n(n+1)}$

$$\Leftrightarrow (2n+1)^2 > 4n(n+1) \Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 1 > 4n^2 + 4n : \text{BDT đúng}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} &< \frac{1}{2(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(n+1-n)\sqrt{n(n+1)}} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right] \quad (1). \end{aligned}$$

Cho n lần lượt lấy các giá trị từ 1 đến n , thay vào (1), rồi cộng vế theo vế các bất đẳng thức tương ứng, ta được:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} \\ &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 4: a) Xét hai tam giác ABD và AEC, ta có: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (AD là phân giác góc A); $\widehat{ABD} = \widehat{AEC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Do đó $\triangle ABD \sim \triangle AEC$ (g.g)

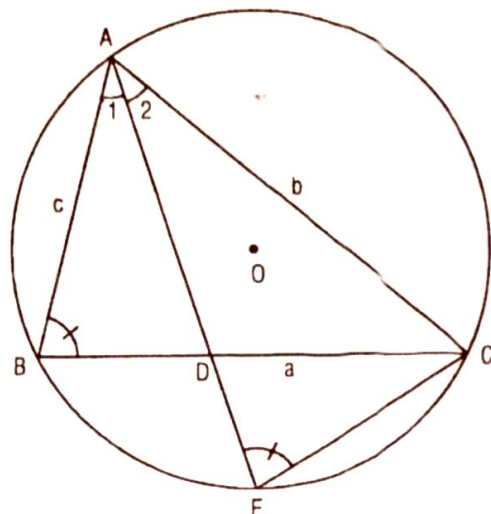
$$\text{Suy ra } \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE} \Leftrightarrow AD \cdot AE = AB \cdot AC$$

Mặt khác $\triangle ABD \sim \triangle CED$ (g.g)

$$\text{nên } \frac{BD}{DE} = \frac{DA}{DC} \Rightarrow BD \cdot DC = DA \cdot DE$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó: } AB \cdot AC - BD \cdot DC &= AD \cdot AE - DA \cdot DE \\ &= AD(AE - DE) = AD^2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC \quad (1)$$



b) Theo tính chất đường phân giác của tam giác, ta có:

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} \Leftrightarrow \frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{DB+DC}{c+b} = \frac{BC}{c+b} = \frac{a}{c+b}$$

$$\text{Suy ra } \frac{DB}{c} \cdot \frac{DC}{b} = \frac{DB \cdot DC}{bc} = \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \Rightarrow DB \cdot DC = \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \cdot bc \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta có:

$$\begin{aligned} AD^2 &= bc - \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \cdot bc = bc \left(1 - \frac{a}{b+c} \right) \left(1 + \frac{a}{b+c} \right) \\ &= bc \cdot \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{(b+c)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } AD = \frac{\sqrt{bc(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}$$

Bài 5: Trước hết, ta cần chứng minh $\left| \frac{1}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1).$

Vì $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên bất đẳng thức (1) tương đương với:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2} - \frac{1}{n} \geq \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{n^2} \quad (2). \text{ Đặt } t = \frac{1}{n} (0 < t \leq 1), \text{ ta có:}$$

$$(2) \Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t^2 + t - \sqrt{2} \leq 0 \quad (\forall t: 0 < t \leq 1) \quad (3)$$

Biến đổi tương đương:

$$(3) \Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})t + (\sqrt{3} - \sqrt{2})t + t - \sqrt{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t(t-1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)t - \sqrt{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t(t-1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)t - (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1) + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t(t-1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)(t-1) + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 \leq 0 \quad (\text{vì } 0 < t \leq 1 \text{ nên } t(t-1) \leq 0)$$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} + 1 \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{3} \leq 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 3 < 4$: Bất đẳng thức đúng. Do đó bất đẳng thức (2) đúng.

$$\forall i \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \left| \frac{1}{n} - \sqrt{2} \right|, \forall m \in \mathbb{N}^*, \text{ nên } \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Vậy } \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Nhận xét: Dấu " $=$ " trong bất đẳng thức không xảy ra.

ABC

Đề số 4

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên Hà Nam năm học 2009-2010

Bài 1: a. P xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ 1-\sqrt{x} \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

b. Rút gọn P:
$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{1-x} + \frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 3\sqrt{x} - x}{1-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{x-4\sqrt{x}+4+3\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})} + \frac{-\sqrt{x}+4}{1-\sqrt{x}} = \frac{4}{(1-\sqrt{x})}$$

c. $P > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{(1-\sqrt{x})} > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x} > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 > x \geq 0$

Bài 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \\ (2+\sqrt{2})x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3+2\sqrt{2})x = \sqrt{2} + 1 \\ (1+\sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} - 1 \\ (1+\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) + y = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} - 1 \\ y = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Bài 3: a. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $y = x + 6$ và parabol $y = x^2$ là nghiệm của phương trình: $x^2 = x + 6$ hay $x^2 - x - 6 = 0$.

Giải phương trình ta có $x_1 = -2$; $x_2 = 3$ suy ra tung độ giao điểm tương ứng là $y_1 = 4$; $y_2 = 9$ nên tọa độ các giao điểm là: $A(-2; 4)$, $B(3; 9)$

b. Đồ thị hàm số $y = (m+1)x + 2m+3$ cắt trục Oy tại các điểm

$B(0; 2m+3)$ và cắt trục Ox tại điểm $A\left(-\frac{2m+3}{m+1}; 0\right)$ với $m \neq -1$.

Để ΔOAB cân thì $OA = OB \Leftrightarrow \left|-\frac{2m+3}{m+1}\right| = 2m+3 \Leftrightarrow \frac{|2m+3|}{|m+1|} = |2m+3|$

1) $2m+3=0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ khi đó $A \equiv B \equiv 0$ không tồn tại ΔOAB

$$2) \frac{1}{|m+1|} = 1$$

$$a) m+1=1 \Leftrightarrow m=0$$

$$b) m+1=-1 \Leftrightarrow m=-2. \text{ Vậy } m=0; m=-2 \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Bài 4: a. $AH \perp BC$ (gt); $\widehat{HMA} = \widehat{HNA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Áp dụng hệ thức cạnh và đường cao trong tam giác vuông. Trong $\triangle AHB$ và $\triangle AHC$ có $AH^2 = AM \cdot AB = AN \cdot AC$

Suy ra $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ lại có góc A chung nên $\triangle ACB \sim \triangle AMN$ (c.g.c)

b. I là trung điểm của AH nên I là tâm của đường tròn (AH)

$\Rightarrow IM = IH$; $\triangle HNC$ vuông tại N có

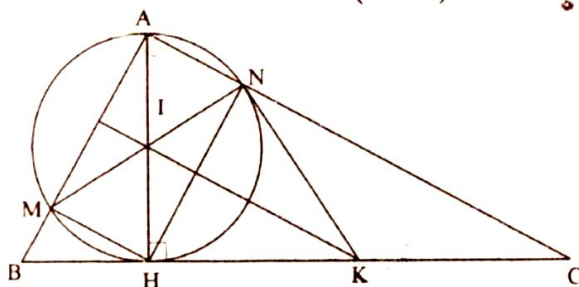
K là trung điểm của HC

$\Rightarrow KH = KC = KN$.

Lại có KI chung nên $\triangle KNI = \triangle KHI$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{KNI} = \widehat{KHI}$ mà $\widehat{KHI} = 90^\circ$ nên $\widehat{KNI} = 90^\circ$ hay KN là tiếp tuyến của đường tròn (AH).

c. Trong tam giác AHC có KI là đường trung bình nên $KI \parallel AC$ mà $AC \perp AB \Rightarrow KI \perp AB$; nên I là trực tâm của $\triangle KAB$.



Bài 5: Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$P = \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) \cdot (x + y + z)$$

$$= \left(\left(\frac{1}{\sqrt{16x}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{4y}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \right) \cdot \left((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2 \right)$$

$$\geq \left(\frac{1}{\sqrt{16x}} \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{4y}} \cdot \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{z} \right)^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right)^2 = \frac{49}{16}.$$

Vậy $P_{\min} = \frac{49}{16}$ khi đó $\frac{1}{\sqrt{16x}} : \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{4y}} : \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{z}} : \sqrt{z}$ và $x + y + z = 1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}.$$

ABC

Đề số 5

Bài 1: a. Để phương trình 1 có 2 nghiệm dương phân biệt, điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} \Delta' = 4 - m^2 > 0 \\ P = \frac{m^2 - 2}{2} > 0 \\ S = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| < 2 \\ |m| > \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} < m < 2 \\ m > 0 \end{cases}$$

b. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2 (*)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 \right] = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow m \left[m^2 - \frac{3(m^2 - 2)}{2} \right] = \frac{5}{2} \Leftrightarrow m^3 - 6m + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)(m^2 + m - 5) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1; m_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Ta có: } -2 - \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} > 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} < -2$$

$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} > 0 > -2 \text{ và } 2 - x_3 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} > 0 \Leftrightarrow x_3 < 2$$

$$\text{Vậy có 2 giá trị } m \text{ thỏa mãn điều kiện bài toán: } m = 1; m = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$$

c. Phương trình có hai nghiệm không âm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta' = 4 - m^2 \geq 0 \\ P = \frac{m^2 - 2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq m \leq 2 \quad (**) \\ S = m > 0 \end{cases}$$

bằng 0, nên nghiệm dương của phương trình là:

$$x_2 = \frac{m + \sqrt{4 - m^2}}{2} > 0. \text{ Suy ra}$$

$$x_2^2 = \frac{m^2 + 2m\sqrt{4 - m^2} + 4 - m^2}{4} = \frac{4 + 2\sqrt{m^2(4 - m^2)}}{4}$$

Theo bất đẳng thức Côsi:

$$m^2 + (4 - m^2) \geq 2\sqrt{m^2(4 - m^2)} \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2(4 - m^2)} \leq 4$$

$$\text{Suy ra: } x_2^2 \leq 2 \Leftrightarrow x_2 \leq \sqrt{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $m^2 = 4 - m^2 \Leftrightarrow m = \sqrt{2} \in [\sqrt{2}; 2]$.

Vậy nghiệm dương của phương trình đạt giá trị lớn nhất là $\sqrt{2}$ khi $m = \sqrt{2}$
 Khi đó 2 nghiệm của phương trình là:

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{4 - m^2}}{2}; \quad x_2 = \frac{m + \sqrt{4 - m^2}}{2} \Rightarrow 0 \leq x_1 \leq x_2 \left(\forall m \in [\sqrt{2}; 2] \right)$$

Bài 2: $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = 4x - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = (4x - x^2)^2 \end{cases} \quad (2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4x - x^2 \geq 0 \\ t = 4 - (x - 2)^2 \leq 4 \\ 3 - t = t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 4 \\ t^2 + t - 3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Giải phương trình theo t , ta có: $t_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < 0$ (loại); $t_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} > 0$

$$t_2 - 4 = \frac{\sqrt{13} - 9}{2} < 0 \Leftrightarrow t_2 < 4. \text{ Suy ra nghiệm của (3) là } t_2$$

Giải phương trình $4x - x^2 = t_2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + t_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{\frac{9 - \sqrt{13}}{2}} \\ x_2 = 2 + \sqrt{\frac{9 - \sqrt{13}}{2}} \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{\frac{9 - \sqrt{13}}{2}}$

Bài 3: a. + Đặt $AM = x$ ($0 \leq x \leq c$).

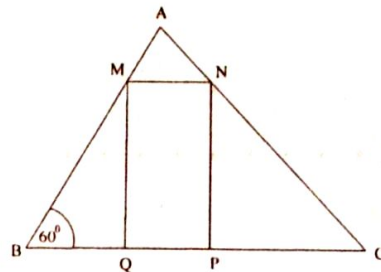
Ta có: $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Leftrightarrow MN = \frac{ax}{c}$. $MQ = BM \cdot \sin 60^\circ = \frac{(c - x)\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra diện tích của MNPQ là:

$$S = \frac{ax(c - x)\sqrt{3}}{2c} = \frac{a\sqrt{3}}{2c} x(c - x)$$

+ Ta có bất đẳng thức $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 \quad (a > 0, b > 0)$$



ABC

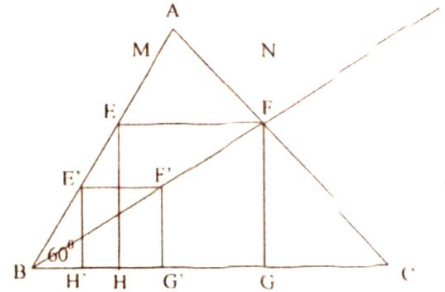
Áp dụng ta có: $x(c-x) \leq \left(\frac{x+c-x}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = c - x \Leftrightarrow x = \frac{c}{2}$.

Suy ra $S \leq \frac{a\sqrt{3}}{2c} \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{ac\sqrt{3}}{8}$.

Vậy $S_{\max} = \frac{ac\sqrt{3}}{8}$ khi $x = \frac{c}{2}$ hay M là trung

điểm của cạnh AC.



- b. Giả sử đã dựng được hình vuông EFGH nội tiếp trong tam giác ABC. Nối BF, trên đoạn BF lấy điểm F'. Dựng hình chữ nhật E'F'G'H' ($E' \in AB$; $G', H' \in BC$).

Ta có: $E'F' \parallel EF$ và $F'G' \parallel FG$ nên $\frac{E'F'}{EF} = \frac{BE'}{BE} = \frac{BF'}{BF} = \frac{F'G'}{FG}$

$\Rightarrow E'F' = F'G'$. Do đó E'F'G'H' là hình vuông.

+ Cách dựng và chứng minh: trên cạnh AB lấy điểm E' tùy ý, dựng hình vuông E'F'G'H' ($G', H' \in BC$). Dựng tia BF' cắt AC tại F, dựng hình chữ nhật EFGH nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh tương tự trên ta có $EF = FG$, suy ra EFGH là hình vuông.

+ Ta có: $\frac{BH'}{E'H'} = \cot g 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot g \widehat{G'BC} = \frac{BG'}{F'G'} = \frac{BH' + H'G'}{F'G'} = \frac{BH'}{E'H'} + 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + 1$.

Suy ra tia BF' cố định khi E' di động trên AB, cắt AC tại một điểm F duy nhất.

Trường hợp hình vuông E'F'G'H' có đỉnh F' ở trên cạnh AC; G' và H' ở trên cạnh BC, lý luận tương tự ta cũng có tia CE' cố định, cắt AB tại E. Vậy bài toán có một nghiệm hình duy nhất.

+ Đặt $AE = x$. Ta có:

$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow EF = \frac{ax}{c}$; $HE = (c-x) \sin B = \frac{(c-x)\sqrt{3}}{2}$;

EFGH là hình vuông nên $EF = EH \Leftrightarrow \frac{ax}{c} = \frac{(c-x)\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{c^3\sqrt{3}}{2a+c\sqrt{3}}$

Suy ra diện tích hình vuông EFGH là: $S = EF^2 = \frac{3a^2c^2}{(2a+c\sqrt{3})^2}$.

Đề số 6

Bài 1: a. Để A có nghĩa trước hết $x \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$)

$$A = \frac{t^3 - 4t^2 - t + 4}{2t^3 - 14t^2 + 28t - 16} = \frac{(t^2 - 1)(t - 4)}{2t^3 - 2t^2 - (12t^2 - 28t + 16)}$$

$$= \frac{(t - 1)(t + 1)(t - 4)}{2(t - 1)(t - 2)(t - 4)}$$

Để biểu thức A có nghĩa thì

$$t \geq 0, t \neq 1; t \neq 2; t \neq 4 \Leftrightarrow x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4; x \neq 16$$

Khi đó rút gọn ta được $A = \frac{t + 1}{2(t - 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{2(\sqrt{x} - 2)}$

b. $A = \frac{t + 1}{2(t - 2)} = \frac{(t - 2) + 3}{2(t - 2)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2(t - 2)}$

Để A là số nguyên thì X nguyên và $t - 2$ phải bằng ± 1 hoặc ± 3 .

Nếu $t - 2 = -1 \Leftrightarrow t = 1$ (loại vì trái điều kiện (*))

Nếu $t - 2 = -3 \Leftrightarrow t = -1$ (loại)

Nếu $t - 2 = 1 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow x = 9$ và $A = 2$

Nếu $t - 2 = 3 \Leftrightarrow t = 5 \Leftrightarrow x = 25$ và $A = 1$

Vậy để A nhận các giá trị nguyên thì $x = 9$ và $x = 25$.

Bài 2: a. Để phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm thì:

$$\Delta' = m^2 - (m^2 - m - 6) = m + 6 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -6 \quad (1)$$

Với điều kiện (1) ta có:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{18}{17} \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{18}{7} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{18}{7} \text{ và } x_1 x_2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4m^2 - (2m^2 - m - 6)}{m^2 - m - 6} = \frac{18}{7} \Leftrightarrow \frac{m^2 + m + 6}{m^2 - m - 6} = \frac{18}{7} \quad (m \neq 2; m \neq -3)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8m - 48 = 0 \Leftrightarrow m_1 = -4, m_2 = 12 \text{ (thỏa mãn điều kiện (1) và đều khác } -2 \text{ và khác } 3).$$

b. Với điều kiện (1): $|x_1| + |x_2| = 8 \quad (x_1 + x_2)^2$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = 64 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 64 \quad (2)$$

$$\text{Nếu } x_1 \text{ và } x_2 \text{ cùng dấu thì } x_1 x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -6 \\ m^2 - m - 6 = (m + 2)(m - 3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -6 \leq m \leq -2 \text{ hoặc } m \geq 3 \quad (3). \text{ Khi đó } (2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 = 64 \Leftrightarrow m = \pm 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện (3)).}$$

+ Nếu x_1 và x_2 trái dấu thì $x_1 x_2 < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 = (m + 2)(m - 3) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3 \quad (4)$$

$$\text{Khi đó } (2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 - 4(m^2 - m - 6) = 64$$

$$\Leftrightarrow m + 6 = 16 \Leftrightarrow m = 10 \text{ (không thỏa mãn điều kiện (4))}$$

$$\text{Vậy để } |x_1| + |x_2| = 8 \text{ thì } m = \pm 4.$$

Bài 3: a. Ta có:

$$0 \leq |ab + cd| \leq \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)} \Leftrightarrow (ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 b^2 + c^2 d^2 + 2abcd \leq a^2 b^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + c^2 d^2.$$

$$\Leftrightarrow (ad)^2 + (bc)^2 - 2(ad)(bc) \geq 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0: \text{ đúng với 4 số thực } a, b, c, d \text{ bất kì.}$$

$$\text{Vậy } 0 \leq |ab + cd| \leq \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}, \text{ với } a, b, c, d \text{ bất kì.}$$

b. Áp dụng kết quả trên ta có: $P = 3 \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha > 0$

$$\text{Nên } P = 3 \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha \leq \sqrt{(3^2 + (\sqrt{3})^2)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = 2\sqrt{3}$$

$$P_{\max} = 2\sqrt{3} \text{ khi } 3 \cos \alpha \sqrt{3} - \sqrt{3} \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ$$

Bài 4: a. Ta có: tam giác ACD cân tại A (gt) nên $\widehat{BAC} = 2\widehat{ADC}$ ($\widehat{BAC}$ là góc ngoài của tam giác ACD).

+ Gọi I là trung điểm của BC, ta có

MI // BD (đường trung bình của tam giác BCD),

$$\text{nên: } \widehat{IMC} = \widehat{BDC} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$$

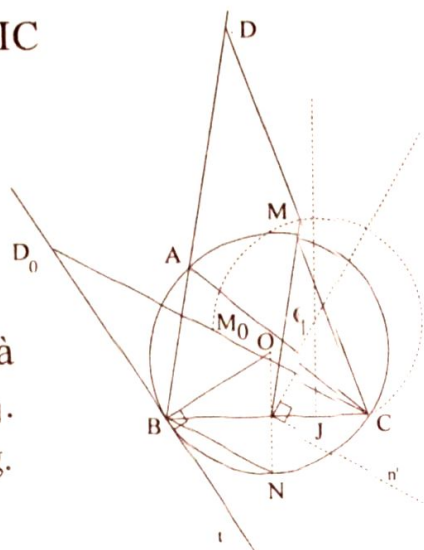
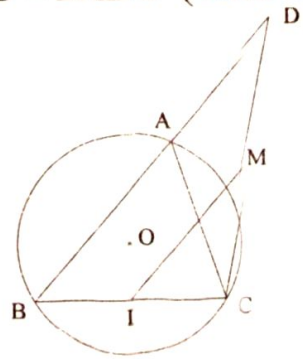
$$= \frac{1}{4} \widehat{DOC} = \frac{\alpha}{4} \quad (\alpha = \widehat{BOC} \text{ không đổi})$$

+ Do đó: M chạy trên cung tròn nhìn đoạn IC dưới góc $\frac{\alpha}{4}$ không đổi.

+ Dựng tia OI cắt đường tròn (O) tại N, ta có:

$$\widehat{NBC} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \widehat{IMC}.$$

+ Dựng tia In' // BN, dựng đường thẳng qua I và vuông góc với In' cắt trung trực đoạn IC tại O₁. Đường tròn tâm O₁ và đi qua C là đường cần dựng.

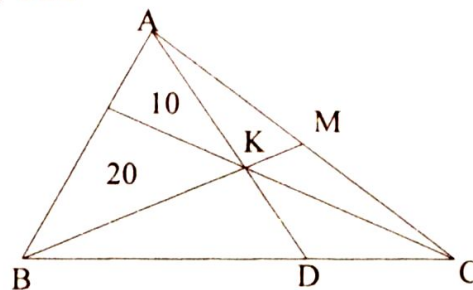


+ Khi A chạy trên cung lớn BC tới trùng với A thì D trùng với D_0 trên tiếp tuyến Bt của (O) và $BD_0 = BC$, khi đó M trùng với M_0 là trung điểm của CD_0 .

Vậy M chỉ di chuyển trên cung lớn CM_0 của đường tròn (O_3) .

b. Gọi h là khoảng cách từ K đến AB, ta có:

$$\frac{S_{\triangle AKE}}{S_{\triangle BKE}} = \frac{AE \times \frac{h}{2}}{BE \times \frac{h}{2}} = \frac{AE}{BE} \Leftrightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{1}{2}$$



$$+ \text{ Suy ra } \frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle BCE}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle ACE} \quad (1)$$

$$+ \text{ Tương tự: } \frac{S_{\triangle AMK}}{S_{\triangle CKM}} = \frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow S_{\triangle AMK} = S_{\triangle CKM}$$

Đặt $x = S_{\triangle AKM} = S_{\triangle CKM}$, ta có:

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM} \Leftrightarrow 20 + 10 + x = x + S_{\triangle BCK} \Rightarrow S_{\triangle BCK} = 30$$

$$(1) \Leftrightarrow 20 + S_{\triangle BCK} = 2(10 + 2x) \Leftrightarrow 10 + 2x = 25 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2}$$

$$\text{Do đó } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AKB} + S_{\triangle BCK} + S_{\triangle AKC} = 10 + 20 + 30 + 2x = 75.$$

Bài 5. a. Để $n + 18$ và $n - 41$ là hai số chính phương

$$\Leftrightarrow n + 18 = p^2 \text{ và } n - 41 = q^2 \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow p^2 - q^2 = (n + 18) - (n - 41) = 59 \Leftrightarrow (p - q)(p + q) = 59$$

$$\text{Nhưng 59 là số nguyên tố nên: } \begin{cases} p - q = 1 \\ p + q = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 30 \\ q = 29 \end{cases}$$

$$\text{Từ } n + 18 = p^2 = 30^2 = 900 \text{ suy ra } n = 882$$

$$\text{Thay vào } n - 41, \text{ ta được } 882 - 41 = 841 = 29^2 = q^2$$

Vậy với $n = 882$ thì $n + 18$ và $n - 41$ là hai số chính phương

b. + Dọc theo chiều ngang sát sát cạnh trên của bảng 5×5 có 3 vùng 3×3 ở 3 vị trí $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$. Dịch chuyển xuống theo chiều dọc 1 ô, ta có thêm 3 vùng 3×3 . Dịch chuyển xuống theo chiều dọc 1 ô nữa ta có 3 vùng 3×3 . Do đó có 9 vùng con 3×3 của bảng 5×5 , mỗi vùng con đều chứa 5 ô vuông con 1×1 thuộc hình chữ thập đã tô màu.

+ Nếu chỉ quét sơn như hình vẽ bên thì mỗi vùng con 3×3 đều chứa 4 hoặc 5 ô 1×1 được quét sơn.

Vậy để mỗi vùng con 3×3 của bảng 5×5 chứa ít nhất 4 ô 1×1 được quét sơn thì chỉ cần quét số ô nhỏ nhất là 7 ô như hình vẽ bên.

Đề số 7

Bài 1: a. $\begin{cases} x^4 + 3 = 4y \\ y^4 + 3 = 4x \end{cases}$. Điều kiện để hệ có nghiệm là: $\begin{cases} x^4 + 3 = 4y \\ y^4 + 3 = 4x \end{cases}$

Với điều kiện (*) ta có: $\begin{cases} x^4 + 3 = 4y \\ y^4 + 3 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 3 = 4y & (a) \\ x^4 - y^4 + 4(x - y) = 0 & (b) \end{cases}$

$$(b) \Leftrightarrow (x - y) \left[(x + y)(x^2 + y^2) + 4 \right] = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(Vì $x, y \geq \frac{3}{4} > 0$ nên $(x + y)(x^2 + y^2) + 4 > 0$)

Thay vào (a): $x^4 + 3 = 4y \Leftrightarrow x^4 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 - 4(x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x^2 + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vì $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 0$. So với điều kiện (*), ta có: $x = y = 1 > \frac{3}{4}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

1.2 Điều kiện: $a \neq -b$; $b \neq -c$; $c \neq -a$, ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} - \left(\frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a} \right) \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a+b} + \frac{b^2 - c^2}{b+c} + \frac{c^2 - a^2}{c+a} = (a - b) + (b - c) + (c - a) = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}$

$$\Rightarrow \frac{2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 2c^2b^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}{2(a+b)(b+c)(c+a)} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{a^4 - 2a^2c^2 + c^4 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4}{2(a+b)(b+c)(c+a)} = 0$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ b^2 - c^2 = 0 \\ c^2 - a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2 \Leftrightarrow |a| = |b| = |c|$$

Bài 2: a. Theo giả thiết diện tích hình vuông có dạng $S = \overline{abbb} = k^2$
 $(k > 0, k \in \mathbb{Z})$ $1000 \leq k^2 \leq 9999 \Leftrightarrow 33 \leq k \leq 99$ nên k chỉ gồm có 2 chữ số: $k = \overline{xy} = 10x + y$; $k^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$ ($3 \leq x \leq 9$; $0 \leq y \leq 9$).

Nếu y lẻ $\Rightarrow y = 1; 3; 5; 7; 9 \Rightarrow y^2 = 1; 9; 25; 49; 81 \Rightarrow b = 1; 5; 9$. Khi đó $2xy$ có chữ số tận cùng là số chẵn nên chữ số hàng chục của k^2 phải là số chẵn khác 1; 5; 9, do đó S không thể là $\overline{abbb}$

Nếu y chẵn $\Rightarrow y = 0; 2; 4; 6; 8$

$\Rightarrow y^2 = 0; 4; 16; 36; 64 \Rightarrow b = 0; 4; 6$.

Với $y = 0$; k^2 chỉ có thể là 1600; 2500; 3600; 4900; 6400; 8100 không thỏa mãn điều kiện bài toán.

Với $y = 2$; $k^2 = 100x^2 + 40x + 4$: Khi đó x chỉ có thể là 6 thì chữ số hàng chục của k^2 mới là 4. Suy ra $k^2 = 3600 + 244 = 3844 \neq \overline{abbb}$

Với $y = 4$; $y^2 = 16; 36$. Khi đó $20xy$ có chữ số hàng chục là số chẵn nên chữ số hàng chục của k^2 phải là số lẻ. Do đó không thể bằng 4 hoặc 6, nghĩa là $k^2 \neq \overline{abbb}$

Với $y = 8$; $y^2 = 64$; $k^2 = 100x^2 + 160x + 64$, khi đó x chỉ có thể là 3 hoặc 8 thì chữ số hàng chục của k^2 mới bằng 4 suy ra $k^2 = 38^2 = 1444$ hoặc $k^2 = 88^2 = 7744$ (không thỏa mãn điều kiện bài toán).

Vậy bài toán có một lời giả duy nhất: hình vuông cần xác định có cạnh $k = 38$ và diện tích $S = 1444$.

b. Theo giả thiết, cha của A có thể là B hoặc C:

+ Nếu B là cha của A thì C không thể song sinh với A, vì nếu như thế thì C là con của B, trái giả thiết. Do đó C và B là song sinh và khác giới tính (gt), nên C là phái nữ. Mặt khác, con gái của B không thể là C nên phải là A, do đó A phải là phái nữ. Vậy B khác giới tính với hai người còn lại là A và C.

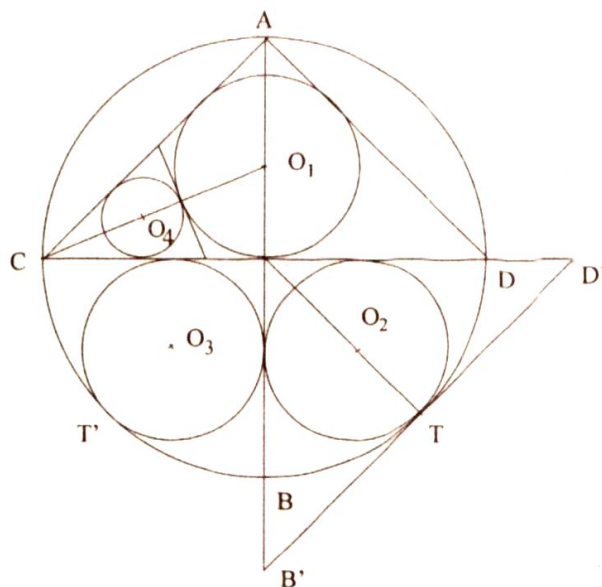
+ Nếu C là cha của A thì C chỉ có thể là song sinh với B, theo giả thiết B phải là nữ. Mặt khác, con gái của B không thể là C (gt) nên phải là A, suy ra C và B là vợ chồng chứ không phải song sinh, dẫn đến mâu thuẫn. Vậy chỉ có duy nhất trường hợp B là cha của A và B khác giới tính với hai người còn lại là A và C (cùng là phái nữ).

Bài 3: + Gọi r là độ dài bán kính đường tròn (O_1) . Ta có: $S_{\Delta ACD} = pr$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{1}{2}(2AC + CD)r$$

$$\Leftrightarrow R^2 = R(\sqrt{2} + 1)r \Leftrightarrow r = \frac{R}{1 + \sqrt{2}}$$

+ Đường tròn (O_2) tiếp xúc với OB và OD nên tâm O_2 ở trên tia phân giác của góc $\widehat{BOD}$, (O_2) lại tiếp xúc trong với (O) nên tiếp điểm T của chúng ở trên đường thẳng nối 2 tâm O và O_2 , chính là giao điểm của tia phân giác $\widehat{BOD}$ với (O) .



+ Đường thẳng đi qua T vuông góc với OT cắt 2 tia OB và OD tại B' và D' là tiếp tuyến chung của (O) và (O_2) . Do đó (O_2) là đường tròn nội tiếp $\Delta OB'D'$.

+ $\Delta OB'D'$ có phân giác $\widehat{O}$ vừa là đường cao nên nó là tam giác vuông cân và $B'D' = 2OT = R$, $OB' = OD' = R\sqrt{2}$. Suy ra: $\Delta BO'D' = \Delta ACD$.

+ Vậy bán kính của (O_2) cũng bằng $r = \frac{R}{1 + \sqrt{2}}$.

+ Hai hình quạt OBC và OBD đối xứng với nhau qua AB nên (O_3) cũng bằng $r = \frac{R}{1 + \sqrt{2}}$.

+ Đường tròn (O_4) có hai trường hợp

a. **Trường hợp 1:** (O_4) ở bên trái (O_1)

Kẻ tiếp tuyến chung của (O_4) và (O_1) tại tiếp điểm K cắt AC và AD tại E và F ; CO và CA còn là 2 tiếp tuyến của (O_3) nên chu vi của $VCEF$ bằng $2CO$ suy ra nửa chu vi của nó là $p = R$.

$$\text{Ta có: } CO = \sqrt{R + r} = \frac{R\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2}}$$

$$CK = CO_1 - O_1K = \frac{R\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2}} - \frac{R}{1 + \sqrt{2}} = \frac{R(4 + 2\sqrt{2} - 1)}{1 + \sqrt{2}}$$

$$\frac{KF}{KC} = \frac{O_1O}{CO} = \tan 22^\circ 30' = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \Rightarrow KF = \frac{R(\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - 1)}{(1 + \sqrt{2})^2}$$

$$S_{VCEF} = CK.KF = \frac{R(\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - 1)^2}{(1 + \sqrt{2})^3}.$$

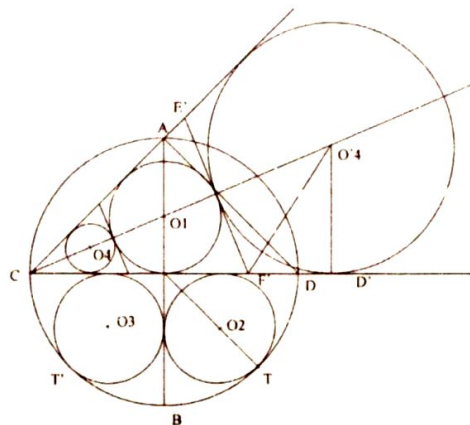
Suy ra bán kính của đường tròn (O_4) là:
$$r_4 = \frac{R(\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - 1)^2}{(1 + \sqrt{2})^3}$$

b. Trường hợp 2: (O'_4) ở bên phải (O_1)

Khi đó K' là tiếp điểm của 2 đường tròn, tiếp tuyến chung cắt CA và CD tại E' và F' , CD tiếp xúc với (O_4) tại H .

$$\begin{aligned} \text{CK}' &= \text{CO}_1 + \text{O}_1 \text{K}' \\ &= \frac{R\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}} + \frac{R}{1+\sqrt{2}} = \frac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+1)}{1+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'H &= K'F' = CK' \operatorname{tg} 22^{\circ} 30' \\ &= \frac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+1)}{(1+\sqrt{2})^2} \end{aligned}$$



$$\frac{CK'}{CF'} = \frac{CO}{CO_1} \Leftrightarrow CF' = \frac{CK' \cdot CO_1}{CO} = \frac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+1)\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{(1+\sqrt{2})^2}$$

$$CH = CF' + F'H = \frac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+1)\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{(1+\sqrt{2})^2} + \frac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+1)}{(1+\sqrt{2})^2}$$

$$CH = \frac{R(\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + 1)^2}{(1 + \sqrt{2})^2}.$$

Suy ra bán kính của đường tròn (O'_4) là:

$$r_4' = O_4'H = CH \operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{R(\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + 1)^2}{(1 + \sqrt{2})^3}.$$

Đề số 8

Bài 1: a. Phương trình đường thẳng d_1 đi qua $A(2;1)$ có dạng: $y = ax + b$ và

$1 = 2a + b$ Suy ra $b = 1 - 2a$ do đó $d_1 : y = ax = 2a + 1$

Phương trình cho hoành độ giao điểm của d_1 và (P) là:

$$\frac{1}{3}x^2 = ax - 2a - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3ax + 6a - 3 = 0.$$

Đề d_1 là tiếp tuyến của (P) thì cần và đủ là:

$$\Delta' = \Delta = 9a^2 - 24a + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy từ $A(2;1)$ có hai tiếp tuyến đến (P) là: $d_1: y = 2x - 3$; $d_2: \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

b. Phương trình đường thẳng d đi qua $A(2;1)$ có hệ số góc m là:

$$y = mx + 1 - 2m.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$\frac{1}{3}x^2 = mx - 2m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3mx + 6m - 3 = 0 \quad (2).$$

Để d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì cần và đủ là:

$$\Delta = 9m^2 - 24m + 12 > 0 \Leftrightarrow 9\left(m^2 - \frac{8}{3}m + \frac{4}{3}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} > 0 \Leftrightarrow \left|m - \frac{4}{3}\right| > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{4}{3} \\ m - \frac{4}{3} > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m > 2 \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} m < \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} - m > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Với điều kiện $(*)$, d cắt (P) tại điểm 2 điểm M và N có hoành độ là x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình (2) nên tọa độ trung điểm I của MN là:

$$I \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3m}{2} \\ y = mx + 1 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2x}{3} \left(\frac{2x}{3} < \frac{2}{3}; \frac{2x}{3} > 2 \Leftrightarrow x < 1; x > 3 \right) \\ y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 \end{cases}$$

Vậy khi M thay đổi quỹ tích của I là phần của parabol

$$y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1, \text{ giới hạn bởi } x < 1; x > 3.$$

c. Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là điểm từ đó có thể vẽ 2 tiếp tuyến vuông góc đến (P) .

Phương trình đường thẳng qua M_0 và có hệ số góc k là: $y = kx + b$, đường thẳng này đi qua M_0 nên: $y_0 = kx_0 + b \Leftrightarrow b = y_0 - kx_0$ suy ra phương trình của d' : $y = kx - kx_0 + y_0$. Phương trình hoành độ giao điểm của d' và

$$(P) \text{ là: } \frac{1}{3}x^2 = kx - kx_0 + y_0 \Leftrightarrow x^2 - 3kx + 3kx_0 - 3y_0 = 0 \quad (**)$$

Để từ M_0 có thể kẻ hai tiếp tuyến vuông góc tới (P) thì phương trình:

$$\Delta = 9k^2 - 12kx_0 + 12y_0 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } k_1, k_2 \text{ và } k_1 k_2 = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{12y_0}{9} = -1 \Leftrightarrow y_0 = -\frac{3}{4}$$

Vậy quỹ tích các điểm M_0 từ đó có thể vẽ được 2 tiếp tuyến vuông góc với (P) là đường thẳng $y_0 = -\frac{3}{4}$.

Bài 2:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 19 \\ x + y + xy = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 3xy = 19 \\ x + y + xy = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 3P = 19 \\ S + P = -7 \end{cases} \begin{pmatrix} S = x + y \\ P = xy \end{pmatrix} \quad (1)$$

Giải hệ phương trình (1) ta được $(S = -1; P = -6)$, $(S = -2; P = -5)$.

Giải các hệ phương trình tích, tổng: $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -6 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -5 \end{cases}$

Ta có các nghiệm của hệ phương trình đã cho là.

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 - \sqrt{6} \\ y = -1 + \sqrt{6} \end{cases}; \begin{cases} x = -1 + \sqrt{6} \\ y = -1 - \sqrt{6} \end{cases}$$

Bài 3: a. Gọi K là giao điểm của Ax và GF, I là giao điểm của By và ED.

Ta có: $\widehat{BEI} = \widehat{BCA} = 90^\circ$

$\widehat{EBI} = \widehat{CBA}$ (góc có các cạnh tương ứng vuông góc)

$BE = EC$

Do đó: $\triangle BEI = \triangle BCA \Rightarrow BI = BA$ mà By

cố định Suy ra điểm I cố định.

+ Tương tự, K cố định

+ Vậy khi C di chuyển trên nửa đường tròn thì đường thẳng ED đi qua điểm I cố định và đường thẳng GF đi qua điểm K cố định.

b. Suy ra quỹ tích của I là nửa đường tròn đường kính BI (bên phải By, $C \equiv A \Rightarrow E \equiv I, C \equiv B \Rightarrow E \equiv B$; quỹ tích của K là nửa đường tròn đường kính AK (bên trái Ax, $C \equiv A \Rightarrow G \equiv A, C \equiv B \Rightarrow G \equiv K$).

c. Xét hai tam giác BEI và BDK, ta có:

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BI}{BK} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

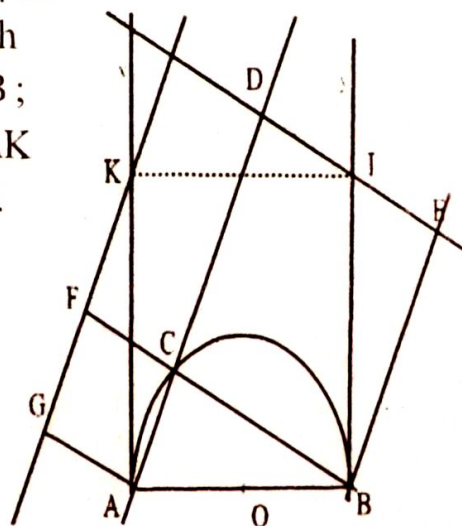
$$\widehat{EBI} + \widehat{IBD} = \widehat{KBD} + \widehat{IBD} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EBI} = \widehat{KBD}$$

Do đó: $\triangle BEI = \triangle BDK \Rightarrow \widehat{BDK} = \widehat{BEI} = 90^\circ$

+ Vậy quỹ tích của D là nửa đường tròn đường kính BK.

+ Tương tự, quỹ tích của F là nửa đường tròn đường kính AI.



MỤC LỤC

Chương 1. Các phép toán về căn thức	5
Chương 2. Phương trình bậc hai-Hệ thức Viet.....	42
Chương 3. Hệ phương trình.....	78
Chương 4. Phương trình nghiệm nguyên	119
Chương 5. Phương trình vô tỷ	139
Chương 6. Phương trình, bất phương trình qui về bậc nhất, bậc hai.	166
Chương 7. Bất đẳng thức	195
Chương 8. Bài tập tổng hợp	231
Chương 9. Một số đề thi học sinh giỏi và đề tự luyện.....	258

ABC