

MỤC LỤC

§2-CẤP SỐ CỘNG	2
Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản.....	2
Ⓑ Dạng toán cơ bản.....	3
»Dạng ①: . Nhận dạng 1 dãy số là cấp số cộng	3
»Dạng ②: Xác định số hạng , công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng.....	4
▶CÁCH GIẢI:	4
»Dạng ③: Tính tổng các số hạng trong một cấp số cộng.....	5
▶CÁCH GIẢI:	5
»Dạng ④: Giải phương trình (tìm x trong cấp số cộng).....	7
▶CÁCH GIẢI:	7
»Dạng ⑤: Chứng minh một hệ thức trong cấp số cộng lập thành cấp số cộng, Câu toán có sử dụng yếu tố cấp số cộng	8
▶CÁCH GIẢI:	8
Ⓒ Bài tập tự luận SGK.....	10
Ⓓ Bài tập trắc nghiệm.....	13
HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.....	16
Bài tập tự ôn luyện.....	25

A Tóm tắt lý thuyết cơ bản

1. ĐỊNH NGHĨA

- Cấp số cộng là một dãy số, trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi d , tức là:

$$u_n = u_{n-1} + d \quad (n \geq 2).$$

- Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.
- Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d thì với số tự nhiên $n \geq 2$, ta có:

$$u_n - u_{n-1} = d.$$

► Chú ý:

- Khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi.

2. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

- Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 + (n - 1)d$ với $n \geq 2$.

► Nhận xét:

- Từ công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$, ta có: $n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1$ với $n \geq 2$.

3. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG

- Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d .

- Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Khi đó: $S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$.

- Do $u_n = u_1 + (n - 1)d$ nên $u_1 + u_n = 2u_1 + (n - 1)d$.

- Suy ra $S_n = \frac{[2u_1 + (n - 1)d]n}{2}$.

B) Dạng toán cơ bản

» Dạng ①: . Nhận dạng 1 dãy số là cấp số cộng

► Cách giải:

- Sử dụng định nghĩa (u_n) là một cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{n+1} - u_n = d$, với d là một hằng số.
- Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét $d = u_{n+1} - u_n$
- Nếu d là hằng số thì (u_n) là một cấp số cộng với công sai d .
- Nếu d phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

Câu 1: Chứng minh các dãy số sau là cấp số cộng.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2020n - 2021$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 5$.

Lời giải

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2020n - 2021$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 2020(n+1) - 2021 - (2020n - 2021) = 2020$.

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 2020$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 5$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 5 - (-2n + 5) = -2$.

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -2$.

Câu 1: Chứng minh các dãy số sau không phải là cấp số cộng.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 3n$.

Lời giải

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (n^2 + n + 1) = 2n + 2$ phụ thuộc vào n .

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 3n$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} + 3(n+1) - [(-1)^n + 3n] = -(-1)^n + 3 - (-1)^n = 3 - 2(-1)^n$ phụ thuộc vào n .

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

Câu 2: Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$, công sai $d = -2$. Viết ba số hạng đầu của cấp số cộng đó.

Lời giải

Ba số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) là $u_1 = 9$;

$$u_2 = u_1 + d = 9 + (-2) = 7; u_3 = u_2 + d = 7 + (-2) = 5.$$

? Cho (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = -7$, $u_2 = -2$. Viết năm số hạng đầu của cấp số cộng đó.

Câu 3: Dãy các số tự nhiên lẻ liên tiếp $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$ có là cấp số cộng hay không? Vì sao?

Lời giải

Dãy các số tự nhiên lẻ liên tiếp $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$ là cấp số cộng vì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với 2. Công sai của cấp số cộng này là 2.

»Dạng ②: Xác định số hạng, công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng

► Cách giải:

- Xác định một cấp số cộng là xác định số hạng đầu u_1 và công sai d
- Từ những giả thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và d rồi giải hệ đó.

Câu 4: Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của cấp số cộng (u_n) : $10, 5, \dots$

Lời giải

Cấp số cộng này có số hạng đầu $u_1 = 10$ và công sai $d = -5$.

Do đó năm số hạng đầu là: $10, 5, 0, -5, -10$.

$$\text{Số hạng thứ 100 là } u_{100} = u_1 + (100 - 1)d = 10 + 99 \cdot (-5) = -485.$$

Câu 5: Số hạng thứ 10 của một cấp số cộng (u_n) bằng 48 và số hạng thứ 18 bằng 88. Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng đó.

Lời giải

Giả sử u_1 là số hạng đầu và d là công sai của cấp số cộng đó. Ta có:

$$u_{10} = u_1 + 9d = 48, u_{18} = u_1 + 17d = 88$$

Giải hệ này ta được $u_1 = 3$ và $d = 5$.

$$\text{Vậy số hạng thứ 100 của cấp số cộng này là } u_{100} = u_1 + 99d = 3 + 99 \cdot 5 = 498.$$

Câu 6: Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của cấp số cộng (u_n) : $10, 5, \dots$

Lời giải

Cấp số cộng này có số hạng đầu $u_1 = 10$ và công sai $d = -5$.

Do đó năm số hạng đầu là: $10, 5, 0, -5, -10$.

$$\text{Số hạng thứ 100 là } u_{100} = u_1 + (100 - 1)d = 10 + 99 \cdot (-5) = -485.$$

Câu 7: Số hạng thứ 10 của một cấp số cộng (u_n) bằng 48 và số hạng thứ 18 bằng 88. Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng đó.

Lời giải

Giả sử u_1 là số hạng đầu và d là công sai của cấp số cộng đó. Ta có:

$$u_{10} = u_1 + 9d = 48, u_{18} = u_1 + 17d = 88$$

Giải hệ này ta được $u_1 = 3$ và $d = 5$.

Vậy số hạng thứ 100 của cấp số cộng này là $u_{100} = u_1 + 99d = 3 + 99 \cdot 5 = 498$.

Câu 8: Cần lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng 2, 5, 8, ... để được kết quả bằng 345 ?

Lời giải

Cấp số cộng này có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Gọi n là số các số hạng đầu của cấp số cộng cần lấy tổng, ta có

$$345 = S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} [2 \cdot 2 + (n-1)3] = \frac{n}{2} (3n+1)$$

Do đó $3n^2 + n - 690 = 0$. Giải phương trình bậc hai này ta được $n = -\frac{230}{15}$ (loại) và $n = 15$.

Câu 9: Một cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu là 5, số hạng thứ tám là 40. Khi đó công sai d của cấp số cộng đó là bao nhiêu?

Lời giải

$$\begin{array}{l} \text{Ta có: } u_1 = 5 \\ 40 = u_8 = u_1 + 7d \end{array} \quad d = 5$$

Câu 10: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tìm số hạng u_{17} .

Lời giải.

$$\text{Ta có công sai của cấp số cộng là } d = \frac{u_3 - u_{15}}{3 - 15} = \frac{84}{-12} = -7.$$

$$\text{Suy ra } u_{17} = u_1 + (17-1)d = 11.$$

►►Dạng ③: Tính tổng các số hạng trong một cấp số cộng

► **Cách giải:**

- Tính tổng n số hạng đầu tiên nhờ công thức:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$

Câu 11: Tính tổng: $S = 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 97$.

Lời giải

Ta thấy dãy số 1, 5, 9, ..., 97 là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$, số hạng cuối $u_n = 97$, công sai $d = 4$. Vì thế, số các số hạng của cấp số cộng trên là:

$$n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1 = \frac{97 - 1}{4} + 1 = 25.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{(1+97) \cdot 25}{2} = 1225.$$

Câu 12: Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 20 ghế, hàng thứ hai có 21 ghế, hàng thứ ba có 22 ghế, ... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 70800000 đồng. Tính

giá tiền của mỗi vé (đơn vị: đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 20$, công sai $d = 1$. Cấp số cộng này có 20 số hạng.

Do đó, tổng số ghế trong nhà thi đấu là: $S_{20} = \frac{[2 \cdot 20 + (20-1) \cdot 1] \cdot 20}{2} = 590$.

Vì số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu nên số vé bán ra là 590. Vậy giá tiền của một vé là: $70800000 : 590 = 120000$ (đồng).

Câu 13: Tính tổng $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \dots + (2n-1) - 2n$ với $n \geq 1$ và $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $(2n-1) - 2n = -1$.

Ta có $S = (1-2) + (3-4) + (5-6) + \dots + ((2n-1) - 2n)$. Do đó ta xem S là tổng của n số hạng, mà mỗi số hạng đều bằng -1 nên $S = -n$.

Nhận xét: Ta có $1; 3; 5; \dots; 2n-1$ và $2; 4; 6; \dots; 2n$ là các cấp số cộng có n số hạng nên

$$\begin{aligned} S &= (1+3+5+\dots+2n-1) - (2+4+6+\dots+2n) \\ &= \frac{n}{2}(1+2n-1) - \frac{n}{2}(2+2n) = n^2 - (n^2 + n) = -n. \end{aligned}$$

Câu 14: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

Lời giải

Ta có $u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100 \Leftrightarrow 4u_1 + 30d = 100 \Leftrightarrow 2u_1 + 15d = 50$.

$$\text{Khi đó } S_{16} = \frac{16}{2}(u_1 + u_{16}) = 8(2u_1 + 15d) = 8 \cdot 50 = 400$$

Câu 15: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Lời giải

Đặt $a = u_1$ thì

$$u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = (a+d)^2 + (a+2d)^2 + (a+3d)^2 = 3a^2 - 36a + 126 = 3(a-6)^2 + 18 \geq 18$$

với mọi a . Dấu bằng xảy ra khi $a-6=0 \Leftrightarrow a=6$. Suy ra $u_1 = 6$.

$$\text{Ta có } S_{100} = \frac{100 \cdot [2u_1 + (100-1)d]}{2} = -14250.$$

Câu 16: Giải Câu toán ở tình huống mở đầu.

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng của nhà hát lập thành một cấp số cộng, gồm 25 số hạng, với số hạng đầu $u_1 = 16$ và công sai $d = 2$. Tổng các số hạng này là

$$\begin{aligned} S_{25} &= u_1 + u_2 + \dots + u_{25} = \frac{25}{2}[2u_1 + (25-1)d] = \frac{25}{2}[2 \cdot 16 + 24 \cdot 2] \\ &= 1000. \end{aligned}$$

Vậy nhà hát đó có tổng cộng 1000 ghế.

►►Dạng ④: Giải phương trình (tìm x trong cấp số cộng)

►Cách giải:

- Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.
- Sử dụng các tính chất của cấp số cộng

Câu 17: Cho các số $-4; 1; 6; x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm x .

Lời giải.

Vì các số $-4; 1; 6; x$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3, u_4 lập thành cấp số cộng nên

$$u_4 - u_3 = u_3 - u_2 \longrightarrow x - 6 = 6 - 1 \Leftrightarrow x = 11$$

Câu 18: Nếu các số $5 + m; 7 + 2m; 17 + m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Ba số $5 + m; 7 + 2m; 17 + m$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng nên

$$u_1 + u_3 = 2u_2 \Leftrightarrow (5 + m) + (17 + m) = 2(7 + 2m) \Leftrightarrow m = 4$$

Nhận xét: Ta có thể dùng tính chất $u_3 - u_2 = u_2 - u_1$.

Câu 19: Với giá trị nào của x và y thì các số $-7; x; 11; y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng?

Lời giải.

Bốn số $-7; x; 11; y$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3, u_4 lập thành cấp số cộng nên

$$\begin{cases} u_4 - u_3 = u_3 - u_2 \\ u_4 - u_3 = u_2 - u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 11 = 11 - x \\ y - 11 = x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 22 \\ x - y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 20 \end{cases}$$

Câu 20: Tìm x biết : $x^2 + 1, x - 2, 1 - 3x$ lập thành cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có: $x^2 + 1, x - 2, 1 - 3x$ lập thành cấp số cộng

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 + 1 - 3x = 2(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x = 3$$

Vậy $x = 2, x = 3$ là những giá trị cần tìm.

**►►Dạng ⑤: Chứng minh một hệ thức trong cấp số cộng lập thành cấp số cộng,
Câu toán có sử dụng yếu tố cấp số cộng**

►Cách giải:

- Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối cùng đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.
- **Hệ quả:** Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.
- Sử dụng các tính chất của cấp số cộng

Câu 21: Chứng minh rằng ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi các số $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh bằng phép biến đổi tương đương.

Ba số $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} &= \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{a})} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) &= (\sqrt{c} - \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{b}) \\ \Leftrightarrow b - a &= c - b \Leftrightarrow a, b, c \text{ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.} \end{aligned}$$

Câu 22: Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, chứng minh rằng

a) $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$. b) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

Lời giải.

Vì a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng nên $a + c = 2b \Leftrightarrow a = 2b - c$.

a) Ta có $a^2 - 2ab = (2b - c)^2 - 2(2b - c).b = 4b^2 - 4bc + c^2 - 4b^2 + 2bc = c^2 - 2bc$.

Vậy $a^2 - 2ab = c^2 - 2bc \Leftrightarrow a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$.

b) Ta có $a^2 + 8bc = (2b - c)^2 + 8bc = 4b^2 - 4bc + c^2 + 8bc = 4b^2 + 4bc + c^2 = (2b + c)^2$.

Câu 23: Một tam giác vuông có chu vi bằng $3a$ và ba cạnh lập thành một cấp số cộng. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a .

Lời giải.

Gọi x, y, z theo thứ tự là độ dài ba cạnh của tam giác ($x < y < z$).

Chu vi của tam giác là $x + y + z = 3a$. (1)

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $x + z = 2y$. (2)

Tam giác đã cho vuông nên $x^2 + y^2 = z^2$. (3)

Thay (2) và (1), ta được $3y = 3a \Leftrightarrow y = a$.

Thay $y = a$ vào (2), ta được $x + z = 2a \Rightarrow x = 2a - z$.

Thay $x = 2a - z$ và $y = a$ vào (3), ta được

$$(2a - z)^2 + a^2 = z^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 4az = 0 \Leftrightarrow z = \frac{5a}{4} \Rightarrow x = \frac{3a}{4}.$$

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác là $\frac{3a}{4}, a, \frac{5a}{4}$.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m = 0$.

Lời giải

- *Điều kiện cần:* Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng. Theo định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba, ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 3m$. Vì x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng nên $x_1 + x_3 = 2x_2$. Suy ra $3x_2 = 3m \Leftrightarrow x_2 = m$. Thay $x_2 = m$ vào phương trình đã cho, ta được

$$m^3 - 3m.m^2 + 2m(m-4).m + 9m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

- *Điều kiện đủ:*

+ Với $m = 0$ thì ta có phương trình $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (phương trình có nghiệm duy nhất). Do đó $m = 0$ không phải giá trị cần tìm.

+ Với $m = 1$, ta có phương trình $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -2; x = 4$.

Ba nghiệm $-2; 1; 4$ lập thành một cấp số cộng nên $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 25: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương

tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải

+) Theo phương án 1: Gọi (u_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 1 qua mỗi năm.

Dãy số u_n lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 120$ và công sai $d = 18$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n = 120 + (n-1) \cdot 18$.

+) Theo phương án 2: Gọi (v_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 2 qua từng quý.

Dãy số (v_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 24$ và công sai $d = 1,8$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là $v_n = 24 + (n-1)1,8$.

a) Khi kí hợp đồng 3 năm tương đương với 12 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_3 = 120 + (3-1) \cdot 18 = 156$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm là:

$$S_3 = \frac{3 \cdot (120 + 156)}{2} = 414 \text{ (triệu đồng)}.$$

+) Theo phương án 2: $u_{12} = 24 + (12 - 1) \cdot 1,8 = 43,8$.

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm tương ứng với 12 quý là:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (24 + 43,8)}{2} = 406,8 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 3 năm thì nên theo phương án 1.

b) Khi kí hợp đồng 10 năm tương đương với 40 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_{10} = 120 + (10 - 1) \cdot 18 = 282$ (triệu đồng)

$$\text{Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm là: } S_{10} = \frac{10 \cdot (120 + 282)}{2} = 2010 \text{ (triệu đồng)}.$$

+) Theo phương án 2: $u_{40} = 24 + (40 - 1) \cdot 1,8 = 94,2$ (triệu đồng).

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm tương ứng với 40 quý là:

$$S_{12} = \frac{40 \cdot (24 + 94,2)}{2} = 2364 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 10 năm thì nên theo phương án 2.

Bài tập tự luận SGK

Câu 26: Xác định công sai, số hạng thứ 5, số hạng tổng quát và số hạng thứ 100 của mỗi cấp số cộng sau:

a) 4, 9, 14, 19, ...; b) 1, -1, -3, -5, ...

Lời giải

a) $9 - 4 = 5; 14 - 9 = 5$

Suy ra cấp số cộng có $u_1 = 4$, công sai $d = 5$

Số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n = 4 + 5(n - 1)$

Số hạng thứ 5: $u_5 = 4 + 5(5 - 1) = 24$

Số hạng thứ 100: $u_{100} = 4 + 5(100 - 1) = 499$

b) $-1 - 1 = -2; -3 - (-1) = -2$

Suy ra cấp số cộng có $u_1 = 1$, công sai $d = -2$

Số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n = 1 + (-2)(n - 1)$

Số hạng thứ 5: $u_5 = 1 + (-2)(5 - 1) = -7$

Số hạng thứ 100: $u_{100} = 1 + (-2)(100 - 1) = -197$

Câu 27: Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số (u_n) sau và xét xem nó có phải là cấp số cộng không. Nếu dãy số đó là cấp số cộng, hãy tìm công sai d và viết số hạng tổng quát của nó dưới dạng $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

a) $u_n = 3 + 5n$; b) $u_n = 6n - 4$;

c) $u_1 = 2, u_n = u_{n-1} + n$; d) $u_1 = 2, u_n = u_{n-1} + 3$.

Lời giải

a) $u_1 = 8; u_2 = 13; u_3 = 18; u_4 = 23; u_5 = 28$

Ta có: $u_n - u_{n-1} = 3 + 5n - [3 + 5(n - 1)] = 5 \forall n \geq 2$

Suy ra dãy số là cấp số cộng có $u_1 = 8$ và công sai $d = 5$

Số hạng tổng quát: $u_n = 8 + 5(n - 1)$

b) $u_1 = 2; u_2 = 8; u_3 = 14; u_4 = 20; u_5 = 26$

Ta có: $u_n - u_{n-1} = 6n - 4 - [6(n - 1) - 4] = 6 \forall n \geq 2$

Suy ra dãy số là cấp số cộng có $u_1 = 2$ công sai $d = 6$

Số hạng tổng quát: $u_n = 2 + 6(n - 1)$

c) $u_1 = 2; u_2 = 4; u_3 = 7; u_4 = 11; u_5 = 16$

Ta có: $u_2 - u_1 = 2 \neq u_3 - u_2 = 3$

Suy ra đây không phải cấp số cộng.

d) $u_1 = 2; u_2 = 5; u_3 = 8; u_4 = 11; u_5 = 14$

Ta có: $u_n - u_{n-1} = 3$

Suy ra đây là dãy cấp số cộng có $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$

Số hạng tổng quát: $u_n = 2 + 3(n - 1)$

Câu 28: Một cấp số cộng có số hạng thứ 5 bằng 18 và số hạng thứ 12 bằng 32. Tìm số hạng thứ 50 của cấp số cộng này.

Lời giải

Gọi số hạng tổng quát của dãy là: $u_n = u_1 + (n - 1)d$

Ta có: $u_5 = u_1 + 4d = 18; u_{12} = u_1 + 11d = 32$

Suy ra $u_1 = 10, d = 2$

Số hạng tổng quát: $u_n = 10 + 2(n - 1)$

Số hạng thứ 50 là: $u_{50} = 108$

Câu 29: Một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 5 và công sai bằng 2. Hỏi phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để có tổng bằng 2 700?

Lời giải

Gọi n là số các số hạng đầu cần lấy tổng, ta có:

$$2700 = S_n = \frac{n}{2} [2 \times 5 + (n - 1) \times 2] = \frac{n}{2} (8 + 2n)$$

Do đó $4n + n^2 - 2700 = 0$. Giải phương trình bậc hai này ta được $n = -54$ (loại) hoặc $n = 50$

Vậy phải lấy 50 số hạng đầu.

Câu 30: Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá của chiếc xe sau n năm là: $u_n = 680 - 55(n - 1)$

Vậy sau 5 năm sử dụng giá của chiếc xe là: $u_5 = 680 - 55(5 - 1) = 460$ (triệu đồng)

Câu 31: Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 3$. Gọi n là số các số hạng đầu của cấp số cộng cần lấy tổng, ta có:

$$870 = S_n = \frac{n}{2} [2 \times 15 + (n - 1) \times 3] = \frac{n}{2} (27 + 3n)$$

Do đó $27n + 3n^2 - 1740 = 0$, suy ra $n = 20, n = -29$ (loại)

Vậy cần phải thiết kế 20 hàng ghế

Câu 32: Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố vào năm 2030.

Lời giải

Dân số mỗi năm của thành phố lập thành cấp số cộng có $u_1 = 1200$, công sai $d = 30$

Dân số mỗi năm có dạng tổng quát là: $u_n = 1200 + 30(n-1)$

Dân số của năm 2030 tức $n = 11$ $u_{11} = 1200 + 30(11-1) = 1500$ (nghìn người)

Bài tập trắc nghiệm

1. Nhận biết

Câu 33: Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

A. $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \dots$

B. $15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; \dots$

C. $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}; \dots$

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}; \dots$

Câu 34: Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = -\frac{1}{2}$, công sai $d = \frac{1}{2}$. Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là:

A. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1$.

B. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

Câu 35: Viết ba số hạng xen giữa các số 2 và 22 để được một cấp số cộng có năm số hạng.

A. 7; 12; 17,

B. 6; 10; 14.

C. 8; 13; 18.

D. 6; 12; 18.

Câu 36: Cho hai số -3 và 23 . Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n .

A. $n = 12$.

B. $n = 13$.

C. $n = 14$.

D. $n = 15$.

Câu 37: Biết các số C_n^1 ; C_n^2 ; C_n^3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n > 3$. Tìm n .

A. $n = 5$.

B. $n = 7$.

C. $n = 9$.

D. $n = 11$.

Câu 38: Tìm công sai d của cấp số cộng hữu hạn biết số hạng đầu $u_1 = 10$ và số hạng cuối $u_{21} = 50$.

A. $d = 3$.

B. $d = 2$.

C. $d = 4$.

D. $d = -2$.

Câu 39: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4; u_2 = 1$. Giá trị của u_{10} bằng

A. $u_{10} = -31$.

B. $u_{10} = -23$.

C. $u_{10} = -20$.

D. $u_{10} = 15$.

Câu 40: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -0,1; d = 0,1$. Số hạng thứ 7 của cấp số cộng này là

A. 1,6..

B. 6..

C. 0,5..

D. 0,6.

Câu 41: Cho cấp số cộng (u_n) với $u_n = 3 - 2n$ thì S_{60} bằng

A. -6960 .

B. -117 .

C. đáp án khác.

D. -116 .

Câu 42: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_1 = 4, u_3 = 10$. Công sai của cấp số cộng bằng

A. 6..

B. -6 ..

C. 3..

D. -3 .

2. Thông hiểu

- Câu 43:** Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_1 = 4, u_3 = 10$. Công sai của cấp số cộng bằng
A. 6.. B. -6.. C. 3.. D. -3.
- Câu 44:** Cho cấp số cộng có $u_1 = -3, d = 4$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau
A. $u_5 = 15$. B. $u_4 = 8$. C. $u_3 = 5$. D. $u_2 = 2$.
- Câu 45:** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1, d = 4$. Tìm số hạng u_{12} .
A. $u_{12} = 31$. B. $u_{12} = 13$. C. $u_{12} = 45$. D. $u_{12} = 17$.
- Câu 46:** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2, d = 3$. Số hạng thứ 7 của cấp số cộng này là
A. 20. B. 21. C. 19. D. 23.
- Câu 47:** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$ và công sai $d = 3$. Số 100 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng?
A. 15. B. 20. C. 35. D. 36.
- Câu 48:** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_5 = 11$ và $u_6 = 14$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng
A. -6. B. 3. C. 12. D. 6.
- Câu 49:** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên k sao cho $C_{14}^k, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Tính tổng tất cả các phần tử của S .
A. 8. B. 6. C. 10. D. 12.
- Câu 50:** Phương trình $x^3 + ax + b = 0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi
A. $b = 0, a < 0$. B. $b = 0, a = 1$. C. $b = 1, a = -2$. D. $b = -2, a = 1$.
- Câu 51:** Bốn số $x, -2, y, 6$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $x = -6; y = 3$. B. $x = -5; y = 3$. C. $x = -6; y = 2$. D. $x = -5; y = 2$.
- Câu 52:** Tìm tất cả các số thực x để ba số $x^2, x^2 + 1, 3x$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng?
A. $x = 2$. B. $x \in \{1, 2\}$. C. $x = 0$. D. $x \in \{2, 3\}$.

3. Vận dụng

- Câu 53:** Cho phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$. Tìm m để phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.
A. 16. B. 13. C. 12. D. 11.
- Câu 54:** Có tất cả bao nhiêu bộ số nguyên dương (n, k) biết $n < 20$ và các số $C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1}$ theo thứ tự đó là số hạng thứ nhất, thứ ba, thứ năm của một cấp số cộng.
A. 4. B. 2. C. 1. D. $z_1 = a + 5i$.
- Câu 55:** Cho cấp số cộng $(u_n), n \in \mathbb{N}^*$ có số hạng tổng quát $u_n = 1 - 3n$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng
A. -59048. B. -59049. C. -155. D. -310.
- Câu 56:** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12, u_{14} = 18$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.
A. $S_{16} = -24$. B. $S_{16} = 26$. C. $S_{16} = -25$. D. $S_{16} = 24$.
- Câu 57:** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_n = 3 - 2n$ thì S_{60} bằng
A. -6960. B. -117. C. -3840. D. -116.
- Câu 58:** Cho cấp số cộng (u_n) có $\begin{cases} u_2 + u_5 = 42 \\ u_4 + u_9 = 66 \end{cases}$. Tổng 346 số hạng đầu tiên của cấp số cộng trên là:

A. $S_{346} = 422554$. B. $S_{346} = 242546$. C. $S_{346} = 156224$. D. $S_{346} = -203558$.

Câu 59: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$, $u_{20} = 60$. Tổng S_{20} của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là

A. $S_{20} = 600$. B. $S_{20} = 60$. C. $S_{20} = 250$. D. $S_{20} = 500$.

Câu 60: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{2013} + u_6 = 1000$. Tổng 2018 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

A. 1009000. B. 100800. C. 1008000. D. 100900.

Câu 61: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$ và $u_{20} = 60$. Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

A. $S_{20} = 500$. B. $S_{20} = 250$. C. $S_{20} = 60$. D. $S_{20} = 600$.

Câu 62: Cho cấp số cộng (u_n) . Gọi $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Biết rằng $\frac{S_p}{S_q} = \frac{p^2}{q^2}$ với $p \neq q$,

$p, q \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức $\frac{u_{2017}}{u_{2018}}$.

A. $\frac{4031}{4035}$. B. $\frac{4031}{4033}$. C. $\frac{4033}{4035}$. D. $\frac{4034}{4035}$.

1. Nhận biết

Câu 33: Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

A. $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \dots$

B. $15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; \dots$

C. $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}; \dots$

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}; \dots$

Lời giải

Chọn C

Chỉ cần tồn tại hai cặp số hạng liên tiếp của dãy số có hiệu khác nhau: $u_{m+1} - u_m \neq u_{k+1} - u_k$ thì ta kết luận ngay dãy số đó không phải là cấp số cộng.

Xét đáp án A: $\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \dots$ $\frac{1}{3} \quad u_2 \quad u_1 \quad u_3 \quad u_2 \quad u_4 \quad u_3 \quad \dots$ loại A

Xét đáp án B:

$15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; \dots$ $3\sqrt{3} \quad u_2 \quad u_1 \quad u_3 \quad u_2 \quad u_4 \quad u_3 \quad \dots$ loại B

Xét đáp án C: $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}; \dots$ $\frac{1}{5} \quad u_2 - u_1 / u_3 \quad u_2 \quad \frac{2}{5}$ **Chọn C**

Xét đáp án D: $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}; \dots$ $\frac{\sqrt{3}}{3} \quad u_2 \quad u_1 \quad u_3 \quad u_2 \quad u_4 \quad u_3 \quad \dots$ loại D

Câu 34: Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = -\frac{1}{2}$, công sai $d = \frac{1}{2}$. Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là:

A. $-\frac{1}{2}; 0; 1; \frac{1}{2}; 1$. B. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}$. D. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta dùng công thức tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d = -\frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{2} = -1 + \frac{n}{2}$, hoặc $u_{n+1} = u_n + d = u_n + \frac{1}{2}$ để tính các số hạng của một cấp số cộng.

$$u_1 = -\frac{1}{2}$$

$$u_2 = u_1 + d = 0$$

Ta có $u_1 \quad \frac{1}{2}; d \quad \frac{1}{2} \quad u_3 \quad u_2 \quad d \quad \frac{1}{2}$

$$u_4 = u_3 + d = 1$$

$$u_5 = u_4 + d = \frac{3}{2}$$

Nhận xét: Dùng chức năng “lập” của MTCT để tính:

Nhập: $X = X + \frac{1}{2}$ (nhập $X = X + d$).

Bấm CALC: nhập $-\frac{1}{2}$ (nhập u_1).

Để tính 5 số hạng đầu ta bấm dấu “=” liên tiếp để ra kết quả 4 lần nữa!

Câu 35: Viết ba số hạng xen giữa các số 2 và 22 để được một cấp số cộng có năm số hạng.

A. 7; 12; 17,

B. 6; 10; 14.

C. 8; 13; 18.

D. 6; 12; 18.

Lời giải

Chọn A

Giữa u_2 và u_{22} có thêm ba số hạng nữa lập thành cấp số cộng, xem như ta có một cấp số cộng có 5 số hạng với $u_1 = 2; u_5 = 22$; ta cần tìm u_2, u_3, u_4 .

$$\begin{array}{l} \text{Ta có } u_5 - u_1 = 4d \Rightarrow d = \frac{u_5 - u_1}{4} = \frac{22 - 2}{4} = 5 \\ \begin{array}{l} u_2 = u_1 + d = 7 \\ u_3 = u_1 + 2d = 12 \\ u_4 = u_1 + 3d = 17 \end{array} \end{array}$$

Câu 36: Cho hai số -3 và 23 . Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n .

- A.** $n = 12$. **B.** $n = 13$. **C.** $n = 14$. **D.** $n = 15$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết thì ta được một cấp số cộng có $n + 2$ số hạng với $u_1 = -3, u_{n+2} = 23$.

$$\text{Khi đó } u_{n+2} - u_1 = (n + 1)d \Rightarrow n + 1 = \frac{u_{n+2} - u_1}{d} = \frac{23 - (-3)}{2} = 13 \Rightarrow n = 12 \quad \text{A}$$

Câu 37: Biết các số $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n > 3$. Tìm n .

- A.** $n = 5$. **B.** $n = 7$. **C.** $n = 9$. **D.** $n = 11$.

Lời giải

Chọn B

Ba số $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng nên

$$\begin{array}{l} u_1 + u_3 = 2u_2 \Rightarrow C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2 \Rightarrow (n-1)n + n = 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\ \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = n^2 - 9n + 14 \Rightarrow n = 7 \end{array}$$

Nhận xét: Nếu u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì ta có $u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k$.

Câu 38: Tìm công sai d của cấp số cộng hữu hạn biết số hạng đầu $u_1 = 10$ và số hạng cuối $u_{21} = 50$.

- A.** $d = 3$. **B.** $d = 2$. **C.** $d = 4$. **D.** $d = -2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } u_{21} = u_1 + 20d \Rightarrow d = \frac{u_{21} - u_1}{20} = \frac{50 - 10}{20} = 2.$$

Câu 39: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4; u_2 = 1$. Giá trị của u_{10} bằng

- A.** $u_{10} = -31$. **B.** $u_{10} = -23$. **C.** $u_{10} = -20$. **D.** $u_{10} = 15$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } u_2 = u_1 + d \Rightarrow d = -3$$

$$\text{Khi đó } u_{10} = u_1 + 9d \Leftrightarrow u_{10} = 4 + 9 \cdot (-3) \Leftrightarrow u_{10} = -23.$$

Câu 40: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -0,1; d = 0,1$. Số hạng thứ 7 của cấp số cộng này là

A. 1, 6..

B. 6..

C. 0, 5..

D. 0, 6.

Lời giải

Chọn C

$$u_7 = -0,1 + 6.0,1 = 0,5.$$

Câu 41: Cho cấp số cộng (u_n) với $u_n = 3 - 2n$ thì S_{60} bằng

A. -6960.

B. -117.

C. đáp án khác.

D. -116.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_{n+1} = 1 - 2n$, Ta có $u_{n+1} - u_n = -2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) là cấp số cộng có

$$u_1 = 1 \text{ và công sai } d = -2. \text{ Vậy } S_{60} = \frac{60}{2}(2u_1 + 59d) = -3840.$$

Câu 42: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_1 = 4, u_3 = 10$. Công sai của cấp số cộng bằng

A. 6..

B. -6..

C. 3..

D. -3.

Lời giải

Chọn C

Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n) .

$$\text{Ta có } u_1 = 4, u_3 = 10 \text{ suy ra } \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_1 + 2d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Vậy công sai của cấp số cộng (u_n) là $d = 3$.

2. Thông hiểu

Câu 43: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_1 = 4, u_3 = 10$. Công sai của cấp số cộng bằng

A. 6..

B. -6..

C. 3..

D. -3.

Lời giải

Chọn C

Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n) .

$$\text{Ta có } u_1 = 4, u_3 = 10 \text{ suy ra } \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_1 + 2d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Vậy công sai của cấp số cộng (u_n) là $d = 3$.

Câu 44: Cho cấp số cộng có $u_1 = -3, d = 4$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $u_5 = 15$.

B. $u_4 = 8$.

C. $u_3 = 5$.

D. $u_2 = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow u_3 = u_1 + 2d = -3 + 2.4 = 5.$$

Câu 45: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1, d = 4$. Tìm số hạng u_{12} .

A. $u_{12} = 31$.

B. $u_{12} = 13$.

C. $u_{12} = 45$.

D. $u_{12} = 17$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_{12} = u_1 + 11d = 45$.

Câu 46: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2$, $d = 3$. Số hạng thứ 7 của cấp số cộng này là

- A. 20. B. 21. C. 19. D. 23.

Lời giải

Chọn A

Ta có: số hạng tổng quát của cấp số cộng là:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow u_7 = 2 + 6 \cdot 3 = 20.$$

Câu 47: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$ và công sai $d = 3$. Số 100 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng?

- A. 15. B. 20. C. 35. D. 36.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 100 = -5 + (n-1) \cdot 3 \Leftrightarrow 100 = 3n - 8 \Leftrightarrow n = 36.$$

Câu 48: Cho cấp số cộng (u_n) với $u_5 = 11$ và $u_6 = 14$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

- A. -6. B. 3. C. 12. D. 6.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } u_6 = u_5 + d \Leftrightarrow 14 = 11 + d \Rightarrow d = 3.$$

Câu 49: Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên k sao cho $C_{14}^k, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. 8. B. 6. C. 10. D. 12.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1} \Leftrightarrow \frac{14!}{k!(14-k)!} + \frac{14!}{(k+2)!(12-k)!} = 2 \frac{14!}{(k+1)!(13-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(14-k)(13-k)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{(k+1)(13-k)}$$

$$\Leftrightarrow (k+1)(k+2) + (14-k)(13-k) = 2(k+2)(14-k)$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 12k + 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 8 \\ k = 4 \end{cases}$$

Vậy chọn.

Câu 50: Phương trình $x^3 + ax + b = 0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

- A. $b = 0, a < 0$. B. $b = 0, a = 1$. C. $b = 1, a = -2$. D. $b = -2, a = 1$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử phương trình có ba nghiệm lập thành cấp số cộng khi đó ta có:

$$x_1 + x_3 = 2x_2, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0.$$

Thay $x_2 = 0$ vào phương trình $b = 0$. Ta có: $b = 0 \Rightarrow x^3 + ax = 0 \Rightarrow a < 0$.

$\Rightarrow b = 0, a < 0$ thỏa mãn.

Câu 51: Bốn số $x, -2, y, 6$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x = -6; y = 3$. **B.** $x = -5; y = 3$. **C.** $x = -6; y = 2$. **D.** $x = -5; y = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có bốn số $x, -2, y, 6$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ 2y = -2 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Câu 52: Tìm tất cả các số thực x để ba số $x^2, x^2 + 1, 3x$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng?

A. $x = 2$. **B.** $x \in \{1, 2\}$. **C.** $x = 0$. **D.** $x \in \{2, 3\}$.

Lời giải

Chọn B

Do ba số $x^2, x^2 + 1, 3x$ lập thành cấp số cộng nên $2(x^2 + 1) = x^2 + 3x$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy $x \in \{1, 2\}$.

3. Vận dụng

Câu 53: Cho phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$. Tìm m để phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

A. 16. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Giả sử phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Khi đó:

$$x_1 + x_3 = 2x_2; x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow m = 11$$

Khi đó ta có phương trình: $x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{12}; x_2 = 1;$

$$x_3 = 1 + \sqrt{12}.$$

Ba nghiệm này lập thành cấp số cộng.

Vậy $m = 11$.

Câu 54: Có tất cả bao nhiêu bộ số nguyên dương (n, k) biết $n < 20$ và các số $C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1}$ theo thứ tự đó là số hạng thứ nhất, thứ ba, thứ năm của một cấp số cộng.

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $z_1 = a + 5i$.

Lời giải

Chọn A

Các số $C_n^{k-1}, z_2 = b, C_n^{k+1}$ theo thứ tự đó là số hạng thứ nhất, thứ ba, thứ năm của một cấp số cộng nên ta có: $C_n^k - C_n^{k-1} = C_n^{k+1} - C_n^k$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = 2 \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n-k+1)(n-k)} = \frac{2}{k(n-k)} \Leftrightarrow (n-2k)^2 = n+2.$$

Do $n < 20 \Rightarrow n+2 < 22$ mà $n+2$ là số chính phương, n, k nguyên dương nên có các trường hợp sau:

$$+ n+2=4 \Rightarrow n=2; k=2.$$

$$+ n+2=9 \Rightarrow n=7; k=2 \text{ hoặc } n=7; k=5.$$

$$+ n+2=16 \Rightarrow n=14; k=5 \text{ hoặc } n=14; k=9.$$

Mà $k+1 \leq n$ nên chỉ có 4 bộ thỏa mãn.

Câu 55: Cho cấp số cộng (u_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ có số hạng tổng quát $u_n = 1 - 3n$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng

- A.** -59048. **B.** -59049. **C.** -155. **D.** -310.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } u_n = 1 - 3n \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 - 3 \cdot 1 = -2 \\ u_{10} = 1 - 3 \cdot 10 = -29 \end{cases}.$$

$$\text{Áp dụng công thức: } S = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{10(u_1 + u_{10})}{2} = -155.$$

Câu 56: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.

- A.** $S_{16} = -24$. **B.** $S_{16} = 26$. **C.** $S_{16} = -25$. **D.** $S_{16} = 24$.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó, } S_{16} = \frac{(2u_1 + 15d) \cdot 16}{2} = 8(-42 + 45) = 24.$$

Câu 57: Cho cấp số cộng (u_n) với $u_n = 3 - 2n$ thì S_{60} bằng

- A.** -6960. **B.** -117. **C.** -3840. **D.** -116.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_{n+1} = 1 - 2n$, Ta có $u_{n+1} - u_n = -2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) là cấp số cộng có

$$u_1 = 1 \text{ và công sai } d = -2. \text{ Vậy } S_{60} = \frac{60}{2}(2u_1 + 59d) = -3840.$$

Câu 58: Cho cấp số cộng (u_n) có $\begin{cases} u_2 + u_5 = 42 \\ u_4 + u_9 = 66 \end{cases}$. Tổng 346 số hạng đầu tiên của cấp số cộng trên là:

- A.** $S_{346} = 422554$. **B.** $S_{346} = 242546$.

C. $S_{346} = 156224$. D. $S_{346} = -203558$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} u_2 + u_5 = 42 \\ u_4 + u_9 = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 5d = 42 \\ 2u_1 + 11d = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 11 \\ d = 4 \end{cases}$

Và $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2} \Rightarrow S_{346} = 346 \cdot 11 + \frac{346 \cdot 345 \cdot 4}{2} = 242546$.

Câu 59: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$, $u_{20} = 60$. Tổng S_{20} của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là

A. $S_{20} = 600$. B. $S_{20} = 60$. C. $S_{20} = 250$. D. $S_{20} = 500$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases} u_5 = -15 \\ u_{20} = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = -15 \\ u_1 + 19d = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -35 \\ d = 5 \end{cases}$.

$\Rightarrow S_{20} = 20u_1 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot d = 20 \cdot (-35) + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 5 = 250$.

Câu 60: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{2013} + u_6 = 1000$. Tổng 2018 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

A. 1009000. B. 100800. C. 1008000. D. 100900.

Lời giải

Chọn A

Gọi d là công sai của cấp số cộng.

Khi đó: $u_{2013} + u_6 = 1000 \Leftrightarrow u_1 + 2012d + u_1 + 5d = 1000 \Leftrightarrow 2u_1 + 2017d = 1000$.

Ta có: $S_{2018} = 2018u_1 + \frac{2017 \cdot 2018}{2}d = 1009 \cdot (2u_1 + 2017d) = 1009000$.

Câu 61: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$ và $u_{20} = 60$. Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

A. $S_{20} = 500$. B. $S_{20} = 250$. C. $S_{20} = 60$. D. $S_{20} = 600$.

Lời giải

Chọn B

Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n) , ta có $\begin{cases} u_5 = -15 \\ u_{20} = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = -15 \\ u_1 + 19d = 60 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -35 \\ d = 5 \end{cases}$.

Khi đó, tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

$S_{20} = \frac{20}{2}(u_1 + u_{20}) = 250$.

Câu 62: Cho cấp số cộng (u_n) . Gọi $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Biết rằng $\frac{S_p}{S_q} = \frac{p^2}{q^2}$ với $p \neq q$,

$p, q \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức $\frac{u_{2017}}{u_{2018}}$.

- A. $\frac{4031}{4035}$. B. $\frac{4031}{4033}$. C. $\frac{4033}{4035}$. D. $\frac{4034}{4035}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi d là công sai của cấp số cộng.

$$\text{Ta có: } \frac{S_p}{S_q} = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow \frac{(u_1 + u_p)p}{(u_1 + u_q)q} = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_p}{u_1 + u_q} = \frac{p}{q}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \frac{u_1 + u_{2018}}{u_1 + u_{2017}} &= \frac{2018}{2017} \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{2017} + d}{u_1 + u_{2017}} = \frac{2018}{2017} \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{d}{u_1 + u_{2017}} &= \frac{2018}{2017} \Leftrightarrow \frac{d}{u_1 + u_1 + 2016d} = \frac{1}{2017} \\ \Leftrightarrow d &= 2u_1. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{u_{2017}}{u_{2018}} = \frac{u_1 + 2016 \cdot (2u_1)}{u_1 + 2017 \cdot (2u_1)} = \frac{4033}{4035}.$$

Câu 62: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được

tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

- a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?
b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải

+) Theo phương án 1: Gọi (u_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 1 qua mỗi năm.

Dãy số u_n lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 120$ và công sai $d = 18$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n = 120 + (n-1) \cdot 18$.

+) Theo phương án 2: Gọi (v_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 2 qua từng quý.

Dãy số (v_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 24$ và công sai $d = 1,8$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là $v_n = 24 + (n-1) \cdot 1,8$.

a) Khi kí hợp đồng 3 năm tương đương với 12 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_3 = 120 + (3-1) \cdot 18 = 156$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm là:

$$S_3 = \frac{3 \cdot (120 + 156)}{2} = 414 \text{ (triệu đồng)}.$$

+) Theo phương án 2: $u_{12} = 24 + (12-1) \cdot 1,8 = 43,8$.

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm tương ứng với 12 quý là:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (24 + 43,8)}{2} = 406,8 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 3 năm thì nên theo phương án 1.

b) Khi kí hợp đồng 10 năm tương đương với 40 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_{10} = 120 + (10 - 1) \cdot 18 = 282$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm là: $S_{10} = \frac{10 \cdot (120 + 282)}{2} = 2010$ (triệu đồng).

+) Theo phương án 2: $u_{40} = 24 + (40 - 1) \cdot 1,8 = 94,2$ (triệu đồng).

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm tương ứng với 40 quý là:

$$S_{12} = \frac{40 \cdot (24 + 94,2)}{2} = 2364 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 10 năm thì nên theo phương án 2.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Các em sử dụng điện thoại vào phần mềm AZOTA để làm bài theo hai cách:

- Cách 1: Vào theo đường link : <https://azota.vn/de-thi/3lbr2e>
- Cách 2 : Quét mã QR

