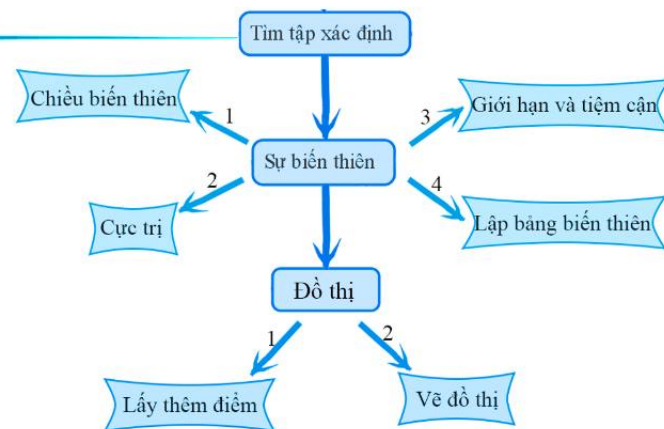

SỞ ĐỒ TƯ DUY KIẾN THỨC CẦN NHỚ CHO KÌ THI THPT QUỐC GIA MÔN TOÁN

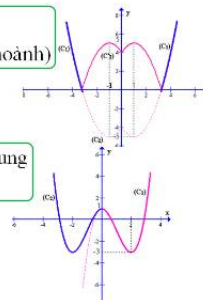
KHẢO SÁT HÀM SỐ

CÁC BƯỚC KHẢO SÁT HÀM SỐ



LIÊN HỆ ĐỒ THỊ HÀM $y = f(x)$

- Với hàm $y = |f(x)|$
 - Giữ phần đồ thị $y = f(x)$ trên trục hoành (kể cả điểm thuộc trục hoành)
 - Lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ dưới trục hoành qua trục hoành
- Với hàm $y = f(|x|)$
 - Giữ phần đồ thị $y = f(x)$ bên phải trục tung (kể cả điểm thuộc trục tung)
 - Lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ bên phải trục tung qua trục tung



$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

$$\Delta_y > 0$$

$$a < 0$$

$$a > 0$$

$$\Delta_y = 0$$

$$a < 0$$

$$a > 0$$

$$\Delta_y < 0$$

$$a < 0$$

$$a > 0$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0)$$

$$ad - bc > 0$$

$$ad - bc < 0$$

$$y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$$

$$ab < 0$$

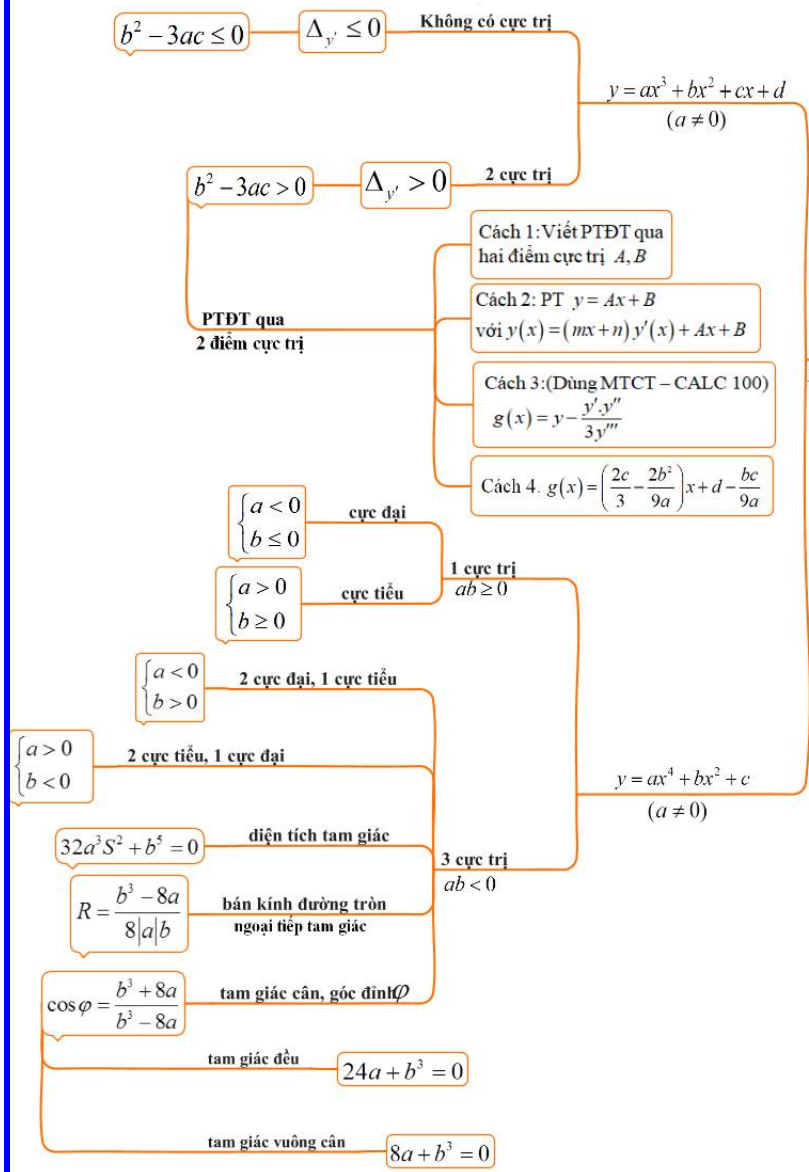
$$a > 0$$

$$a < 0$$

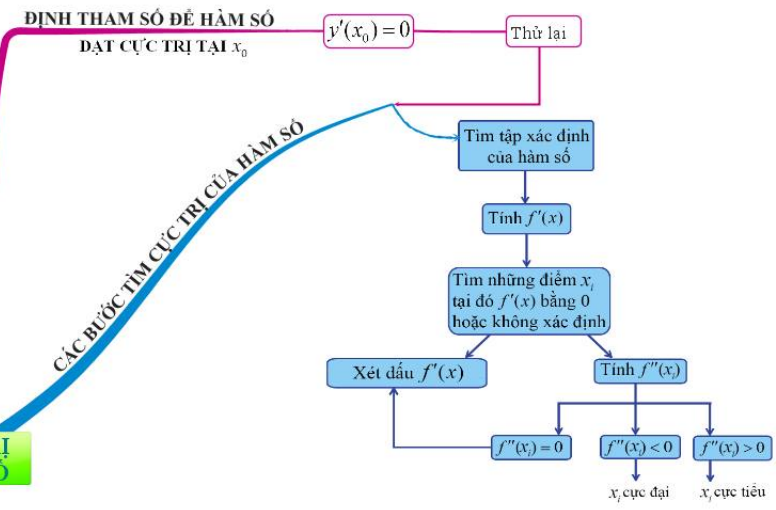
$$ab \geq 0$$

$$a > 0$$

$$a < 0$$

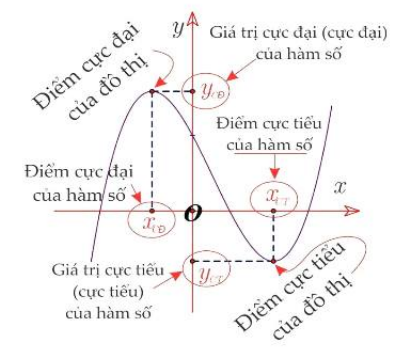


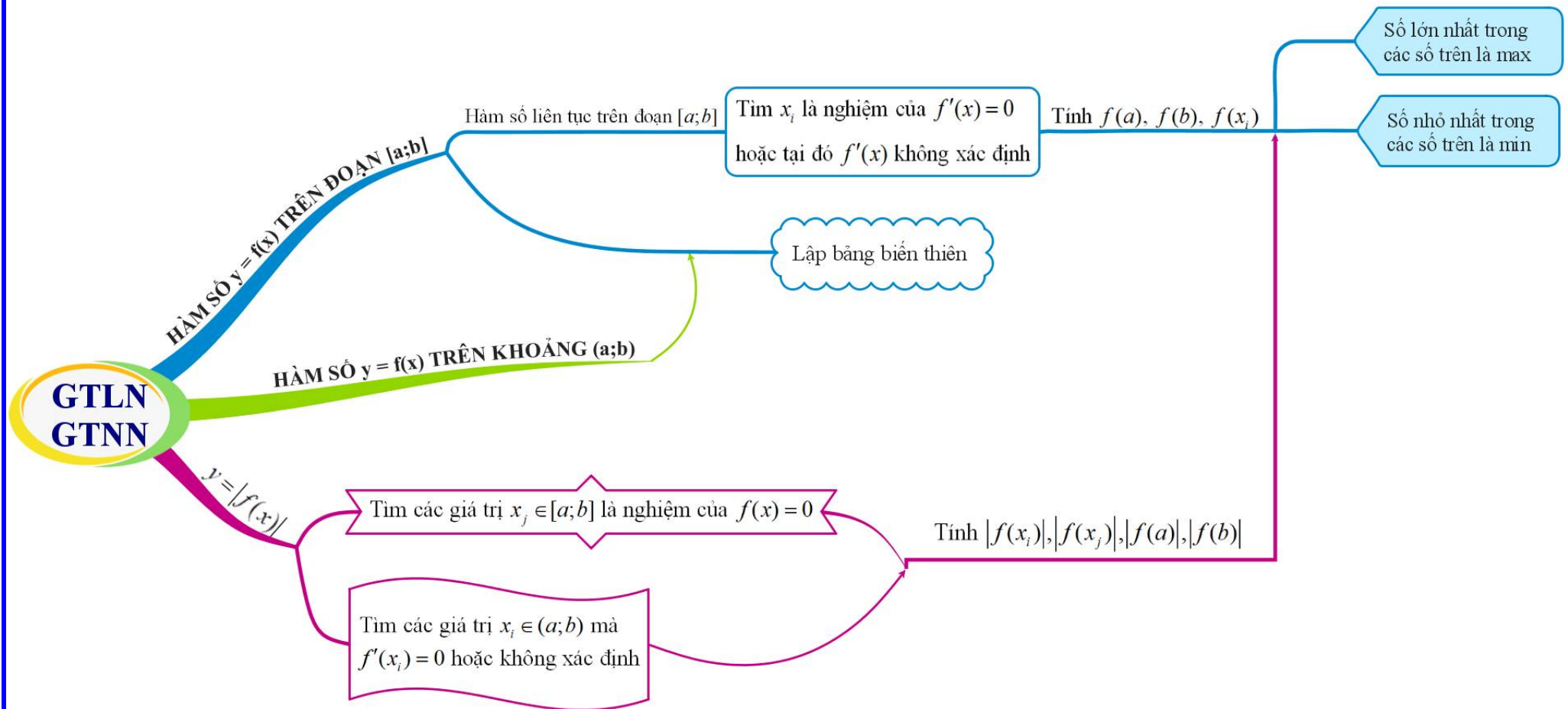
CỰC TRỊ HÀM SỐ



x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		f_{ct}	

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		f_{ct}	



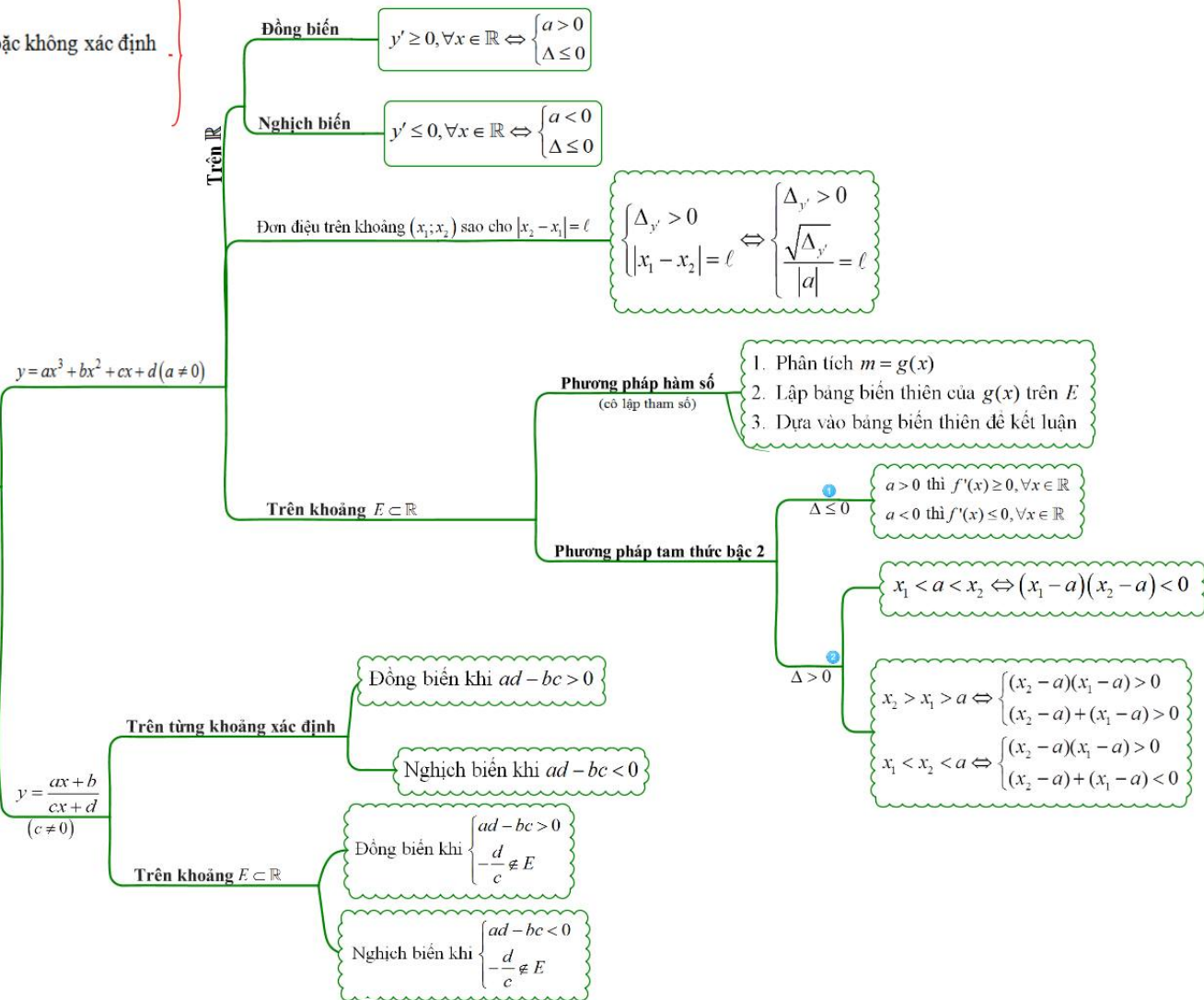


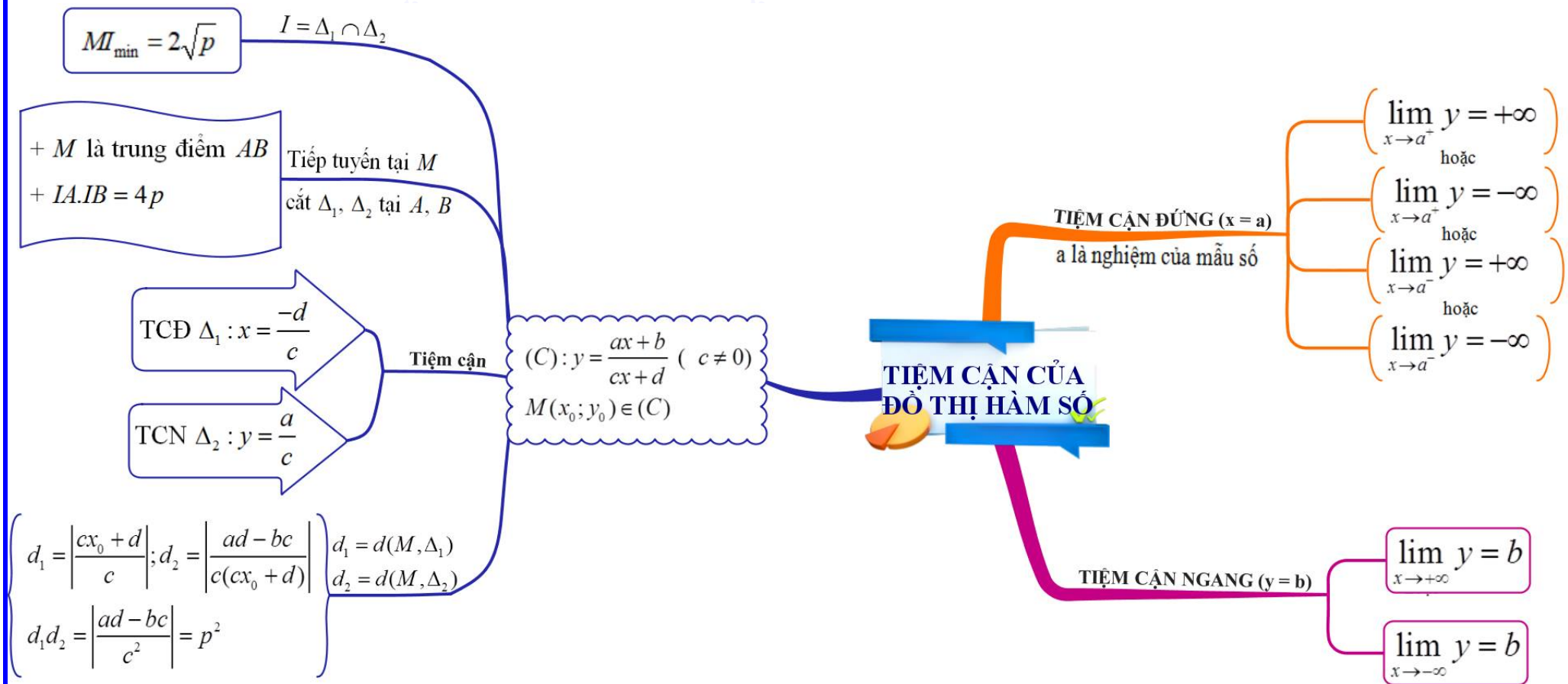
ĐƠN ĐIỀU

TÌM THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỀU

CÁC BƯỚC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1. Tìm tập xác định
2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không xác định
3. Lập bảng biến thiên
4. Kết luận





TIẾP TUYẾN CỦA ĐTHS

HỆ SỐ GÓC k CHO TRƯỚC

$$\begin{aligned} d_1 &: y = k_1x + b_1 \\ d_2 &: y = k_2x + b_2 \end{aligned}$$

$$d_1 \parallel d_2$$

$$\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

$$d_1 \perp d_2$$

$$k_1 k_2 = -1$$

- Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó x_0 thỏa mãn: $f'(x_0) = k (*)$
- Giải (*) tìm x_0 . Suy ra $y_0 = f(x_0)$

TIẾP TUYẾN TẠI ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ HÀM SỐ

$M(x_0; y_0)$

- Tính $f'(x)$. Hệ số góc là $f'(x_0)$
- Pt tiếp tuyến tại M là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

TIẾP TUYẾN ĐI QUA ĐIỂM $A(a; b)$

- Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm
- Tính y' . Pt tiếp tuyến là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$
- $A(a; b)$ thuộc tiếp tuyến $\Rightarrow b = f'(x_0)(a - x_0) + y_0 (*)$
- Giải (*) tìm được x_0 , suy ra pt tiếp tuyến

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM BẬC 3

HÀM BẬC 3 CẮT TRỤC HOÀNH TẠI 3 ĐIỂM

PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng bảng biến thiên / đồ thị

Phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x) = 0$

Cô lập m: $m = f(x)$

Lập bảng biến thiên của $f(x)$

Dựa vào bảng biến thiên để kết luận

Pt hoành độ giao điểm $F(x) = 0$

Nhẩm nghiệm

Nhẩm nghiệm

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow (x - x_0) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Dựa vào yêu cầu đề bài tìm điều kiện của pt bậc 2 $g(x) = 0$

Cực trị

PTHĐGD $F(x) = 0$

Xét hàm số $y = F(x)$

1 giao điểm

$$\Delta_{y'} \leq 0$$

$$\Delta_{y'} > 0$$

$$y_{cd} \cdot y_{ct} > 0$$

2 giao điểm

$$\Delta_{y'} > 0$$

$$y_{cd} \cdot y_{ct} = 0$$

3 giao điểm

$$\Delta_{y'} > 0$$

$$y_{cd} \cdot y_{ct} < 0$$

LẬP THÀNH CẤP SỐ CỘNG

$x_0 = -\frac{b}{3a}$ là 1 nghiệm của phương trình $y = 0$

Thử lại

SỰ TƯƠNG GIAO CỦA CÁC ĐỒ THỊ

TÌM TỌA ĐỘ GIAO ĐIỂM

$$f(x) = g(x)$$

$$(C): y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ \& } (d): y = px+q$$

Phương trình hoành độ giao điểm $F(x, m) = 0$ (1)
(pt bậc 2 ẩn x, tham số m)

2 giao điểm

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x \neq -\frac{d}{c} \end{cases}$$

2 giao điểm thuộc cùng 1 nhánh của (C)

nhánh phải

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{d}{c} < x_1 < x_2 \end{cases}$$

nhánh trái

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < x_2 < -\frac{d}{c} \end{cases}$$

2 giao điểm thuộc 2 nhánh của (C)

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < -\frac{d}{c} < x_2 \end{cases}$$

2 giao điểm thỏa điều kiện hình học

$$\Delta > 0$$

Lập phương trình ẩn m

Dựa vào giả thiết

Định lý Vi-ét

Công thức hình học

Nhẩm nghiệm

$$F(x, m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Dựa vào giả thiết
xử lý pt bậc 2 $g(x) = 0$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{ (} a \neq 0 \text{)}$$

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$)

1 giao điểm

$$\begin{cases} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{cases}$$

2 giao điểm

$$\begin{cases} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{cases}$$

3 giao điểm

$$0 = t_1 < t_2$$

4 giao điểm

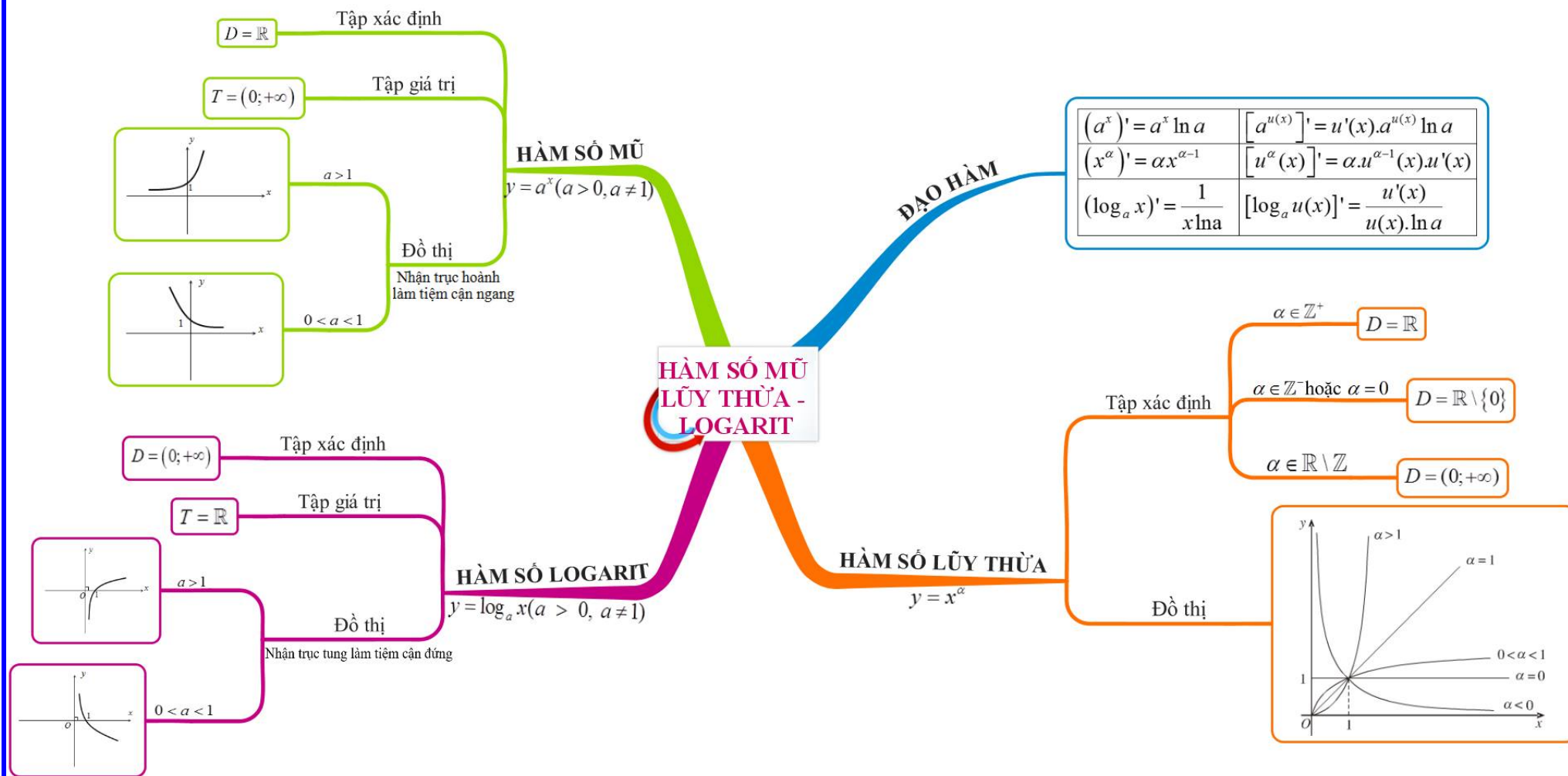
$$0 < t_1 < t_2$$

4 hoành độ giao điểm lập thành CSC

$$t_2 = 9t_1$$

Định lý Vi-ét

Lập phương trình ẩn m



$\log_a 1 = 0 (0 < a \neq 1)$	$\log_{a^\alpha} b^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a b$
$\log_a a = 1 (0 < a \neq 1)$	$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$
$\log_a a^\alpha = \alpha (0 < a \neq 1)$	$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$
$\log_{a^\alpha} a = \frac{1}{\alpha} (0 < a \neq 1)$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
$\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ ($a, b > 0, a \neq 1$)	
$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b$	

LOGARIT

LŨY THỪA

Số mũ α	Cơ số a	Lũy thừa a^α
$\alpha = n \in \mathbb{N}^*$	$a \in \mathbb{R}$	$a^\alpha = a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n thừa số a)
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$
$\alpha = -n (n \in \mathbb{N}^*)$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\alpha = \frac{m}{n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a)$
$\alpha = \lim r_n (r_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = \lim a^{r_n}$

MŨ LŨY THỪA LOGARIT

BÀI TOÁN THỰC TẾ



Bài toán tăng trưởng dân số

$$X_m = X_n (1+r)^{m-n}$$

$$X_m = X_n \cdot e^{(m-n)r}$$



Bài toán lãi suất

Lãi đơn

$$T_n = A(1+nr)$$

Gửi 1 lần

$$T_n = A(1+r)^n$$

Lãi kép

Gửi định kì

$$T_n = \frac{A}{r}(1+r)[(1+r)^n - 1]$$

Trả góp

$$\text{Sau } n \text{ tháng, còn nợ: } T_n = A(1+r)^n - x \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\text{Đề sau } m \text{ tháng hết nợ, mỗi tháng trả } x = \frac{Ar(1+r)^m}{(1+r)^m - 1}$$

GIỚI HẠN ĐẶC BIỆT
LIMIT

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$



John Napier

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN MTCT

DẠNG KHÁC

DẠNG 1: TÌM $F(x)$ LÀ NGUYÊN HÀM CỦA $f(x)$

$$\frac{d}{dx}(F'(x)) \Big|_{x=A} = f(A)$$

Ví dụ: (Câu 23 đề thi minh họa THPT năm 2017)
 Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$
 A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$ **B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$**
 C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$ D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$
 Nhập biểu thức vào máy tính Casio: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}\right) \Big|_{x=1} = \sqrt{2 \cdot 1 - 1}$ và thử các đáp án.

DẠNG 3: TÌM $F(x)$ LÀ NGUYÊN HÀM CỦA $f(x)$ BIẾT $F(x_0) = c$

$$F(A) - c = \int_{x_0}^A f(x) dx$$

Ví dụ: Cho hàm số $f(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x^2}$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(1) = -4$ là:
 A. $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{2}{x^2} + 4$ **B. $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} - 4$**
 C. $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + 4$ D. $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{2}{x^2} - 4$
 Nhập biểu thức vào máy tính Casio: $\left(\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{2}{x^2} + 4\right) - 4 = \int_1^x \frac{(t^2+1)^2}{t^2} dt$ và thử để chọn đáp án.

Ví dụ: Cho hàm số $f(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x^2}$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(1) = -4$ là:
 A. $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{2}{x^2} + 4$ **B. $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} - 4$**
 C. $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + 4$ D. $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{2}{x^2} - 4$

DẠNG 2: TÍNH TÍCH PHÂN $\int_a^b f(x) dx$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Ví dụ: (Câu 25 đề thi minh họa THPT năm 2017)
 Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin x dx$.
 A. $I = -\frac{1}{4}\pi^4$ B. $I = -\pi^4$ C. $I = 0$ D. $I = -\frac{1}{4}$

Ví dụ: Biết $\int \frac{x-1}{x+3} dx = -1 + 4\ln \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) thì $2a + b$ là:
 A. 0 B. 14 C. 13 D. -20.
 Nhập biểu thức vào máy tính Casio: $\int \frac{x-1}{x+3} dx \rightarrow A$
 Do $A = -1 + 4\ln \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = e^{\frac{A+1}{4}} \Rightarrow a = e^{\frac{A+1}{4}} \cdot b = 0$ nên ta đi kết quả bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a - e^{\frac{A+1}{4}} b = 0 \\ 2a + b = k \end{cases}$$
 (với k lần lượt là các kết quả của bài toán).

Ví dụ: (Câu 26 đề thi minh họa THPT năm 2017)
 Biết $\int \frac{1}{x^2+1} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.
 A. $S = 6$ B. $S = 2$ C. $S = -2$ D. $S = 0$
 Nhập biểu thức vào máy tính Casio: $\int \frac{1}{x^2+1} dx \rightarrow A$
 Do $\int \frac{1}{x^2+1} dx = A = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5 = \ln(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c) \Rightarrow 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c = e^A$ nên tiếp tục
 $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c = e^A = \frac{15}{16} \Rightarrow 2^{-4} \cdot 3^1 \cdot 5^1 \Rightarrow a = -4; b = 1; c = 1$

Ví dụ: Giả sử hàm số $f(x) = (ax^2 - bx + c)e^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = x(1-x)e^{x^2}$.
 Tính tổng $T = a^2 + b^2 + 2c^2$, ta được:
 A. $T = -2$ B. $T = 3$ C. $T = 1$ D. $T = 4$.
 Nhập biểu thức vào máy tính Casio: $\int_0^1 x(1-x)e^{x^2} dx \rightarrow A; \int_0^1 x(1-x)e^{-x^2} dx \rightarrow B; \int_0^1 x(1-x)e^{-x^2} dx > C$

$$\int_0^1 x(1-x)e^{x^2} dx = f(1) - f(0) = c - (a+b+c)e^1 = A$$

$$\int_0^1 x(1-x)e^{-x^2} dx = f(1) - f(0) = (a+b+c)e^{-1} - c = B$$

$$\int_0^1 x(1-x)e^{-x^2} dx = f(2) - f(1) = (4a+2b+c)e^{-4} - (a+b+c)e^{-1} = C$$

 Giải hệ phương trình 3 ẩn, ta tìm được $a = 1; b = 1; c = 1$.
 (Chú ý: Giải tự luận có thể nhanh hơn)

Ví dụ: (Câu 25 đề thi minh họa THPT năm 2017)
 Cho $\int_0^1 f(x) dx = 16$. Tính $I = \int_0^2 f(2x) dx$
 A. $I = 32$ B. $I = 8$ C. $I = 16$ D. $I = 4$
 Chọn hàm $f(x) = \frac{16}{4-x}$ và nhập biểu thức vào máy tính Casio: $I = \int_0^2 4 dx$

$\int k \cdot dx = k \cdot x + C$	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int (ax+b)^n \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$
$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} e^{(ax+b)} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{kx+b} dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$

Bảng nguyên hàm

TÍCH PHÂN

Tìm phần

Đổi biến

Ứng dụng

Thể tích

Vật thể

Diện tích hình H

$$S_H = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$(H) \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \quad (a < b)$$

Khối tròn xoay

$$V_H = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

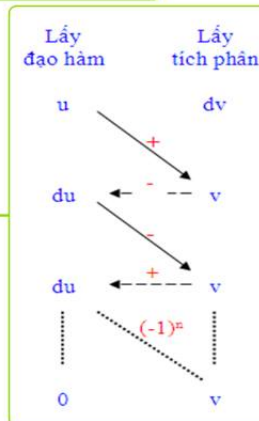
$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Thiết diện của vật thể

Nhất log - Nhì đa - Tam lượng - Tứ mũ

$$\int_a^b u \cdot dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

Qui tắc đường chéo



Dấu hiệu khi đổi biến (đặt t)

+ Gặp căn: đặt $t = \text{căn}$

+ Gặp ngược: đặt $t = \text{biểu thức trong ngược}$

+ Gặp mẫu: thường đặt $t = \text{mẫu}$

+ Gặp $\ln^n x$ đi kèm $\frac{1}{x} dx$: đặt $t = \ln x$

(nếu có $\ln x$ mà không có $\frac{1}{x}$ thì tìm phần).

Loại 1

Đặt t theo x

+ Gặp $\tan x$ đi kèm $\frac{1}{\cos^2 x}$: đặt $t = \tan x$;

+ Gặp $\cot x$ đi kèm $\frac{1}{\sin^2 x}$: đặt $t = \cot x$.

Loại 2

Lượng giác hóa

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad x = |a| \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx \quad x = |a| \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx \quad x = \frac{|a|}{\sin t}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \setminus \{0\}$$

TRỊ TUYỆT ĐỐI

TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT

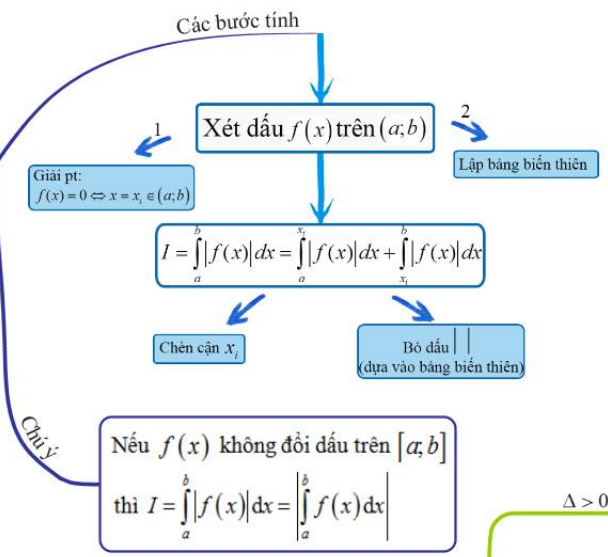
ĐẶC BIỆT

DẠNG HỮU TỈ

$$I = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

Bậc tử < bậc mẫu

Bậc tử ≥ bậc mẫu



Với $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx = k \Rightarrow \int_a^{\frac{b}{m}} f(mx) dx = \frac{k}{m}$$

Với $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx = k \Rightarrow I = \int_a^b f(a+b-x) dx = k$$

Với $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[a; b]$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx$$

Với $f(x)$ là hàm số lẻ, liên tục trên $[a; b]$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Với $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

$$mf(-x) + nf(x) = g(x) \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{m+n} \int_{-a}^a g(x) dx$$

Với $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ T

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = k \Rightarrow \int_0^T f(x) dx = k$$

Với $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $\int_a^b f(a+b-x) dx = k, \forall x \in [a; b]$

$$\int_a^b x \cdot f(x) dx = k \Rightarrow I = \int_a^b f(x) dx = \frac{2k}{a+b}$$

$I = \int_a^b \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$

$g(x) = ax^2 + bx + c$

$\Delta > 0$

$$I = \frac{1}{a(x_1 - x_2)} \int_a^b \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{a(x_1 - x_2)} \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right| \Big|_a^b$$

$\Delta = 0$

$$I = \int_a^b \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int_a^b \frac{dx}{(x - x_0)^2} = -\frac{1}{a(x - x_0)} \Big|_a^b$$

$\Delta < 0$

$$I = \frac{1}{a} \int_a^b \frac{dx}{(x + m)^2 + n^2}$$

Đặt $x + m = n \tan t$

$$I = \frac{1}{na} \int_a^b dt = \frac{1}{na} t \Big|_a^b$$

$I = \int_a^b \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx$

$g(x)$ có bậc lớn hơn 2

$\Delta > 0$

$$I = \int_a^b \frac{C(x - x_1) + D(x - x_2)}{a(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{1}{a} \int_a^b \left(\frac{C}{x - x_1} + \frac{D}{x - x_2} \right) dx$$

$\Delta = 0$

$$I = \int_a^b \frac{A(x - x_1) + C}{a(x - x_1)^2} dx = \int_a^b \left(\frac{A}{a(x - x_1)} + \frac{C}{(x - x_1)^2} \right) dx$$

$\Delta < 0$

$$I = A \int_a^b \frac{(ax^2 + bx + c)'}{ax^2 + bx + c} dx + B \int_a^b \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

Đổi biến

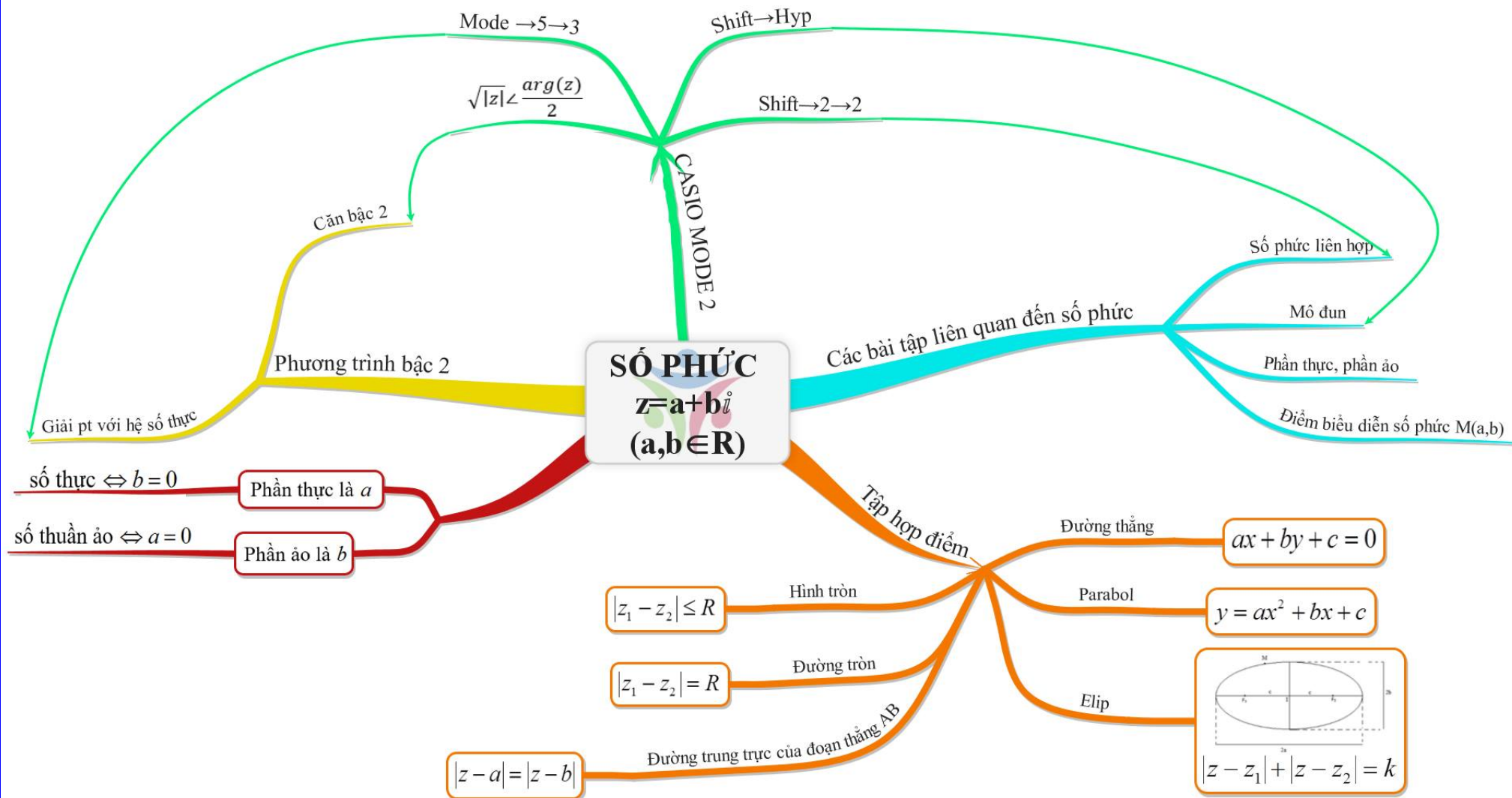
Tách, ghép (đồng nhất hệ số), nhân, chia

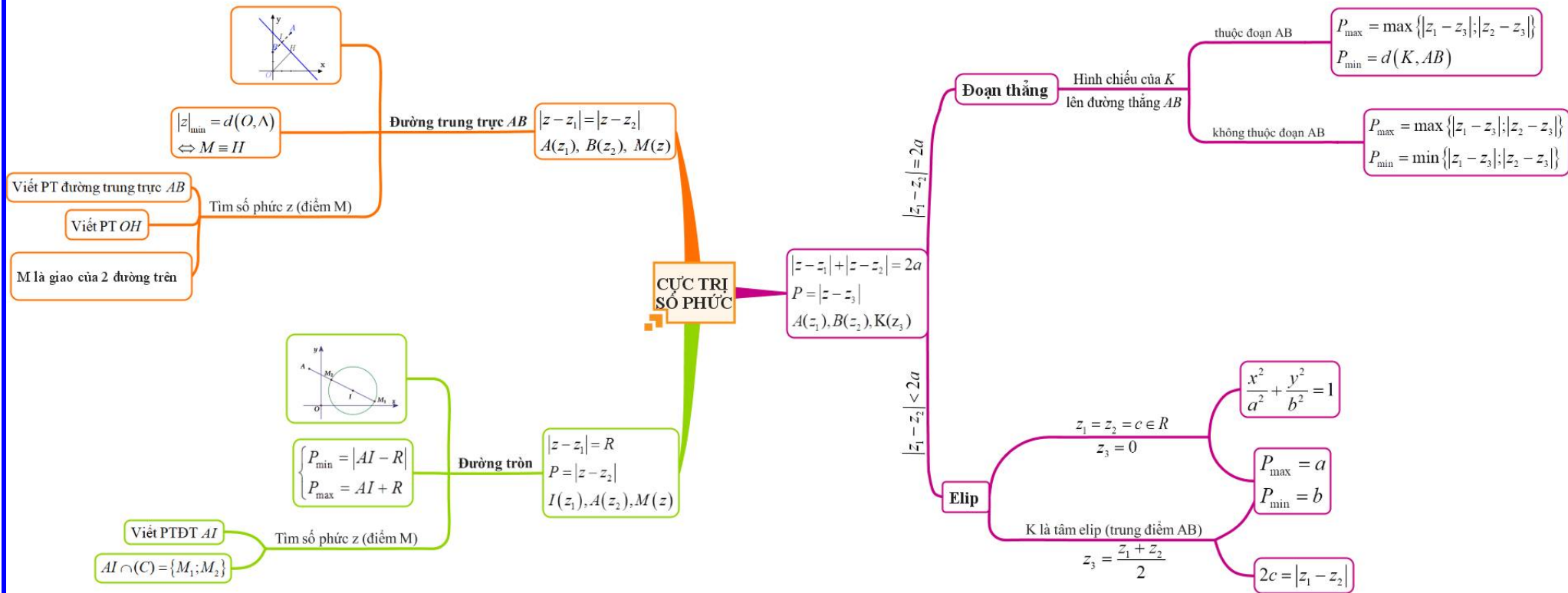
Đưa về 2 dạng trước

$I = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_a^b \left[h(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \right] dx$

$\int_a^b h(x) dx$ tính tích phân cơ bản

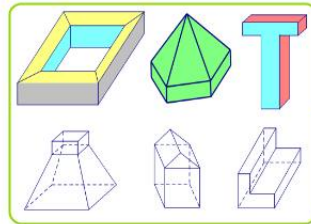
$\int_a^b \frac{r(x)}{g(x)} dx$ bậc tử < bậc mẫu





HÌNH ĐA DIỆN KHỐI ĐA DIỆN

CÁC HÌNH ĐA DIỆN



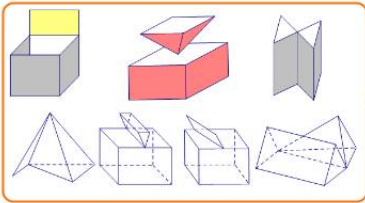
ĐỊNH NGHĨA

Là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa hai tính chất

Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung

Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác

CÁC HÌNH KHÔNG LÀ ĐA DIỆN



- + Số mặt lớn hơn hoặc bằng số cạnh
- + Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng số cạnh

CHÚ Ý

Một khối đa diện bất kì có ít nhất 4 mặt

Mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh

Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh

Nếu đa diện có m mặt, mặt là đa giác p cạnh, c là số cạnh thì $2c = pm$

KHỐI ĐA DIỆN LỖI

Định lý Euler

$$Đ + M = C + 2$$

$Đ$, C , M là số đỉnh, cạnh, mặt

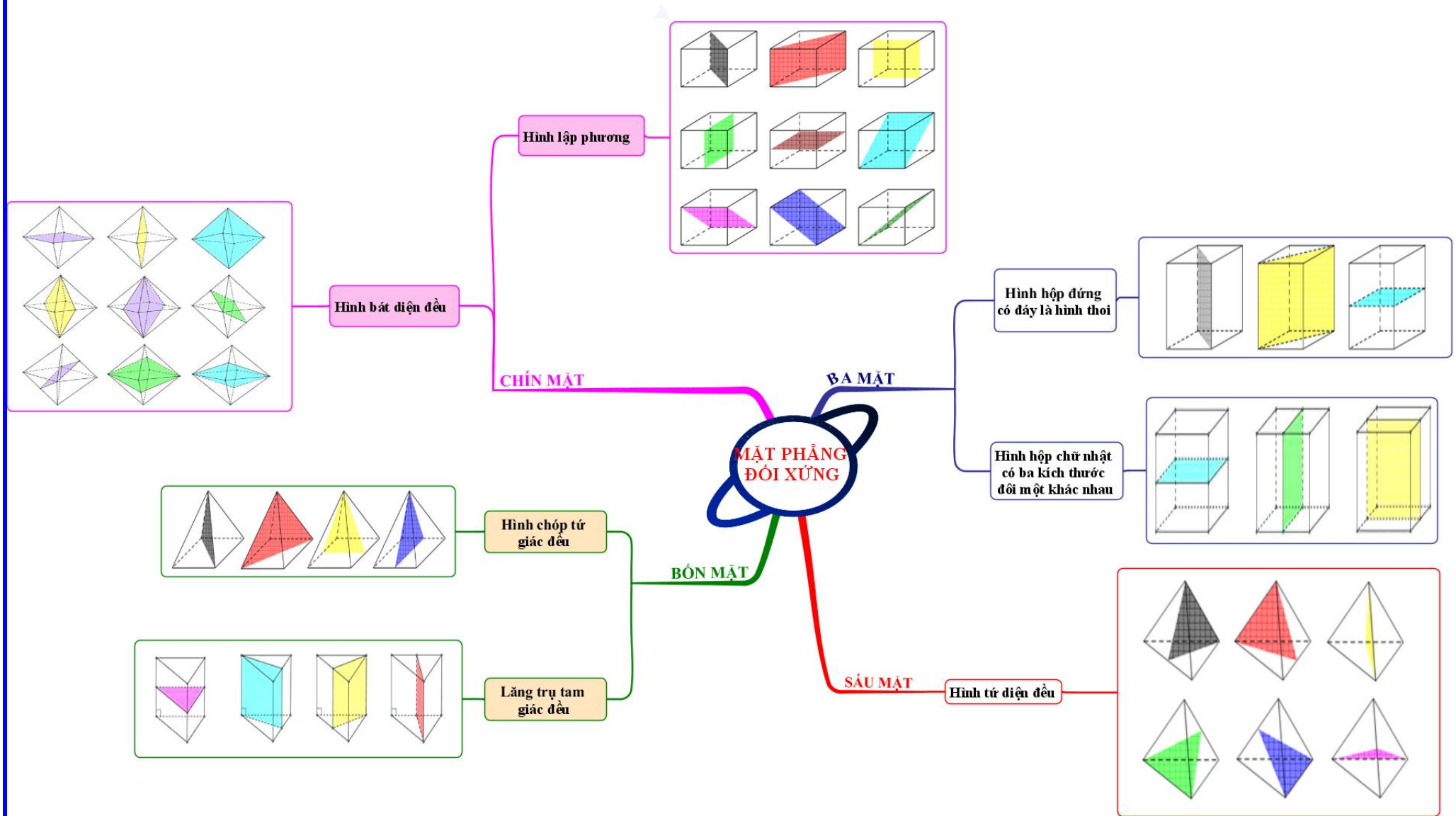
Định nghĩa

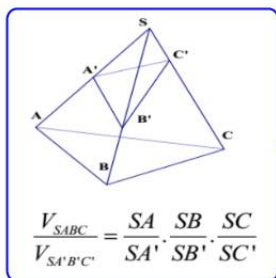
(H) là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H)

Khối đa diện đều

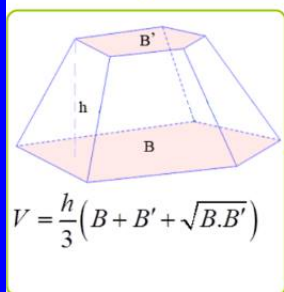
- Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.
- Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt. Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại $\{p, q\}$.

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Hình
$\{3; 3\}$	Tứ diện đều	4	6	4	
$\{4; 3\}$	Lập phương	8	12	6	
$\{3; 4\}$	Bát diện đều	6	12	8	
$\{5; 3\}$	Mười hai mặt đều	20	30	12	
$\{3; 5\}$	Hai mươi mặt đều	12	30	20	

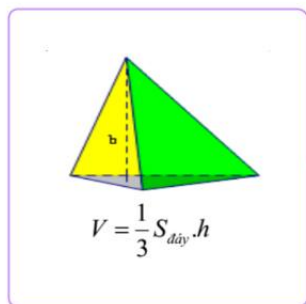




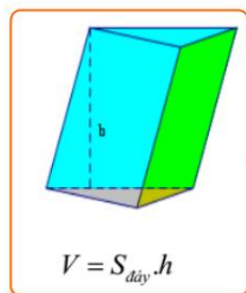
TỈ SỐ THỂ TÍCH



HÌNH CHÓP CỤT



KHỐI CHÓP



LĂNG TRỤ

THỂ TÍCH
KHỐI
ĐẶC BIỆT

ĐẶC BIỆT

$$\begin{cases} SA = a, SB = b, SC = c \\ \widehat{ASB} = \alpha, \widehat{BSC} = \beta, \widehat{CSA} = \varphi \end{cases}$$

$$V = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \varphi + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi}$$

$$\begin{cases} SA = a, S_{\triangle SAB} = S_1, S_{\triangle SAC} = S_2 \\ ((SAB), (SAC)) = \alpha \end{cases}$$

$$V = \frac{2S_1 \cdot S_2 \cdot \sin \alpha}{3a}$$

$$\begin{cases} SA = a, SB = b, SC = c \\ ((SAB), (SAC)) = \alpha \\ \widehat{ASB} = \beta, \widehat{ASC} = \varphi \end{cases}$$

$$V = \frac{abc}{6} \sin \alpha \sin \beta \sin \varphi$$

$$\begin{cases} AB = a, CD = b \\ (AB, CD) = \alpha \\ d_{(AB, CD)} = h \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{6} abh \sin \alpha$$

$$\begin{cases} AB = a, BC = b, CA = c \\ CD = d, AD = e, BD = f \end{cases}$$

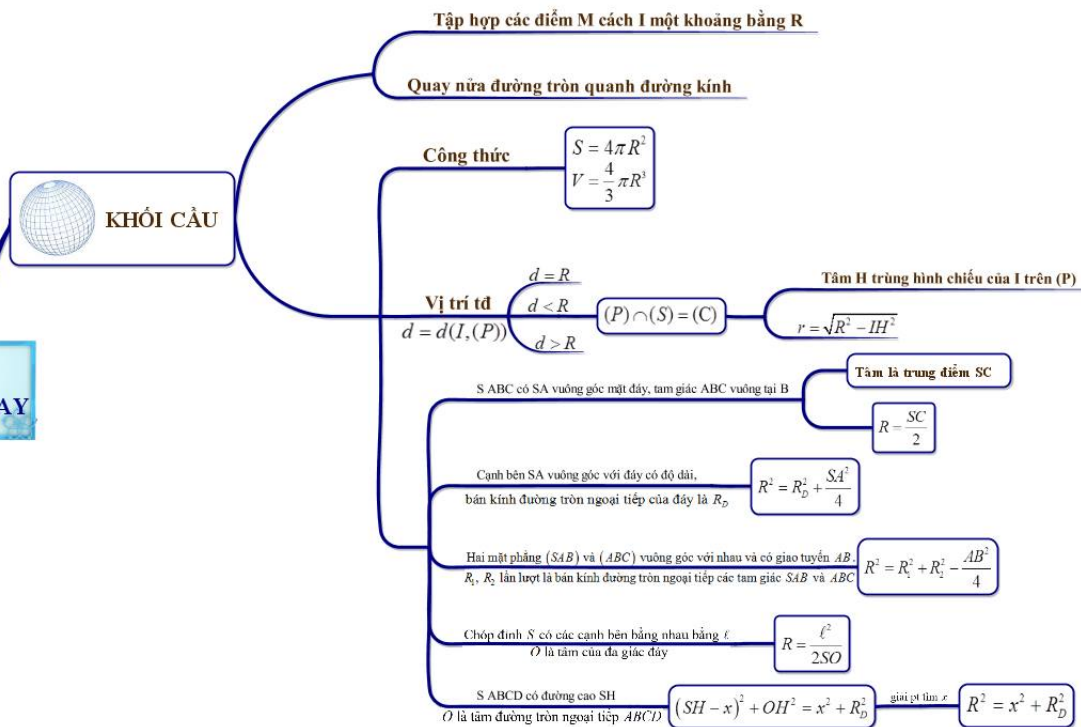
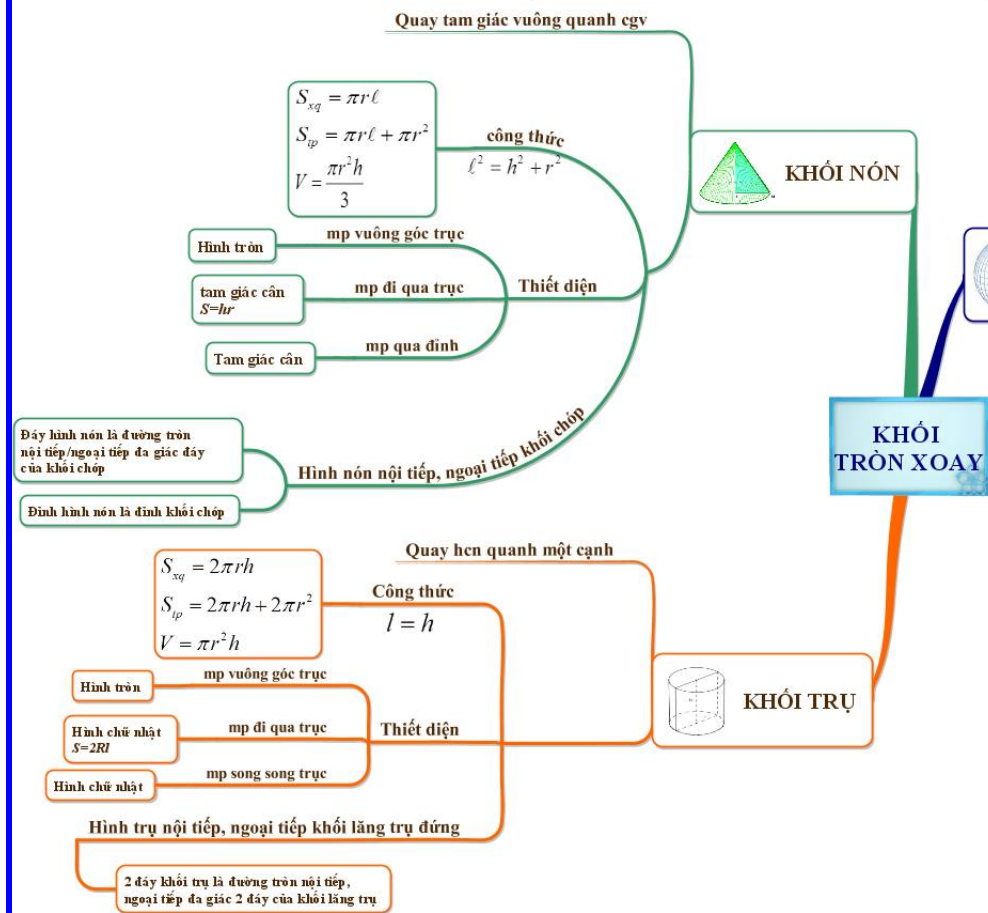
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{12} \sqrt{M + N + P - Q} \\ M &= a^2 d^2 (b^2 + c^2 + e^2 + f^2 - a^2 - d^2) \\ N &= b^2 e^2 (a^2 + c^2 + d^2 + f^2 - b^2 - e^2) \\ P &= c^2 f^2 (a^2 + b^2 + d^2 + e^2 - c^2 - f^2) \\ Q &= (abc)^2 + (aef)^2 + (bdf)^2 + (cde)^2 \end{aligned}$$

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

Tứ diện đều
 $a = b = c$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}$$

tứ diện gần đều
 $\begin{cases} AB = CD = a \\ AC = BD = b \\ AD = BC = c \end{cases}$



PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Tâm I (a;b;c)

Bán kính R

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Tâm I (a;b;c)

Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d &= 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - d &> 0 \end{aligned}$$

$$R^2 = [d(I, (P))]^2 + x^2$$

Mặt cầu tâm I cắt d tại 2 điểm A, B sao cho AB = x

$$R^2 = [d(I, (P))]^2 + r^2$$

Mặt cầu tâm I cắt (P) theo 1 đường tròn bán kính r

Mặt cầu có AB là đường kính

Tâm là trung điểm AB

$$R = \frac{AB}{2}$$

Mặt cầu tâm I đi qua điểm A

$$R = IA$$

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P)

$$R = d(I, (P))$$

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với d

$$R = d(I, d)$$

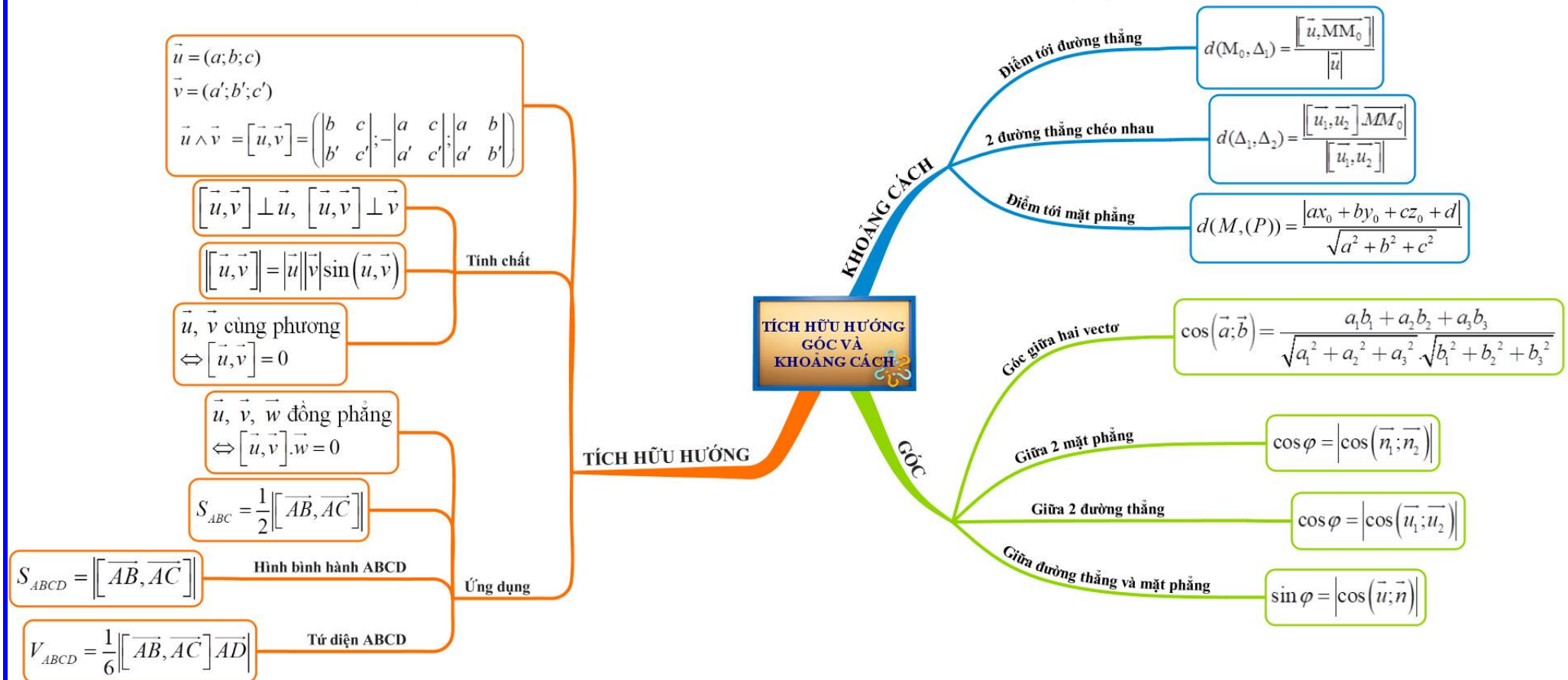
Tâm I thuộc (P) và qua A, B, C

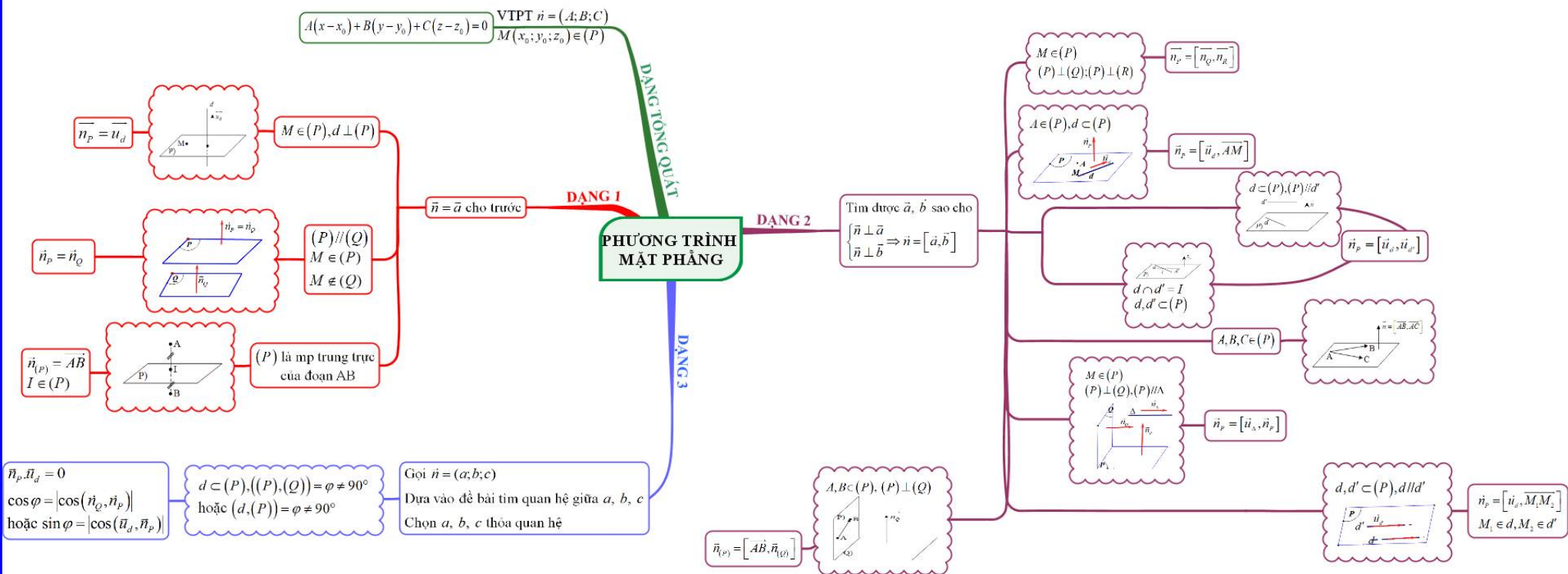
$I \in (P_1); (P_2); (P_3)$
 $(P_1), (P_2)$ là MP trung trực của AB, AC

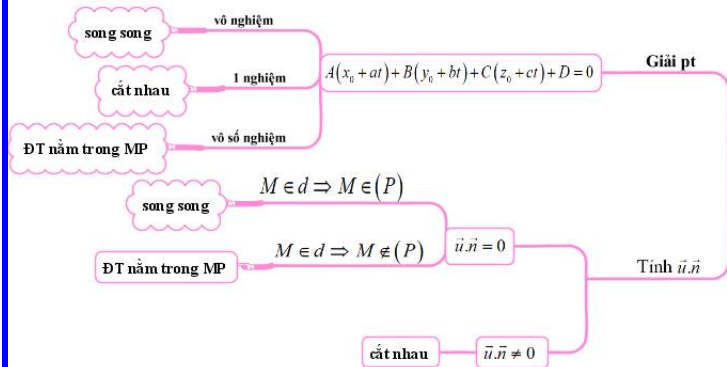
Mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm
 $IA = IB = IC = ID$

Thay tọa độ A, B, C, D vào pt
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
 Giải hệ phương trình







XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_2 + at' \\ y = y_2 + bt' \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ z = z_2 + ct' \end{cases}$$

HAI ĐƯỜNG THẲNG

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0}$$

- $M_1 \in d_1 \Rightarrow M_1 \notin d_2$ → song song
- $M_1 \in d_1 \Rightarrow M_1 \in d_2$ → trùng nhau

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0}$$

Giải hệ pt

$$\begin{cases} x_1 + at = x_2 + at' \\ y_1 + bt = y_2 + bt' \\ z_1 + ct = z_2 + ct' \end{cases}$$

- có đúng 1 nghiệm → Cắt nhau
- vô nghiệm → chéo nhau

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1 M_2} = 0$$

Cắt nhau

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1 M_2} \neq 0$$

chéo nhau

$$\begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases}$$

trùng nhau

$$\begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$$

song song

$$\vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2$$

cắt nhau

vuông góc

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

HAI MẶT PHẪNG

$$\begin{cases} (P): A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ (Q): A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

MP VÀ MẶT CẦU

$d(I, (P)) < R$ → Cắt nhau

$d(I, (P)) > R$ → MP nằm ngoài mặt cầu

$d(I, (P)) = R$ → Tiếp xúc

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

DẠNG 1

$\vec{u} = \vec{a}$ cho trước

$$A, B \in d \Rightarrow \vec{u}_d = \overrightarrow{AB}$$

$$M \in d; d // d' \Rightarrow \vec{u}_d = \vec{u}_{d'}$$

$$M \in d; d \perp (P) \Rightarrow \vec{u}_d = \vec{n}_P$$

$$d \perp \Delta$$

$$(P) \text{ qua } M, \vec{n}_P = \vec{u}_d$$

$$d \cap (P) = A$$

$$d \cap \Delta = A$$

$$A \in \Delta, \overrightarrow{AM} \perp \vec{u}_\Delta$$

$$\vec{u}_d = \overrightarrow{AM}$$

$$A \in d; d // (P)$$

$$\vec{u}_d = \overrightarrow{AB}$$

$$B = d \cap \Delta \Rightarrow B \in \Delta$$

$$\vec{n}_P, \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\vec{u}_d = \overrightarrow{AB}$$

$$A = d_1 \cap (P); B = d_2 \cap (P)$$

$$d // \Delta \text{ hoặc } M \in d$$

$$\vec{u}_d = \overrightarrow{AB}$$

$$A = d \cap d_1 \Rightarrow A \in d_1$$

$$B = d \cap d_2 \Rightarrow B \in d_2$$

$$d // \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k \vec{u}_\Delta \Rightarrow A, B$$

$$\text{hoặc } \overrightarrow{MA} = k \overrightarrow{MB} \Rightarrow A, B$$

$$d \perp d_1; d \perp d_2$$

$$\vec{u}_d = \overrightarrow{AB}$$

$$A = d \cap d_1 \Rightarrow A \in d_1$$

$$B = d \cap d_2 \Rightarrow B \in d_2$$

$$\begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A, B$$

DẠNG 2

Tim được $\vec{a}, \vec{b}$ sao cho

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{u} \\ \vec{b} \perp \vec{u} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = [\vec{a}, \vec{b}]$$

DẠNG 3

VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$

$M(x_0; y_0; z_0) \in d$

Dạng chính tắc
 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Dạng tham số

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$
 Dựa vào đề bài tìm quan hệ giữa a, b, c
 Chọn a, b, c thỏa quan hệ

$$\vec{u}_d = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \quad A \in d; d \perp d_1; d \perp d_2$$

$$\vec{u}_d = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P] \quad M \in d; d \perp \Delta; d // (P)$$

$$\vec{u}_d = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P] \quad d \subset (P)$$

$$\Delta \cap (P) = A \Rightarrow A \in d$$

$$\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] \quad M \in d; d // (P); d // (Q)$$

$$\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] \quad d = (P) \cap (Q)$$

$$\vec{u}_d = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] \quad M \in d; d \text{ cắt } d_1; d \text{ cắt } d_2$$

$$\vec{n}_1 \text{ là VTPT } (A, d_1)$$

$$\vec{n}_2 \text{ là VTPT } (A, d_2)$$

